

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 97 (1971)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Méthode des éléments finis dans le domaine non linéaire  
**Autor:** Khan, Mukhtar Hussain  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-71183>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Méthode des éléments finis dans le domaine non linéaire<sup>1</sup>

par MUKHTAR HUSSAIN KHAN, ingénieur SIA, M. ASCE, Dr ès sc. techn. EPFL, ingénieur principal chez Bonnard & Gardel, ingénieurs-conseils S.A., et assistant à la Chaire d'aménagements de production d'énergie de l'EPFL

## 1. Introduction

Le comportement non linéaire des matériaux joue un rôle important dans certains domaines qui préoccupent l'ingénieur praticien. C'est notamment le cas en géotechnique et mécanique des roches et en particulier dans les problèmes de tunnels, de cavernes de centrales. Dans le domaine des structures, on conçoit que ce comportement non linéaire puisse influencer de façon non négligeable la répartition des efforts dans les zones les plus sollicitées.

Il paraît donc intéressant, voire indispensable dans certains cas, de procéder à une analyse non linéaire de ces structures en tenant compte des lois de contrainte-déformation des matériaux qui traduisent mieux leur comportement que la loi de Hook. La méthode des éléments finis permet d'effectuer une telle analyse. Cet outil permet par ailleurs d'évaluer la charge de rupture des structures de forme géométrique complexe. Il est important de noter que l'on obtient toujours par cette méthode la charge minimale de rupture car les conditions cinématiques aussi bien que celles de l'équilibre sont satisfaites lors de l'analyse.

L'utilisation de la méthode des éléments finis dans le domaine non linéaire est relativement récente (à notre connaissance, les premières publications datent de 1965) [1, 2, 3]<sup>2</sup>. Divers procédés ont été utilisés jusqu'à présent pour tenir compte de la non-linéarité de la loi de contrainte-déformation, sans que l'on puisse dire que l'on ait trouvé un algorithme optimal pour une telle analyse. Dans ce qui suit, nous donnerons donc tout d'abord les lois idéalisées de déformation et de rupture de quelques matériaux. Puis nous rappellerons brièvement les divers procédés de calcul auxquels nous avons fait allusion plus haut.

Nous traiterons enfin quelques exemples numériques relatifs à des structures importantes : caisson en béton précontraint pour réacteur nucléaire, barrage, tirant d'ancre dans massif rocheux. Ces calculs numériques ont été effectués en collaboration avec la Chaire d'aménagements de production d'énergie de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et à l'aide d'un programme [4] établi par M. B. Saugy, assistant, dans le cadre des travaux de recherche dirigés par le professeur A. Gardel.

## 2. Lois idéalisées de rupture et de déformation de quelques matériaux

Les lois idéalisées citées dans ce paragraphe concernent le comportement des matériaux sous des charges rapides. Ainsi, l'influence du temps et de la température ne sera pas considérée ici.

Considérons un point  $P$  dans l'espace des contraintes principales (fig. 1) et admettons que ce point caractérise l'état de contrainte en un point quelconque d'un solide isotrope. Les coordonnées du point  $P$  sont les contraintes

<sup>1</sup> Exposé présenté au Séminaire sur les éléments finis dans l'industrie, organisé le 18 novembre 1970 par le Groupe des ingénieurs de l'industrie de la SIA.

<sup>2</sup> Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . L'état de contrainte du point  $P$  est également représenté par les trois grandeurs  $OL$ ,  $LP$  et l'angle  $\alpha$ .  $OL$  est la longueur de la diagonale de l'espace (lieu des points  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) limitée par un plan perpendiculaire à elle-même et passant par le point  $P$  (ce plan est parfois appelé plan octaédral dans la littérature).  $\alpha$  est l'angle dans ce plan entre le vecteur  $LP$  et la ligne d'intersection de ce plan avec celui passant par l'axe  $0\sigma_1$ .

On peut démontrer [5] que :

$$OL = \sqrt{3} \bar{\sigma} \text{ où} \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \text{la pression moyenne}$$

$$LP = \sqrt{\frac{2}{3}} (I_2)^{1/2} \quad \text{où} \quad (2)$$

$$I_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1$$

le déviateur des contraintes

$$\text{et } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3} (\sigma_2 - \sigma_3)}{2 \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3} \quad (3)$$

Cette représentation de l'état de contrainte d'un point en fonction de  $\bar{\sigma}$ ,  $I_2$  et de  $\alpha$  est intéressante pour la définition des surfaces de rupture des différents types de matériaux.

### 2.1 Critères de rupture

Pour les matériaux ductiles, tels que l'acier, on constate que la rupture est indépendante de la pression moyenne  $\bar{\sigma}$ . Elle se produit dès que le déviateur des contraintes  $I_2$  dépasse une certaine valeur. Le critère de *Von Mises* admet encore que la rupture est indépendante de l'angle  $\alpha$ . On obtient alors une surface symétrique de révolution par rapport à la diagonale  $OL$ . C'est un cylindre dont l'axe

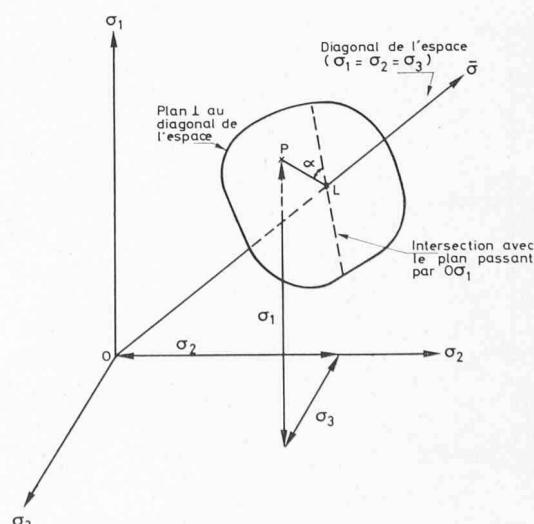


Fig. 1. — Etat de contrainte dans l'espace des contraintes principales.

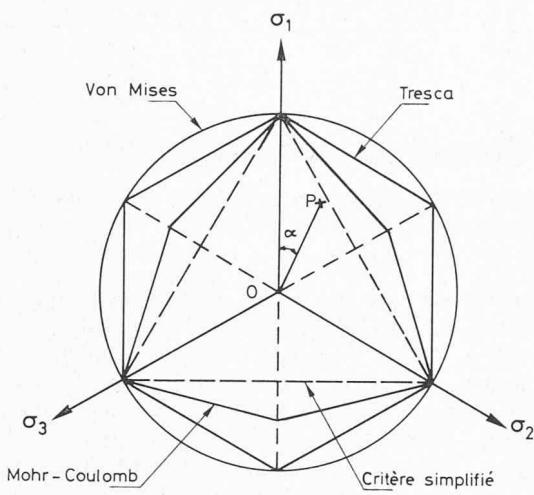
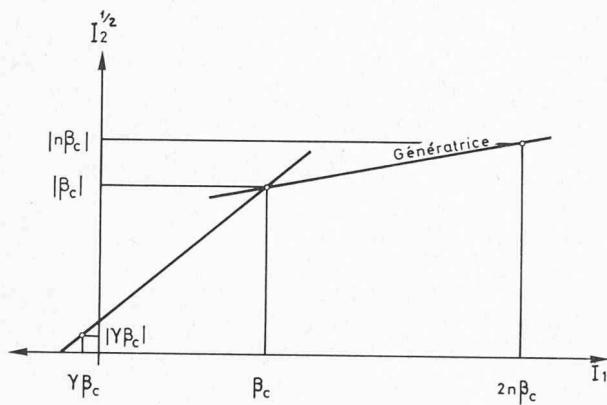


Fig. 2. — Formes des directrices des surfaces de rupture dans l'espace des contraintes principales.



$I_1$  = Premier invariant des contraintes

$I_2$  = Deuxième invariant des contraintes (déviateur des contraintes)

Fig. 3. — Génératrice de la surface tronconique de rupture [4].

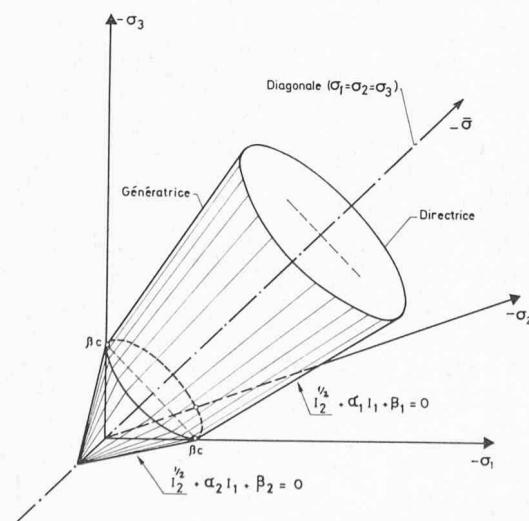


Fig. 4. — Surface tronconique de rupture du béton.

coïncide avec cette diagonale. Dans le plan perpendiculaire à cette diagonale, le critère de Von Misès est représenté par un cercle. La surface de rupture dans ce cas est donnée par l'expression :

$$I_2 = \psi$$

où  $\psi$  est une constante scalaire de comparaison caractéristique du matériau.

Le critère de Tresca pour les matériaux ductiles fait intervenir, en plus du déviateur  $I_2$ , l'angle  $\alpha$ . Dans le plan perpendiculaire à la diagonale  $OL$ , ce critère est représenté par un hexagone inscrit dans le cercle de Von Misès (fig. 2). La surface de rupture, dans ce cas, est alors un prisme d'axe  $OL$ .

Pour les bétons, la surface de rupture dépend non seulement du déviateur des contraintes, mais aussi de la pression moyenne et de l'angle  $\alpha$ . D'après l'étude de M. B. Saugy [4], on peut négliger, lors d'une première approximation, l'influence de l'angle  $\alpha$ . Cela revient à admettre une directrice circulaire pour la surface de rupture et se justifie pour autant que la rupture découle d'un phénomène parfaitement isotope tel que le glissement. Par contre, si la cause de la rupture est de nature anisotope, la directrice tendra vers le triangle montré à la figure 2 en traitillés. Restons-en à la première approximation ; on définira donc la surface de rupture en fonction de la pression moyenne et du déviateur des contraintes. La loi approximative de ce type, qui est la mieux connue actuellement, est celle de Drucker [6] dans laquelle le rayon du cercle directeur de la surface de rupture est une fonction linéaire de la pression moyenne. Dans l'espace des contraintes principales, cette surface est un cône dont l'axe coïncide avec la diagonale  $OL$ . Pour le béton, l'étude de M. B. Saugy [4] montre que l'angle d'ouverture du cône est différent suivant le type de rupture : fragile ou par glissement. On peut donc admettre pour génératrices deux droites présentées par la figure 3. Cette surface est alors composée d'un tronc de cône se coupant dans le plan des trois points de rupture correspondant à des essais uniaxiaux (fig. 4).

Elle peut être définie à l'aide des trois paramètres : résistances à la traction et à la compression uniaxiales et la résistance à la compression biaxiale du béton. Si l'on admet pour le béton :

$$\beta_c = \text{résistance à la compression uniaxiale}$$

$$m\beta_c = \text{résistance à la traction uniaxiale}$$

$$n\beta_c = \text{résistance à la compression biaxiale},$$

la surface de rupture est décrite par l'expression :

$$I_2^{1/2} + \frac{n-1}{2n-1} I_1 + \frac{n}{2n-1} \beta_c = 0 \quad (5)$$

dans la zone de compression et par l'expression :

$$I_2^{1/2} + \frac{1+m}{1-m} I_1 + \frac{2m}{m-1} \beta_c = 0 \quad (6)$$

dans la zone de traction où :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \text{ le premier invariant du tenseur des contraintes.}$$

Un tel critère de rupture peut également être utilisé pour certaines roches compactes dures telles que les *granites* ou les *calcaires* par exemple. La figure 5 montre à titre indicatif les résultats des essais triaxiaux effectués sur un calcaire [7] qui sont représentés en fonction de la pression moyenne et du déviateur des contraintes. De ces résultats, on peut tirer les paramètres qui définissent les droites génératrices de la surface de rupture.

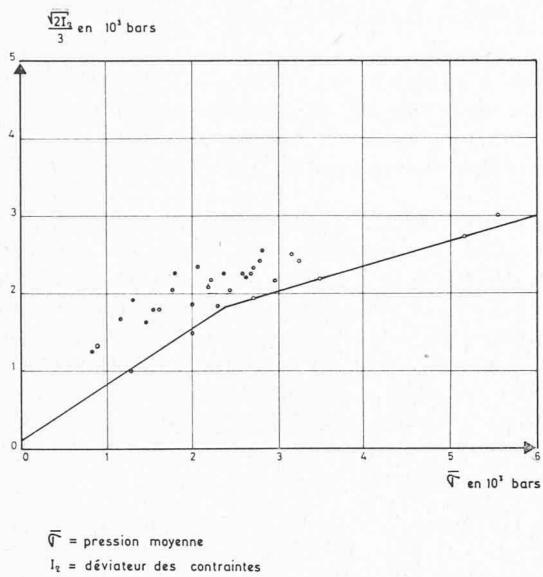


Fig. 5. — Résultats des essais triaxiaux sur un calcaire [7].

Pour les roches altérées ou fissurées qui se comportent dans l'ensemble de façon isotrope et pour les sols, on constate que le critère de Drucker [6] est le mieux connu à l'heure actuelle. La surface de rupture dans ce cas se limite à un cône dans l'espace des contraintes principales.

## 2.2 Lois idéalisées de contrainte-déformation

Dans l'établissement de ces lois pour les différents types de matériaux, il est commode de représenter l'état de déformation dans un point quelconque d'un solide en fonction de la déformation moyenne :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$$

et de la distortion

$$II_2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1$$

où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sont des déformations principales.

Pour un matériau parfaitement élastique et isotrope, on a les relations suivantes entre les états de contraintes et de déformations :

$$\bar{\sigma} = 3K\bar{\varepsilon} \quad (7)$$

$$I_2 = 2\mu II_2 \quad (8)$$

où  $K$  = module de compressibilité

$\mu$  = module de glissement

En fonction du module d'élasticité  $E$  et du coefficient de Poisson  $v$ , les valeurs de  $K$  et  $\mu$  sont données par les expressions :

$$K = \frac{E}{3(1-2v)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}$$

Pour un corps *ductile*, tel que l'acier, on peut admettre que les valeurs de  $K$  et  $\mu$  restent constantes jusqu'au seuil de plasticité.

Les corps ductiles se comportent donc de façon élastique pratiquement jusqu'à la plastification. On a donc :

$$\left. \begin{array}{l} K = \text{constant} \\ \mu = \text{constant} \end{array} \right\} \quad (9)$$

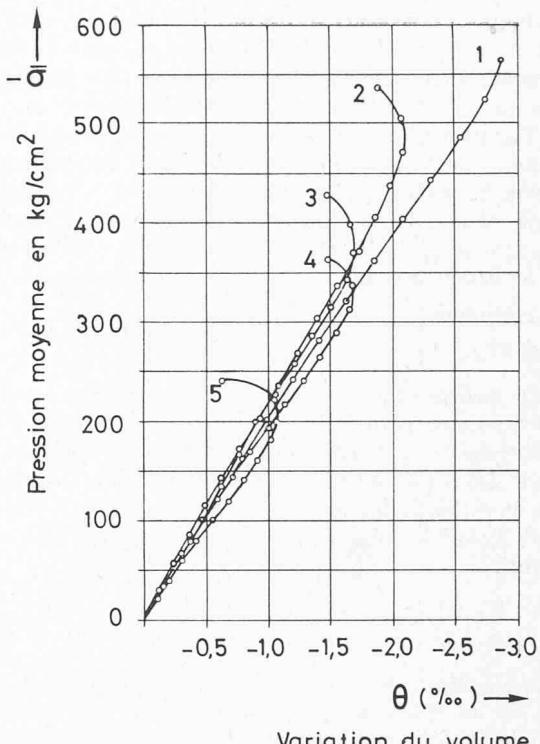
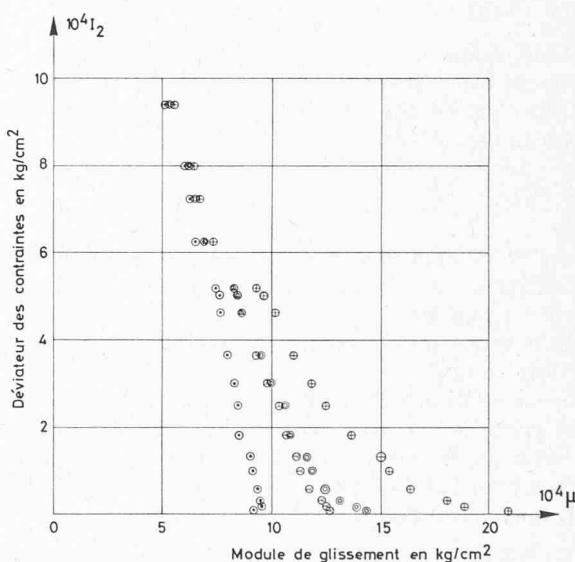


Fig. 6. — Variation du volume du béton  $\theta$  en fonction de la pression moyenne  $\bar{\sigma}$  [4].



### LEGENDE

- $\mu_1 = S_1 / 2\varepsilon_1$
- ⊕  $\mu_2 = S_2 / 2\varepsilon_2$
- ◎  $\mu_3 = S_3 / 2\varepsilon_3$
- ◎  $\bar{\mu} = \sum \mu_i / 3$

Fig. 7. — Variation du module de glissement  $\mu$  en fonction du déviateur des contraintes  $I_2$  [4].

Pour les bétons, la loi de contrainte-déformation n'est plus linéaire bien avant la rupture. Les valeurs de  $K$  et de  $\mu$  varient donc en fonction des contraintes. L'étude de M. B. Saugy [4], basée sur les résultats des essais mécaniques qui semblaient être les plus représentatifs [8], montre que l'on peut admettre les deux hypothèses suivantes pour définir la loi de contrainte-déformation :

$-K$  est une fonction de la pression moyenne  $\bar{\sigma}$

$-\mu$  est une fonction des déviateurs de contrainte  $I_2$

La figure 6, qui donne la variation du volume  $\theta = 3 \bar{\varepsilon}$  en fonction de la pression moyenne  $\bar{\sigma}$  pour quelques essais de compression biaxiale [8] montre que, si l'on néglige le foisonnement du béton qui intervient juste avant la rupture, l'on peut admettre que la valeur de  $K$  est pratiquement constante. La figure 7 montre, d'après un essai de compression biaxiale du béton, la variation de la valeur du module sécant de glissement  $\mu$  en fonction du déviateur de contrainte  $I_2$ . La loi idéalisée de contrainte-déformation pour les bétons se résume donc par les expressions suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} K = \text{constante} \\ \mu = f_1(I_2) \end{array} \right\} \quad (10)$$

Pour quelques types de *roches compactes dures*, on peut établir, comme pour le béton, une loi de variation de  $\mu$  en fonction de  $I_2$  en admettant  $K$  comme constant.

Pour des *roches altérées ou fissurées*, dont le comportement dans l'ensemble peut être admis isotrope, et pour les *sols*, les lois idéalisées de contrainte-déformation seraient du type :

$$\left. \begin{array}{l} K = f_1(\bar{\sigma}, I_2) \\ \mu = f_2(\bar{\sigma}, I_2) \end{array} \right\} \quad (11)$$

Ces équations définissent des lois générales. Il est possible de les simplifier pour certains types de sols. Par exemple, pour les *matériaux argileux*, on peut admettre une loi du type suivant :

$$\left. \begin{array}{l} K = \text{constant} \\ \mu = f_1(\bar{\sigma}, I_2) \end{array} \right\} \quad (12)$$

Certains auteurs [9] ont utilisés une loi parabolique de contrainte-déformation proposée par Kondner [10] pour l'analyse non linéaire des contraintes dans les sols. Cette loi est du type suivant

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon}{a + b\varepsilon} \quad (13)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont des contraintes principales maximale respectivement minimale,  $\varepsilon$  est la déformation axiale,  $a$  et  $b$  sont les constantes.

On constate que cette loi néglige l'effet de contrainte intermédiaire  $\sigma_2$ .

Signalons ici que des essais systématiques sont actuellement effectués par M. F. Descœudres au Laboratoire de géotechnique de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne qui ont pour but de dégager les lois du type de l'équation (11), notamment pour les sables.

### 3. Procédés d'analyse non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Notons tout d'abord que l'analyse non linéaire est effectuée à l'aide d'une suite d'analyses linéaires dans lesquelles les caractéristiques élastiques du matériel varient en fonction de l'état de contrainte.

Nous ne rappelons pas ici les bases de la méthode des éléments finis qui ont déjà fait l'objet de nombreuses publications<sup>1</sup>.

Divers procédés ont été utilisés jusqu'à présent pour effectuer les calculs non linéaires par la méthode des éléments finis. Ils peuvent être divisés en deux grands groupes, soit :

- méthodes d'élasticité variable
- méthode de déformation ou de contrainte initiale.

<sup>1</sup> On se reportera notamment à l'ouvrage cité en référence [2] de la présente communication.

#### 3.1 Méthodes d'élasticité variable

Ces méthodes sont caractérisées par le fait que l'on modifie effectivement la matrice de rigidité des éléments en fonction de leur état de contrainte calculé lors de l'analyse linéaire précédente. La figure 8 montre de façon schématique les deux procédés qui ont été utilisés par divers auteurs [3, 4].

Le premier (fig. 8 (a)) utilise le *module sécant  $E_s$ , variable* en fonction des contraintes. Les calculs sont effectués en général en appliquant la charge par étapes que nous appelons des pas. Plusieurs itérations sont effectuées lors d'un pas pour suivre de près la courbe de contrainte-déformation. Il est possible d'appliquer la totalité de la charge dans un seul pas. Un grand nombre d'itérations seront alors nécessaires pour obtenir la même précision que dans le cas précédent. Le processus de calcul pour une augmentation de charge peut être résumé comme suit :

- 1) Les contraintes et les déformations sont évaluées par une analyse linéaire utilisant les matrices de rigidité des éléments déterminées lors de la dernière itération du pas précédent.
- 2) Pour chaque élément où la contrainte calculée dépasse celle correspondant à la loi admise, une nouvelle valeur du module sécant est évaluée d'après le schéma de la figure 8 (a). Les matrices d'élasticité et de rigidité de l'élément sont ensuite déterminées.
- 3) Les contraintes et les déformations sont évaluées par une nouvelle analyse linéaire utilisant les matrices de rigidité calculées sous 2).

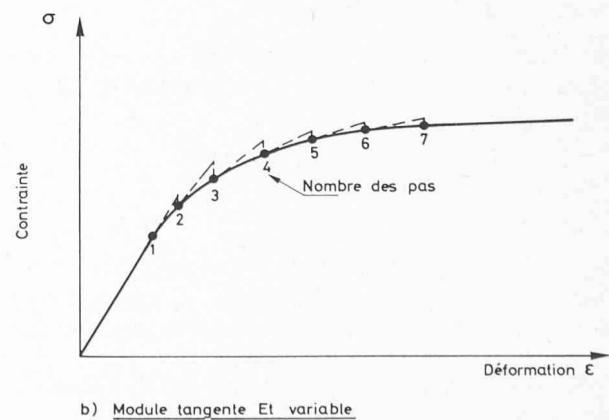
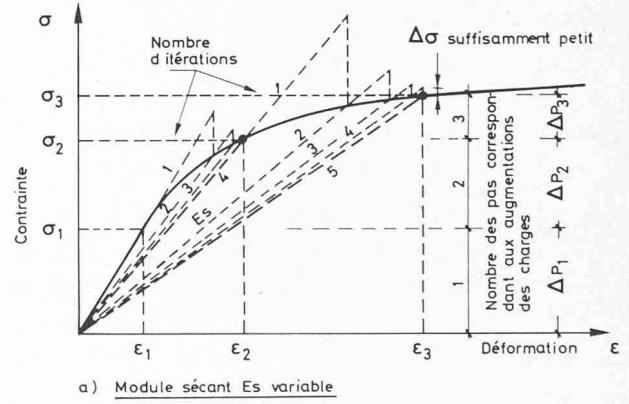


Fig. 8. — Processus de calcul non linéaire par les méthodes d'élasticité variable.

- 4) Les étapes 2) et 3) qui constituent une itération sont répétées un certain nombre de fois fixés d'avance en fonction de la nature de la courbe de la contrainte-déformation.

La deuxième méthode utilise le *module tangent*  $E_t$  variable en fonction de la contrainte. Ainsi que le montre la figure 8 (b), les calculs sont effectués en appliquant la charge en plusieurs étapes. Le nombre de pas est donc augmenté. Chaque pas correspond à une analyse linéaire effectuée en modifiant la matrice de rigidité des éléments en fonction de l'état de contrainte calculé dans le pas précédent.

L'augmentation des contraintes et les déformations ainsi calculées sont ajoutées aux valeurs obtenues dans les pas précédents. Il y a donc là un danger de cumuler les erreurs au fur et à mesure de l'augmentation de la charge.

Les deux méthodes citées ci-dessus ont le *désavantage* que la matrice de rigidité est modifiée pour chaque analyse linéaire augmentant ainsi le temps de calcul sur l'ordinateur.

Il n'est également pas possible d'après ces méthodes de tenir compte lors d'une décharge de déformations plastiques permanentes dans les éléments plastifiés.

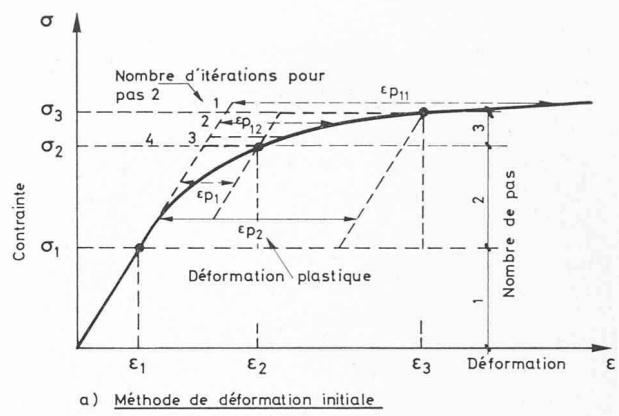
Par contre, l'*avantage* de ces deux méthodes est qu'elles permettent de mieux comprendre le phénomène physique. La méthode du *module sécant variable* permet, de plus, de tenir compte d'une loi de contrainte-déformation à dérivée localement négative, c'est-à-dire comportant une diminution des contraintes pour une augmentation des déformations, phénomène qui peut se présenter dans les sols par exemple.

### 3.2 Méthodes de déformation ou de contrainte initiale

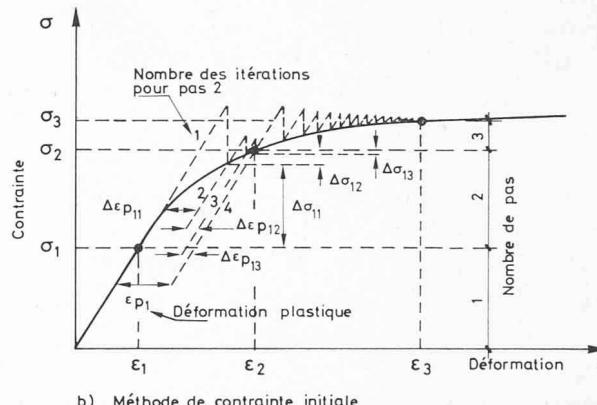
D'après ces méthodes, les calculs non linéaires sont effectués sans modification des matrices de rigidité des éléments. Lors des analyses successives linéaires, on procède à une redistribution des efforts que les éléments plastifiés ne peuvent pas supporter. La figure 9 montre, de façon schématique, les deux procédés qui ont été utilisés par divers auteurs [1, 11 et 12]. Les calculs sont effectués par itération pour une charge donnée. Il est souvent avantageux d'appliquer la charge par étapes pour obtenir une bonne précision avec un nombre raisonnable d'itérations par étapes.

La figure 9 (a) schématise le processus pour la méthode de *déformation initiale* [1]. Pour un pas donné, les contraintes et les déformations sont calculées par une analyse élastique. Dans chaque élément, l'état de déformation ainsi calculé est comparé avec celui compatible selon la loi de contrainte-déformation. L'écart de déformation est alors introduit comme déformation initiale dans l'analyse suivante. Les analyses linéaires sont répétées jusqu'à ce que cet écart devienne négligeable. Dans la figure 9 (a), ce processus est schématisé pour les calculs relatifs au pas numéro 2 pour lequel quatre itérations sont nécessaires pour annuler cet écart.

La figure 9 (b) montre le processus de calcul non linéaire par la méthode de *contrainte initiale* conçue par l'équipe du professeur Zienkiewicz [11, 12]. Cette méthode diffère de la précédente par le fait que les contraintes calculées dans les éléments par l'analyse linéaire sont comparées avec celles compatibles avec la loi de contrainte-déformation. Pour les écarts de contraintes ainsi constatés, les déformations plastiques correspondantes sont déterminées. Ces déformations sont alors introduites comme déformations initiales dans l'analyse linéaire suivante. Ce processus



a) Méthode de déformation initiale



b) Méthode de contrainte initiale

Fig. 9. — Processus de calcul non linéaire par les méthodes de déformation et de contrainte initiale.

est répété jusqu'à ce que les écarts deviennent négligeables. La figure 9 (b) schématise ce processus pour le pas numéro 2 pour lequel la déformation plastique  $\epsilon_{p1}$  a été déterminée à la quatrième itération.

Les *avantages* de ces deux méthodes sont les suivants :

- gain de temps de calcul à l'ordinateur du fait que la matrice de rigidité de la structure est déterminée une fois pour toutes au départ et n'est pas modifiée au cours des analyses linéaires ;
- possibilité de tenir compte lors d'une décharge de déformations permanentes dans les éléments plastifiés.

Le *désavantage* de la méthode de *déformation initiale* est qu'elle n'est pas applicable pour le cas de plasticité idéale comportant un palier horizontal dans la courbe de contrainte-déformation. Par contre, la méthode de *contrainte initiale* est en mesure de faire face à une telle situation, mais au prix d'un nombre élevé d'itérations (voir schéma fig. 9 (b), pas numéro 3). Notons que pour une courbe plate de contrainte-déformation, il semble que la méthode de déformation initiale permette d'avoir une convergence plus rapide, lors des itérations, que celle que l'on obtient dans la méthode de contrainte initiale.

### 3.3 Programme de calcul des structures massives et armées

Une description du programme mis au point par la Chaire d'aménagements de production d'énergie de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne avec notre collabora-

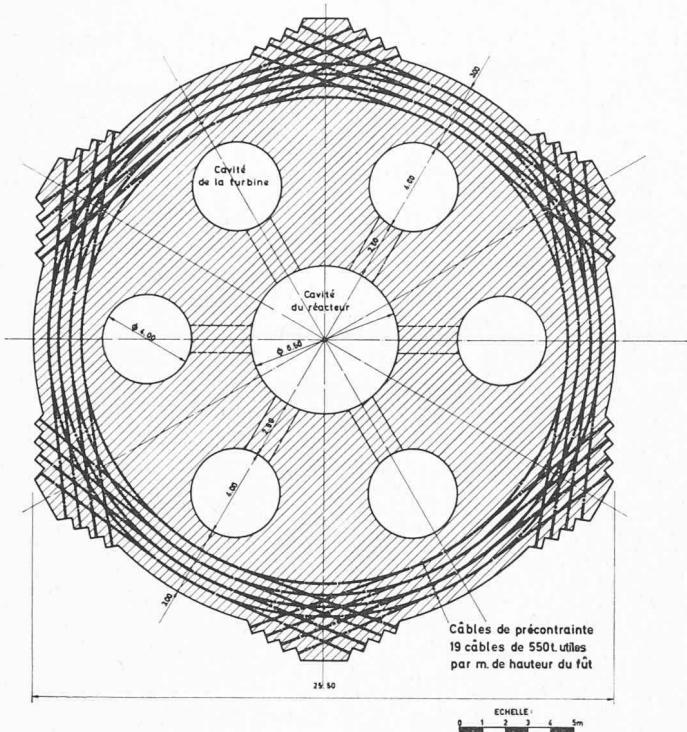


Fig. 10. — Caisson du réacteur rapide.

Coupe horizontale du fût

tion, a été donnée par M. Saugy dans une publication récente [4]. Nous en rappellerons ici quelques éléments principaux.

Le programme analyse les problèmes à deux dimensions à contraintes ou à déformations planes pour des structures massives en béton ou en rocher armés ou non par des barres métalliques. Le modèle mathématique est basé sur la méthode des éléments finis utilisant les éléments triangulaires pour le béton ou le rocher et les éléments filiformes pour les barres d'acier.

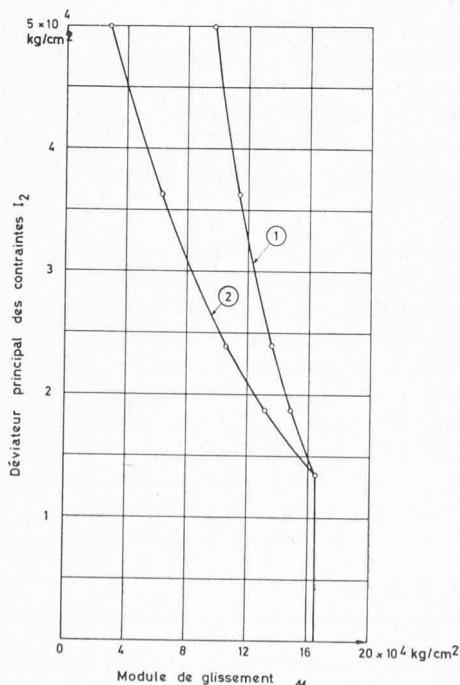


Fig. 12. — Lois de variation de  $\mu$  en fonction de  $I_2$ .

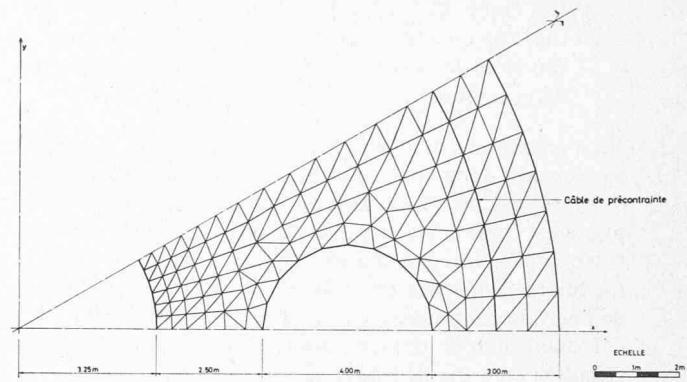


Fig. 11. — Caisson. Réseau des éléments finis.

Pour tenir compte de la non-linéarité, la *méthode du module sécant variable* citée sous paragraphe 3.1 a été utilisée pour ce premier programme étant donné qu'elle permet de mieux suivre le phénomène physique.

Les barres d'acier sont liées aux noeuds avec le béton ou le rocher. Cela revient à admettre qu'il n'y a pas de rupture d'adhérence entre ces deux matériaux.

A chaque analyse linéaire, un contrôle de l'état de rupture des éléments est effectué. S'il y a rupture avec traction dans un élément, le modèle isotrope est transformé en un modèle orthotrope orienté selon les directions des contraintes principales. L'élément ne résiste plus à la traction dans la direction perpendiculaire aux fissures. Par contre sa résistance à la compression n'est pas modifiée dans la direction parallèle aux fissures.

En ce qui concerne la durée d'une analyse non linéaire d'une structure comportant environ 200 éléments triangulaires et une dizaine d'éléments filiformes, elle est de l'ordre de une heure pour une dizaine d'itérations sur l'ordinateur IBM 7040.

#### 4. Exemples d'analyse du comportement non linéaire des structures

##### 4.1 Caisson en béton précontraint d'un réacteur rapide

La figure 10 représente la coupe horizontale du fût du caisson qui a un diamètre extérieur de 25,5 m. Il comporte une cavité centrale de 6,5 m de diamètre pour le réacteur et six cavités de 4 m de diamètre sont prévues dans la paroi du caisson pour loger des turbines placées en cycle direct.

La présence des cavités de grandes dimensions pose des problèmes de concentration de contraintes que nous avons déjà eu l'occasion de traiter dans le domaine linéaire [13]. Dans le cas particulier de ce caisson, les dimensions des cavités ont pris une telle importance qu'il a été jugé nécessaire de procéder à une analyse non linéaire de son comportement sous les charges d'exploitation et sous une charge croissante de pression jusqu'à sa rupture et ceci pour évaluer le coefficient de sécurité. Nous avons donné les détails de ces analyses dans deux publications récentes [14 et 15]. Nous nous limiterons donc à rappeler ici les hypothèses de base et les principaux résultats.

Les calculs ont été effectués pour une tranche de la partie médiane du fût de 1 m de hauteur. Les charges normales sur cette tranche sont :

- une pression de 90 bars dans la cavité du réacteur et de 80 bars dans les cavités des turbines ;
- un gradient thermique caractérisé par un écart de température de 20° entre les parois intérieures et extérieures du caisson ;

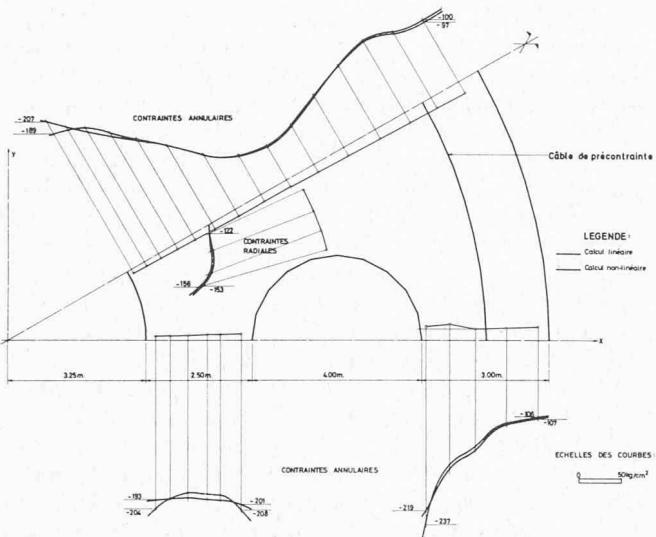


Fig. 13. — Contraintes dues à la précontrainte.

— une force annulaire de précontrainte de 10 500 t par mètre courant du fût.

Il a été en outre tenu compte de l'influence de la précontrainte axiale (parallèle à l'axe du fût) en admettant en première approximation une contrainte axiale de 100 kg/cm<sup>2</sup> uniforme sur toute la section du fût.

Etant donné la symétrie de la géométrie du fût et des charges, seul un douzième de la section plane du fût représentée à la figure 11 a été analysé. Le réseau des éléments finis comporte 183 éléments triangulaires de béton et 7 éléments filiformes de câble de précontrainte.

En ce qui concerne la loi de contrainte-déformation du béton, une loi d'après l'équation (10) a été admise avec la valeur du module de compressibilité  $K = 200\,000$  kg/cm<sup>2</sup> et la valeur du module de glissement  $\mu$  variable en fonction du déviateur des contraintes selon la courbe 1 de la figure 12 qui est basée sur des essais [8].

Les figures 13 et 14 présentent les résultats des calculs non linéaires des contraintes pour les cas de charges de précontrainte seule et de précontrainte plus le gradient thermique. Ces résultats sont comparés sur ces mêmes figures avec ceux des analyses linéaires. On constate que la prise en considération de la non-linéarité du comportement du béton réduit les contraintes extrêmes de 10 à 20 % pour le cas de charge de précontrainte seule et de 15 à 25 % pour celui de précontrainte plus gradient thermique. Il est important de remarquer que cette prise en considération conduit à un état de contrainte tridimensionnel beaucoup plus stable en réduisant pour les éléments les plus sollicités la distorsion de 20 à 50 %. Le béton s'adapte donc mieux aux charges que le modèle linéaire ne le laisse supposer.

Le comportement du fût lors d'une augmentation de pression intérieure jusqu'à la rupture de celui-ci a été analysé pour plusieurs hypothèses. D'abord les charges dues à la précontrainte et au gradient thermique ont été appliquées. Puis la charge due à la pression de service a été appliquée et augmentée par palier d'environ 10 % de cette pression jusqu'à la rupture.

Deux séries d'analyses ont été effectuées, en admettant une résistance à la compression, sur cylindres du béton de 350 kg/cm<sup>2</sup> et une valeur  $n = 1,25$  du rapport entre les résistances à la compression biaxiale et uniaxiale.

Dans la première série d'analyses, nous avons fait varier la loi de variation de  $\mu$  en fonction de  $I_2$ . La figure 12

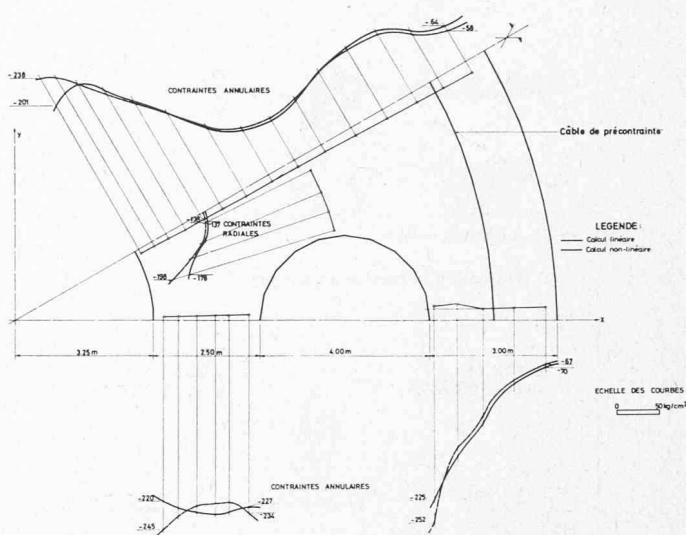


Fig. 14. — Contraintes dues à la précontrainte et au gradient thermique.

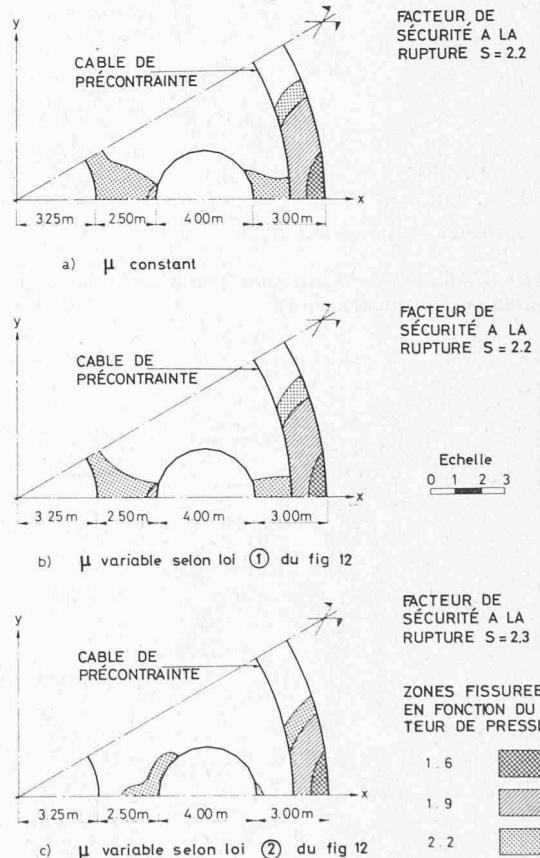


Fig. 15. — Influence de la loi de variation de  $\mu$  sur la fissuration et la rupture du fût.

présente les deux lois utilisées, la loi numéro 2 correspondant à un béton plus déformable. Pour ces analyses, la résistance à la traction du béton a été admise égale à 18 kg/cm<sup>2</sup> soit environ 5 % environ de la résistance à la compression.

La figure 15 présente les zones fissurées pour les facteurs de pression de 1,6, 1,9 et 2,2 et pour les trois analyses effectuées ; la première avec une valeur constante de  $\mu$  et les deux suivantes avec les lois de variation de  $\mu$  citées ci-dessus. Comme l'on pouvait s'y attendre, il y a très peu de différences dans l'extension des zones fissurées à l'exté-

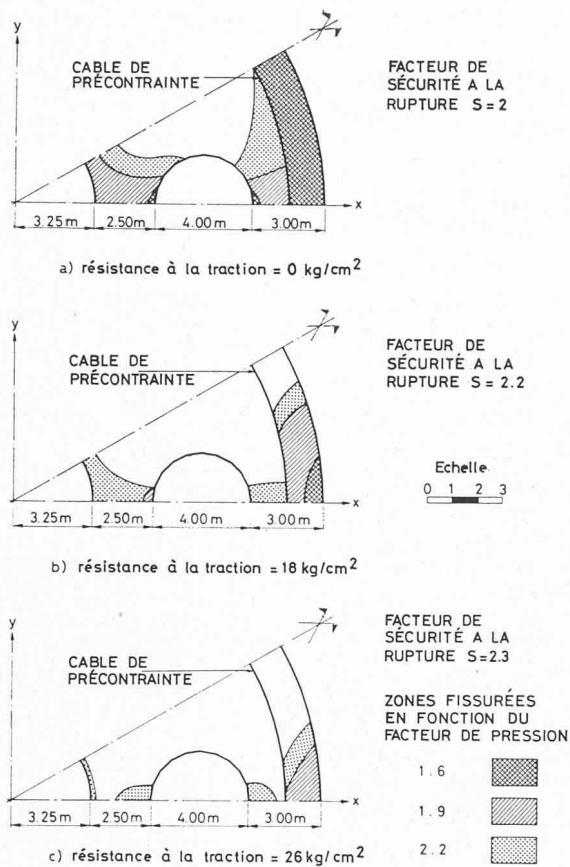


Fig. 16. — Influence de la résistance à la traction du béton sur la fissuration et la rupture du fût.

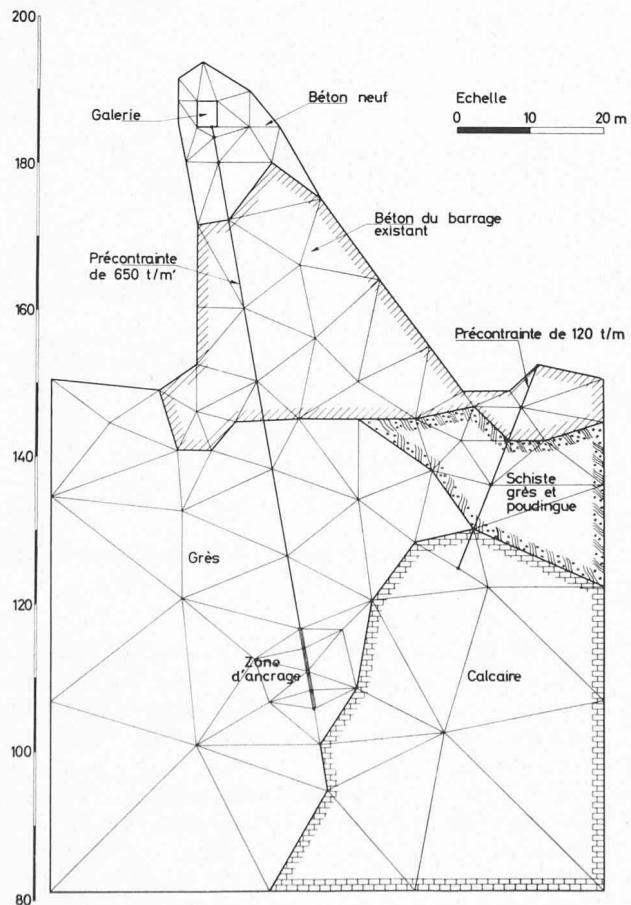


Fig. 17. — Barrage. Réseau des éléments finis.

rieur des câbles de précontraintes dans les trois cas. Par contre la fissuration autour des cavités est limitée à de petites zones dans le cas du béton déformable. La pression de rupture peut être considérée comme celle pour laquelle on obtient une zone fissurée continue depuis la cavité du réacteur jusqu'à la paroi extérieure du caisson. Sa valeur, rapportée à la pression de calcul, est de 2,2 pour les deux premières analyses et de 2,3 pour la troisième.

Une deuxième série d'analyses non linéaires a été effectuée pour évaluer l'influence de la résistance à la traction du béton sur la fissuration et la rupture du fût. La loi numéro 1 de variation de  $\mu$  en fonction de  $I_2$  a été admise. Trois valeurs de la résistance à la traction: 0, 18 et 26 kg/cm<sup>2</sup> ont été utilisées. La figure 16 présente les zones fissurées pour les facteurs de pression de 1,6, 1,9 et 2,2 pour ces trois analyses.

Pour les cas de résistance à la traction nulle (fig. 16 (a)), on constate que la fissuration autour de la cavité des turbines commence déjà pour un facteur de pression de 1,6. La pression de rupture peut être admise égale à deux fois la pression de calcul dans ce cas.

Pour les cas des résistances à la traction de 18 et 26 kg/cm<sup>2</sup>, les zones fissurées pour les trois facteurs de pression de 1,6, 1,9 et 2,2 diminuent considérablement. Le coefficient de sécurité à la rupture par rapport à la pression de calcul peut être admis à 2,2 respectivement 2,3 pour ces deux cas.

On constate donc que la variation de la surface de rupture dans la zone de traction a une influence non négligeable sur la fissuration et la résistance à la rupture du fût.

#### 4.2 Barrage et massif rocheux de fondation

La figure 17 présente un barrage existant d'environ 40 m de hauteur, fondé sur des roches de géologie complexe. La retenue étant partiellement envasée, ce barrage doit être surélevé d'environ 15 m et stabilisé à l'aide de tirants d'ancrage précontraints. La force de précontrainte est de l'ordre de 650 t par mètre linéaire du barrage.

Etant donné l'hétérogénéité des roches de fondations et la nécessité d'évaluer d'une façon précise les déformations du barrage surélevé, nous avons procédé à une analyse non linéaire pour différents cas de charge.

Le réseau de calcul comporte 130 éléments triangulaires et 12 éléments filiformes. Les caractéristiques mécaniques admises pour les bétons et les roches sont les suivantes :

	Module de compressibilité K en kg/cm <sup>2</sup>	Module de glissement $\mu$ en kg/cm <sup>2</sup>
Béton existant . . . . .	95 000	87 000
Béton neuf . . . . .	71 000	65 000
Calcaire . . . . .	71 000	65 000
Grès . . . . .	67 000	33 000
Schistes, grès et poudingue . . . . .	33 000	17 000

La surface de rupture admise pour les calculs est celle des grès. Une résistance à la compression de 100 kg/cm<sup>2</sup> et à la traction de 5 kg/cm<sup>2</sup> est admise.

La figure 18 présente les contraintes principales et la zone fissurée pour le cas de charge du lac plein. La zone fissurée se trouve adjacente au pied amont du barrage. La contrainte maximale est de l'ordre de 20 kg/cm<sup>2</sup>. Le déplacement horizontal de la crête du déversoir est de 6 mm environ vers l'aval.

La figure 19 présente les contraintes principales pour le cas de charge du lac vide jusqu'au niveau de la vase existante. On constate que grâce aux tirants d'ancrages existant dans le bassin d'amortissement, il n'y a pas de zone fissurée dans la fondation du barrage.

Les deux analyses permettent de constater qu'il n'y a pas de traction dans la roche autour de la zone du scellement du câble.

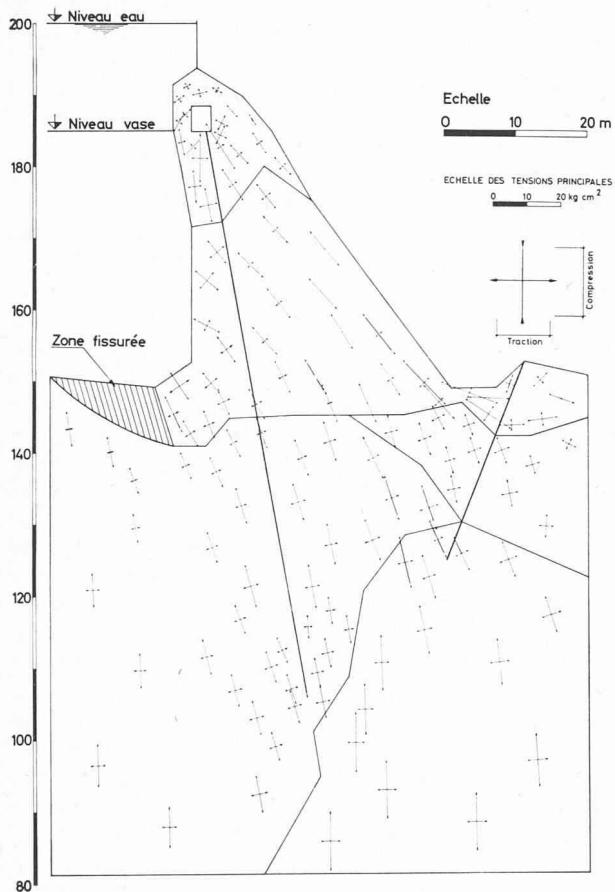


Fig. 18. — Barrage. Tensions principales et zone de fissuration. Lac plein.

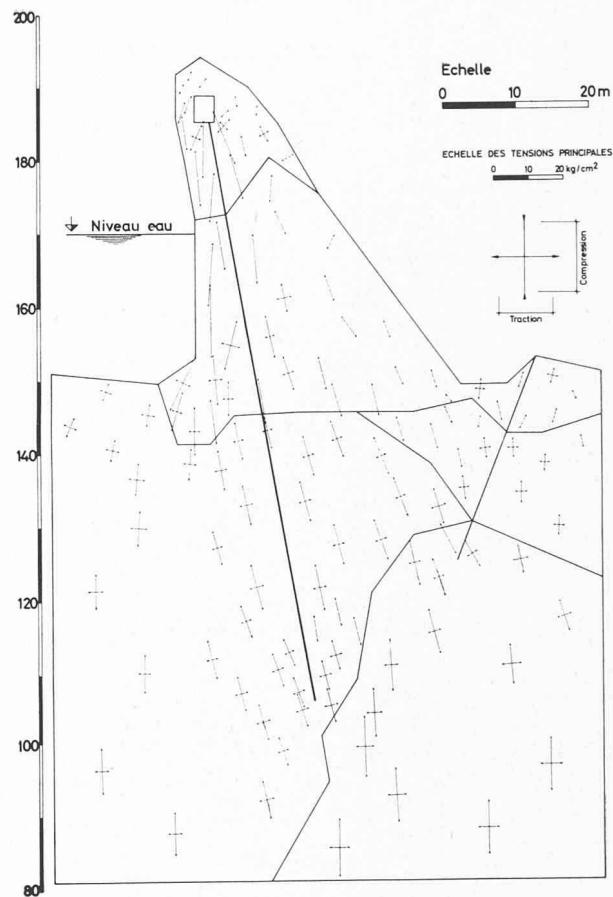


Fig. 19. — Barrage. Tensions principales. Lac vide.

#### 4.3 Tirant d'ancre dans un massif rocheux

Le tirant d'ancre du barrage cité au paragraphe précédent a été analysé en détail dans le but d'examiner les problèmes de profondeur d'ancre à prévoir sous le barrage et de la longueur de scellement à donner à cet ancre. Ces problèmes sont relativement complexes et des recherches dans ce domaine sont actuellement poursuivies au Laboratoire de géotechnique de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne par M. F. Descœudres, en collaboration avec le bureau d'études Bonnard & Gardel Ingénieurs-conseils SA. Nous nous limiterons ici à la description des résultats d'une analyse non linéaire que nous avons effectuée en collaboration avec le laboratoire cité ci-dessus et la Chaire d'aménagements de production d'énergie de l'EPFL.

Le réseau des éléments finis est présenté à la figure 20. Il comporte 165 éléments triangulaires et 12 éléments filiformes. Une zone d'environ 11 m de largeur et de 20 m de hauteur comportant un ancrage d'une longueur de 6 m a été analysée. La profondeur d'ancre peut être modifiée par l'application d'une surcharge uniforme correspondant au poids du terrain au-dessus de cette zone.

L'analyse dont les résultats sont décrits ici est effectuée pour le cas d'un ancrage scellé dans la plus mauvaise roche située sous le barrage. Il s'agit d'un schiste argileux dont les caractéristiques mécaniques ont été déterminées par des essais in situ et des essais triaxiaux. Les résultats sont résumés ci-après :

- résistance à la compression simple =  $17 \text{ kg/cm}^2$
- résistance à la traction simple =  $8 \text{ kg/cm}^2$
- module de compressibilité  $K = 4500 \text{ kg/cm}^2$
- coefficient initial de glissement =  $2000 \text{ kg/cm}^2$

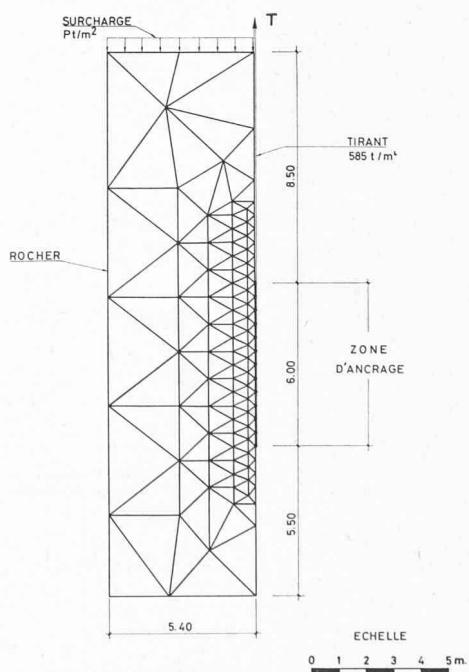


Fig. 20. — Tirant d'ancre. Réseau des éléments finis.

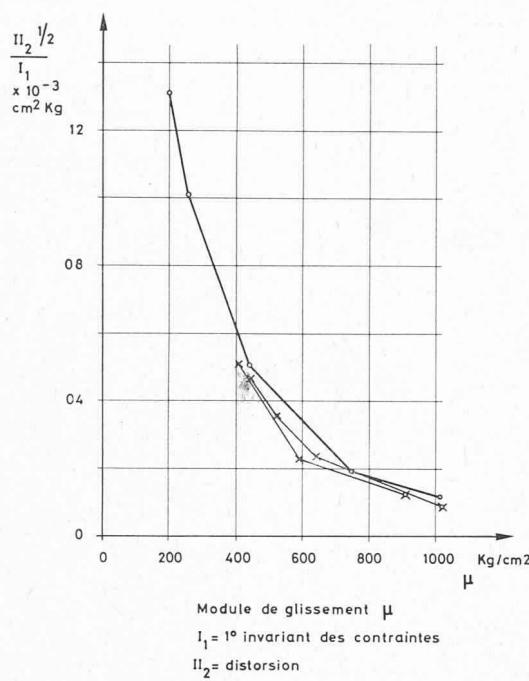


Fig. 21. — Loi de variation de  $\mu$  pour un schiste argileux d'après essais du Laboratoire géotechnique de l'EPFL.

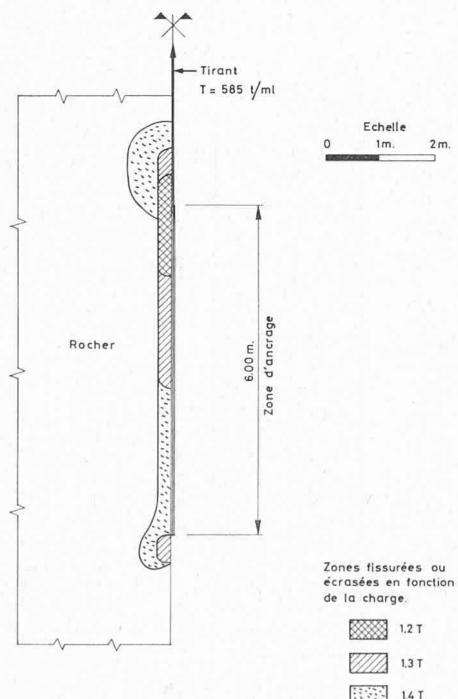


Fig. 22. — Zones fissurées ou écrasées en fonction de la force du tirant.

Le critère de Drucker [6] a été admis pour la surface de rupture qui est alors un cône défini par l'équation (6).

La loi de contrainte-déformation est du type donné par l'équation (12) et établie par des essais. La figure 21 qui la représente donne la variation du module de glissement  $\mu$  en fonction de la distorsion et de la pression moyenne.

Les calculs ont été effectués pour l'état de déformation plane. La force nominale du tirant de 585 t par mètre linéaire (perpendiculairement au plan de la figure) est d'abord appliquée puis augmentée par palier de 5 % environ jusqu'à la rupture de l'ancrage. La figure 22 présente les zones fissurées ou écrasées de la roche en fonction de la force dans le tirant. On constate que pour un facteur de charge de 1,2, la zone fissurée ou écrasée est limitée à une hauteur d'environ 2 m adjacente à la partie supérieure du tirant. Pour un facteur de charge de 1,3, cette zone progresse vers le haut, ainsi que vers le bas pour atteindre la moitié de la longueur du tirant. La fissuration commence également à l'extrémité inférieure du tirant pour ce facteur de charge. On peut considérer que la *rupture de l'ancrage est atteinte pour un facteur de 1,4* pour lequel il apparaît une zone fissurée ou écrasée tout autour de l'ancrage.

## 5. Conclusions

Le recours à l'ordinateur pour le calcul des structures dans le *domaine élastique* permet de résoudre économiquement un grand nombre de problèmes pratiques aussi bien des structures classiques que complexes.

Toutefois, l'étude qui précède montre qu'il est intéressant, voire indispensable dans certains cas, de faire un pas de plus et analyser les structures dans le domaine non linéaire pour évaluer, de façon plus précise, leur comportement sous les charges qui les sollicitent. Cette analyse permet également de déterminer directement le coefficient de sécurité à la rupture des structures. Il est clair qu'une meilleure connaissance de ce coefficient permettrait d'en proposer la diminution et, partant, de réduire le coût de l'ouvrage.

La méthode des éléments finis s'adapte bien pour les analyses non linéaires. Parmi les divers procédés utilisés pour introduire la non-linéarité des lois de contrainte-déformation dans les calculs, celui de *déformation initiales* semble être le plus satisfaisant si le problème n'est pas du domaine de plasticité parfaite.

Remarquons enfin que si la technique du calcul et de la programmation n'est pas sans complexité, l'important réside surtout dans les hypothèses relatives aux caractéristiques des matériaux et essentiellement de la loi de contrainte-déformation jusqu'à la rupture et de la définition du critère de rupture. Des recherches récentes [4, 5] ont permis de dégager des lois simplifiées pour certains matériaux. Ces recherches sont actuellement poursuivies, notamment à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, pour établir des lois plus précises de rupture et de contrainte-déformation pour les bétons ainsi que pour les sols. Un programme de calcul non linéaire des structures tridimensionnelles est également en cours d'élaboration. Nous sommes convaincus qu'il y a dans le domaine de mécanique des sols et des roches notamment un vaste champ d'application du calcul non linéaire par la méthode des éléments finis.

Adresse de l'auteur :

M. Hussain Khan, c/o Bonnard et Gardel, ingénieurs-conseils S.A.

10, av. de la Gare, 1000 Lausanne

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARGYRIS, J. H. : *Elasto-plastic Matrix Displacement Analysis of Three Dimensional Continua*. Journal of the Royal Aerospace Society. Vol. 69, p. 633-635, 1965.
- [2] ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K. : *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, p. 193-211. McGraw-Hill, 1967.
- [3] MARCAL, P. V. and KING, I. P. : *Elastic-plastic Analysis of Two Dimensional Stress Systems by Finite Element Method*. International Journal of Mechanical Sciences. Pergamon Press, vol. 9, p. 143-155, 1967.
- [4] SAUGY, B. : *Contribution à l'étude théorique du comportement non linéaire des structures massives en béton armé sous charges rapides*. Bulletin technique de la Suisse romande, n° 22, novembre 1969.
- [5] GIRIAVALLABHAN, C. V. and REESE, L. C. : *Finite Element Method for Problems in Soil Mechanics*. ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, p. 473-496, March 1968.
- [6] DRUCKER, D. C. and PRAGER, W. : *Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design*. Q. Appl. Math., vol. 10, p. 157-165, 1952.
- [7] HENDRON, A. J. : *Mechanical Properties of Rock*, ch. 2, p. 21-53 : « Rock Mechanics in Engineering Practice ». John Wiley & Sons, 1968.
- [8] WEIGLER, H. und BECKER, G. : *Untersuchungen über das Bruch- und Verformungsverhalten von Beton bei Zweiachs-*
- [9] DUNCAN, J. M. and CHANG, C. Y. : *Non linear Analysis of stress and strain in soils*. ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, vol. 96, p. 1629-1653, September 1970.
- [10] KONDNER, R. L. : *Hyperbolic Stress-Strain Reponse : Cohesive Soils*. ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, vol. 89, p. 115-143, SM1, 1963.
- [11] VALLIAPPAN, S. : *Non linear Stress Analysis of Two Dimensional Problems with Special Reference to Rock and Soil Mechanics*. Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea 1968.
- [12] ZIENKIEWICZ, O. C., VALLIAPPAN, S. & KING, I. P. : *Elasto-plastic Solutions of Engineering Problems « Initial Stress », Finite Element Approach*. Report C/R/88/68, University of Wales, Swansea, 1968.
- [13] HUSSAIN KHAN, M. and LAFITTE, R. : *Analysis of a cylindrical prestressed concrete pressure vessel with a large central penetration in the slab*. Nuclear Engineering and Design, n° 5, p. 191-198, 1967.
- [14] HUSSAIN KHAN, M. et SAUGY, B. : *Analyse non linéaire des contraintes dans le fût d'un caisson en béton précontraint pour réacteurs rapides*. Bulletin technique de la Suisse romande, n° 10, mai 1970.
- [15] HUSSAIN KHAN, M. and SAUGY, B. : *Evaluation of the Influence of Some Concrete Characteristics on Non-linear Behaviour of a PCRV*. ACI Seminar on Concrete for Nuclear Reactors, Berlin, October 1970.

## Bibliographies

### Realizzazioni italiane in cemento armato precompresso

**1966/70.** Volume réalisé par le Dr ing. Gaetano Bologna, avec la collaboration de Germana Bonelli et Galileo Tarantino. Supplément au numéro 6 de juin 1970 de la revue « L'Industria Italiana del Cemento ». — Un volume 22×31 cm, 356 pages, 384 photographies (dont 6 en couleurs), 376 dessins. Prix : relié, 15 dollars.

Cet intéressant volume a été édité à l'occasion du 6<sup>e</sup> Congrès international du béton précontraint de Prague, par l'AITEC (Associazione Italiana Tecnico Economica del Cemento). Les textes sont présentés en italien, en français et en anglais.

Il donne une vue d'ensemble des réalisations italiennes en béton précontraint les plus remarquables, exécutées au cours de la période comprise entre le 5<sup>e</sup> et le 6<sup>e</sup> Congrès de la Fédération internationale de la précontrainte, c'est-à-dire de 1966 à 1970. On y trouvera notamment la description de 31 ponts et viaducs, de 6 ouvrages divers et de 11 structures de bâtiments. Une étude est consacrée à la production en série.

### Architektur und das Phänomen des Wandels, par S. Giedion

Verlag Ernst Wasmuth, Tübingen 1969.

L'historien d'art bien connu Sigfried Giedion, décédé en 1968, n'a pu assister à la parution de son dernier ouvrage sur l'« Architecture et le phénomène de l'évolution ». Ses ouvrages sur « L'Architecture en France », « L'Eternel Présent » (Les Commencements de l'art, les Commencements de l'architecture) et le plus connu « Espace, Temps et Architecture », ses monographies sur Gropius et sur Utzon ont porté son renom à travers tous les pays du monde.

Dans le présent ouvrage, Giedion offre un aperçu sur trois conceptions de l'espace. La première, l'architecture conçue comme sculpture, comprend l'architecture égyptienne, sumérienne et grecque ; la seconde, l'architecture, espace intérieur, commence avec les voûtes de Campanie, système qui s'est répandu sur tout l'Empire romain ; la troisième, l'architecture sculpture et espace intérieur, n'a fait que s'esquisser au cours de notre siècle.

Giedion illustre d'une manière fort pertinente toutes les périodes de l'architecture et en décrit les méthodes de

construction et l'évolution des formes grâce auxquelles notre époque a trouvé son expression propre dans l'architecture.

Le choix des illustrations, qui sont dues en grande partie à l'auteur lui-même, apporte aux développements théoriques et critiques des images vivifiantes. Par tous ces ouvrages l'auteur s'est assuré, selon sa propre définition, une « éternelle présence ». H. R. V. d. M.

### Le Corbusier, volume 8: Les dernières œuvres, par Willy Boesiger

Les Editions d'architecture Artemis, Zurich 1970.

Lors de la publication du septième volume, l'éditeur d'alors, M. Girsberger, pensait que ce serait le dernier, la mort de Le Corbusier en 1965 ayant mis un terme à l'activité de cet architecte de génie. Entre-temps, un certain nombre de constructions et de projets ont été réalisés ou mis au point. Ce sont ces œuvres qui, admirablement présentées avec de riches illustrations, dont un grand nombre en couleurs, ce qui leur confère un éclat particulier, figurent au sommaire :

Firminy-Vert : Unité d'habitation, la Maison de la Culture, l'église, le stade.  
L'écluse de Kembs, en Alsace.  
Chandigarh : le Capitole, le Musée, la Tour des Ombres, les bâtiments annexes du palais de Justice, le club nautique, l'Ecole des beaux-arts, les habitations, les tapisseries dans les palais des Assemblées et de la Justice.  
Le nouvel hôpital de Venise.  
Le pavillon de Zurich.  
Le barrage de Bhakra, aux Indes.  
Le Musée du XX<sup>e</sup> siècle.  
Le texte du « testament spirituel ».  
L'hommage d'André Malraux lors des funérailles nationales.  
Un hommage à Pierre Jeanneret, son cousin et collaborateur durant de longues années.

Les œuvres de Le Corbusier excèdent le domaine de l'architecture et de l'urbanisme ; elles exaltent les qualités humaines et sont une glorification de l'être lorsqu'il vise à dépasser la condition terrestre.

Les éditeurs ont élevé, par la publication de l'œuvre complet, un monument magnifique et durable à la mémoire de notre grand compatriote adopté par la France.

H. R. V. d. M.