

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 97 (1971)
Heft: 21

Artikel: Stabilité élasto-plastique des cadres
Autor: Vinnakota, Sriramulu
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-71250>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Stabilité élasto-plastique des cadres¹

par SRIRAMULU VINNAKOTA, Dr ès sc.²

1. Généralités

L'utilisation des moyens modernes de calcul, tels que les ordinateurs, permet d'analyser des structures d'une façon précise et rapide. Cependant, les sciences de l'ingénieur sont liées intimement aux réalités physiques et industrielles et la précision maintenant possible dans les calculs pourrait être illusoire, si elle n'était pas liée aux conditions réelles des structures en question [1]³. La recherche [2] qui est à la base de ce résumé étudie, en serrant la réalité d'aussi près que possible, le comportement élasto-plastique des poutres-colonnes et des cadres plans jusqu'à ce que leurs charges ultimes soient atteintes.

2. Définition du problème

Les cadres plans envisagés sont constitués par des barres droites de section constante soumis à des forces situées dans ce plan. Les barres peuvent être reliées aux nœuds, qui sont considérés indéformables, soit par des assemblages rigides, soit par des articulations. Les charges sur le cadre peuvent agir au droit des nœuds, ou encore, sur les barres proprement dites; mais nous supposons que l'effort normal est constant le long de chaque barre entre les nœuds. Cette hypothèse ne diminue pas la généralité, car on peut introduire un nœud fictif dans toutes les sections où l'effort normal varie.

On utilise deux systèmes d'axes comme l'indique la figure 1. Le système d'axes $Y^0 Z^0$, dit système global, est utilisé pour la structure entière. Toute grandeur géo-

métrique ou physique liée au nœud est repérée par rapport à ce système global. En plus, un système d'axes YZ , dit système local, est lié à chaque barre. L'origine de ce système est attribuée arbitrairement à l'une des deux extrémités de la barre (désignée comme extrémité 1). L'axe Z coïncide avec l'axe longitudinal de la barre, et son sens positif est obtenu en parcourant la barre de son extrémité 1 à son extrémité 2. Sur les figures, ce sens sera indiqué par une flèche dessinée sur la barre. L'axe Y sera positif s'il coïncide avec l'axe Z après une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Les charges extérieures, les efforts tranchants, les efforts normaux et les déplacements sont tous considérés positifs s'ils ont la même direction que les axes. Les moments et les rotations sont considérés positifs dans le sens opposé au sens des aiguilles d'une montre.

Les charges considérées sont non proportionnelles. Chaque charge, Q par exemple, se compose de deux parties. Une partie, Q_c , caractérise la contribution des charges permanentes. Elle reste constante. L'autre partie, Q_v , représente la contribution des surcharges. Elle augmente proportionnellement à sa valeur initiale. Le coefficient λ , unique pour toutes les charges agissant sur le cadre, représente l'intensité de l'augmentation des surcharges.

Si l'on augmente progressivement le paramètre λ , le cadre se déforme d'abord élastiquement. Pour une valeur déterminée, λ_{el} , de λ , la limite élastique réduite⁴ est atteinte dans la fibre la plus sollicitée du cadre. La zone plastique se développe ensuite en profondeur et de part

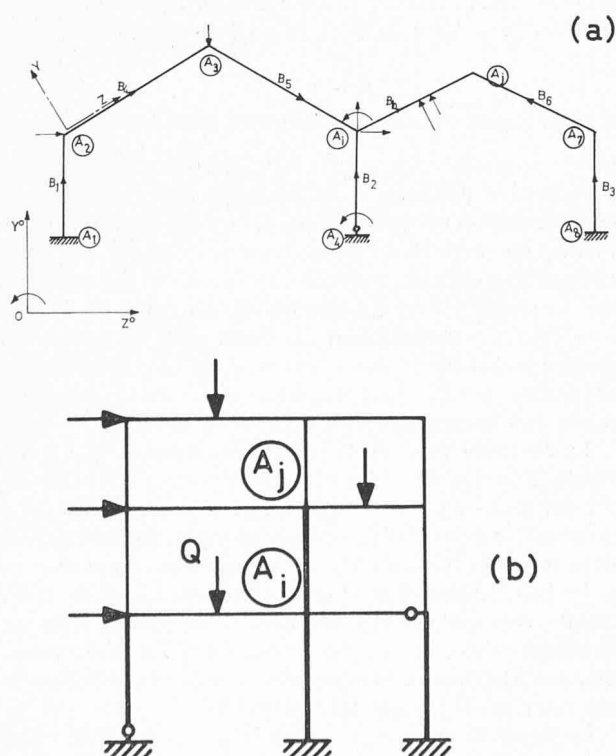


Fig. 1. — Cadres plans (désignation et sollicitation).

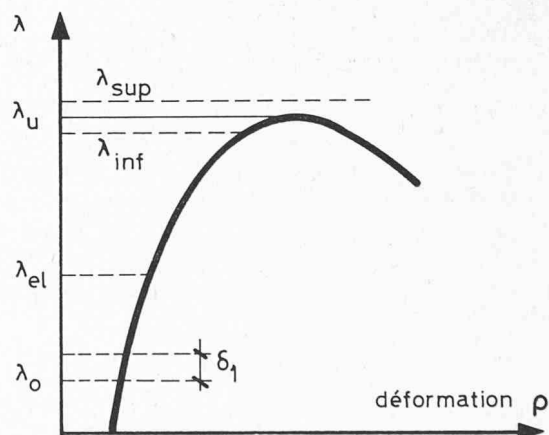


Fig. 2. — Courbe charges-déformations d'une structure.

¹ Conférence présentée à Lausanne, le 14 novembre 1970, dans le cadre des Journées d'études du *Groupe spécialisé des ponts et charpentes* de la Société suisse des ingénieurs et architectes.

² Chercheur, Institut de la Construction métallique de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, dirigé par le professeur J.-C. Badoux.

³ Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

⁴ C'est la limite élastique du matériel diminuée par la contrainte résiduelle.

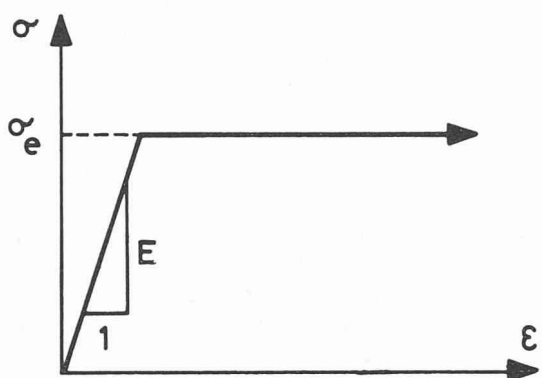


Fig. 3. — Diagramme de contraintes-dilatations du matériel.

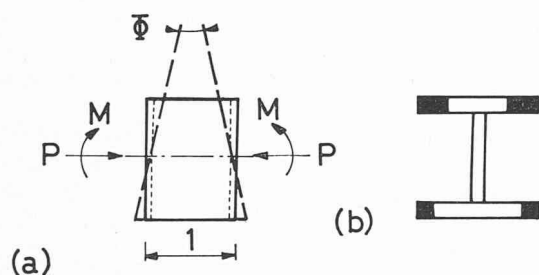


Fig. 4. — Etat de plastification d'un profil.

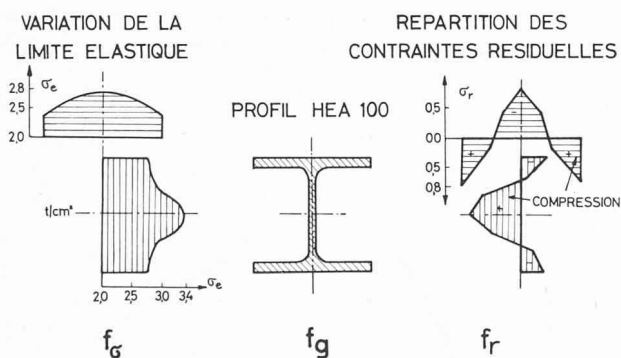


Fig. 5. — Diagrammes des limites élastiques et des contraintes résiduelles d'un profil.

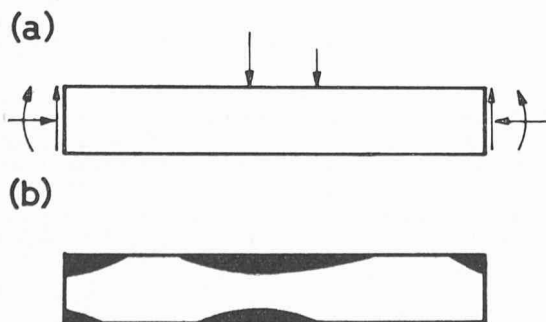


Fig. 6. — Etat de plastification d'une barre.

et d'autre de cette section. D'autres zones de plastification peuvent éventuellement se développer. Cette plastification réduit progressivement la rigidité du cadre, tandis que λ augmente toujours. La variation d'une déformation représentative ρ avec le paramètre λ a donc l'allure montrée sur la figure 2. λ passe par un maximum λ_u qui correspond à la capacité ultime du cadre et celui-ci périclète par excès de flexion.

Le phénomène étudié est donc le flambage par divergence dans le domaine élasto-plastique.

Cette étude est basée, entre autres, sur les hypothèses suivantes :

1. Les forces appliquées à la structure conservent leurs directions initiales ainsi que leurs points d'applications initiaux pendant le flambage.
2. Les déformations sont considérées comme petites.
3. Il n'y a nulle part inversion du sens des déformations plastiques.
4. Le cas de flambage étudié est celui du flambage par excès de flexion dans le plan du cadre. Il est supposé que le flambage spatial accompagné de torsion et le voilement local des parois sont empêchés.

Le comportement élasto-plastique d'un cadre dépend de celui des barres, qui le constituent. A son tour, le comportement d'une barre est influencé par le comportement élasto-plastique des profils. La suite de cet article est donc organisée comme suit :

La déformation élasto-plastique d'un profil soumis à un effort normal et à un moment de flexion, est considérée au paragraphe 3, où la notion de la rigidité équivalente d'une section partiellement plastifiée est introduite. Au paragraphe 4, nous donnons un résumé de la théorie nécessaire pour déterminer la déformée élasto-plastique d'une poutre-colonne. La déformée d'un cadre plan, sollicité dans le domaine élasto-plastique, est ensuite étudiée au paragraphe 5. Le flambage élasto-plastique par divergence est examiné dans le paragraphe 6. Enfin, nous donnons, dans le paragraphe 7, deux exemples numériques pour montrer la validité de la théorie développée.

3. Déformation élasto-plastique d'un profil

Les matériaux du cadre sont considérés « élastique-parfaitement plastique ». Ils possèdent chacun une limite d'élasticité σ_e et un module d'élasticité E (fig. 3). La figure 4a montre un profil de longueur unité sollicité par un effort normal P et par un moment de flexion M . La courbure qui en résulte est représentée par Φ . La figure 4b montre les zones de plastification éventuelles de ce profil. On remarque facilement que le profil réagit aux sollicitations indiquées, sur la figure 4a, avec une rigidité EI_{eq} plus petite que la rigidité élastique, EI , du profil.

La courbure Φ — ou la rigidité équivalente EI_{eq} — qui résulte d'un moment M et d'un effort normal P est influencée par tous les paramètres qui influencent la plastification du profil, à savoir, la répartition géométrique du matériel dans le profil (fonction f_g), la variation géographique de la limite élastique dans le profil (fonction f_e), et la répartition géographique des contraintes résiduelles dues au laminage ou soudage du profil (fonction f_r). A titre d'exemple, ces fonctions sont représentées à la figure 5 dans le cas d'un profil laminé HEA 100 [3].

La figure 6a montre une barre faisant partie d'un cadre et la figure 6b montre les zones éventuelles de plastification le long de cette barre. On constate que cette barre peut

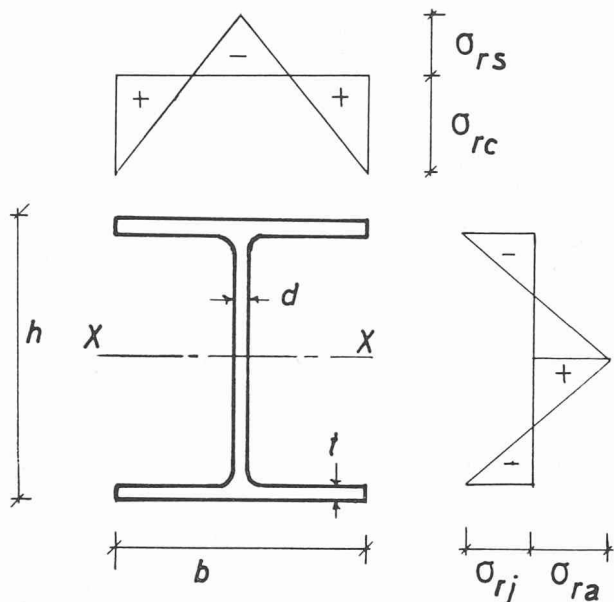


Fig. 7. — Répartition idéalisée des contraintes résiduelles.

être analysée comme une barre de section variable, où la rigidité élastique à chaque section est remplacée par sa rigidité équivalente. Le tableau I donne les formules pour évaluer la pente ψ et le déplacement v à l'abscisse z de la barre, à partir de la courbure Φ . A gauche, on a donné les relations valables pour les sections élastiques, et à droite, celles pour les sections partiellement plastifiées. On constate que les relations sont semblables dès que l'on a les moments d'inertie équivalents des sections plastifiées. Les relations $P-M-\Phi$ ou $P-M-EI_{eq}$ sont fondamentales pour les calculs de stabilité élasto-plastique des poutres-colonnes et des cadres.

TABLEAU I

	Section élastique	Section partiellement plastifiée
Courbure Φ	$= F(M)$ $= \frac{M}{EI}$	$= F(M, P, f_\sigma, f_g, f_r)$ $= \frac{M}{EI_{eq}}$
Pente ψ	$= \int \frac{M}{EI} dz$	$= \int \frac{M}{EI_{eq}} dz$
Déplacement v	$= \int \int \frac{M}{EI} dz dz$	$= \int \int \frac{M}{EI_{eq}} dz dz$

Les références [2], [4] permettent de tracer les courbes $P-M-EI_{eq}$ d'un profil en double té suivant l'hypothèse que les contraintes résiduelles varient bi-linéairement dans l'âme et dans les semelles (fig. 7); tandis que les références [5], [6] permettent de tracer ces courbes dans le cas d'une répartition quelconque des contraintes résiduelles et des limites élastiques (fig. 5).

A titre d'exemple, on a tracé sur la figure 8, les courbes $M-EI_{eq}$ pour différentes valeurs de l'effort normal P , pour un profil américain 8 WF 31 (\approx HEA 200). Les courbes continues sont valables pour un profil sans contraintes résiduelles ou pour un profil recuit. Les courbes en pointillés sont valables pour un profil laminé, compte tenu des contraintes résiduelles définies par $\sigma_{rc} = 0,3 \sigma_e$; $\sigma_{rs} = \sigma_{rj} = \sigma_{ra} = -0,191 \sigma_e$. Sur cette figure, P_p représente l'effort normal plastique et M_e le moment élastique maximum du profil sans contraintes résiduelles.

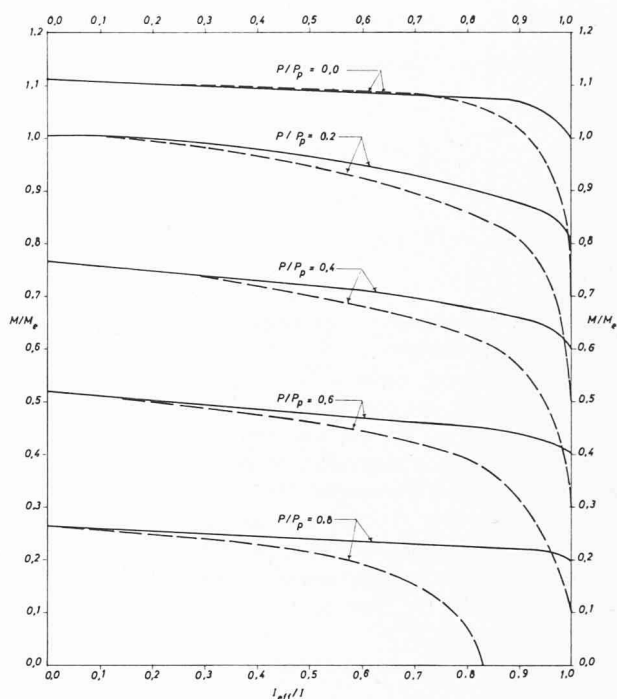


Fig. 8. — Courbes $P-M-EI_{eq}$ (sans dimensions).

4. Déformation élasto-plastique d'une barre

L'étude du comportement élasto-plastique d'une barre faisant partie d'un cadre — la barre $A_i A_j$ sur la figure 1b, par exemple — peut être ramenée à celle d'un sous-ensemble, composé de cette barre appuyée sur des ressorts rotationnels et directionnels à ses deux extrémités (fig. 9). L'appui rotationnel d'une extrémité représente la résistance des barres adjacentes à la rotation de l'extrémité considérée, tandis qu'un appui directionnel représente la résistance des barres adjacentes au déplacement transversal de l'extrémité en question. Ces ressorts sont considérés « élastique-parfaitement plastique ».

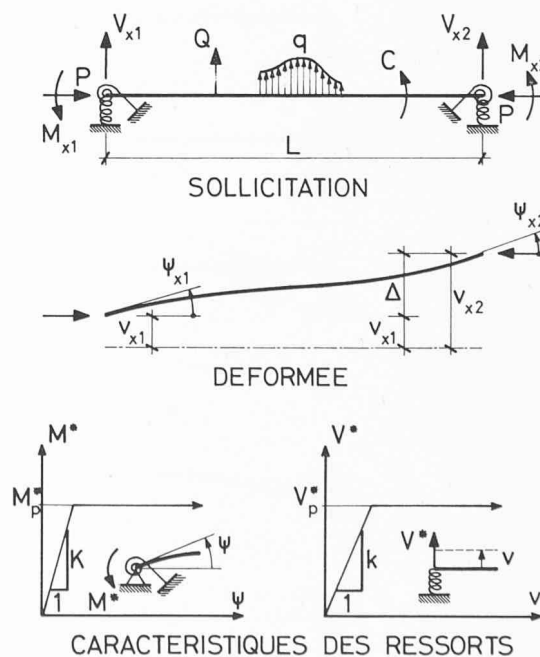


Fig. 9. — Poutre-colonne appuyée sur des ressorts et sa déformée.

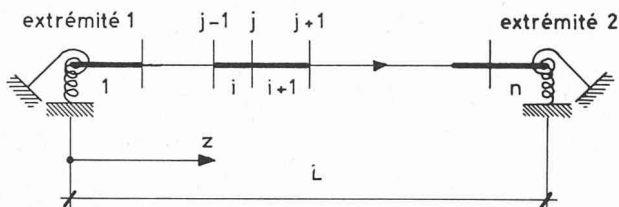


Fig. 10. — Désignation des segments et des jonctions.

Afin de déterminer la déformée de cette barre, on la partage en un certain nombre de segments, de longueur pas nécessairement égale, à l'intérieur desquels la rigidité équivalente peut être considérée constante à chaque niveau de sollicitation. (Cela est toujours possible à condition de prendre assez d'intervalles dans les parties fortement plastifiées. A titre d'exemple, les longueurs utilisées dans les références [2], [7], [8] variaient entre i_x et $4i_x$, où i_x est le rayon de giration du profil par rapport à son axe fort). On désigne, en partant de l'extrémité gauche de la barre (extrémité 1), par 1, 2, ..., i , $i+1$, ..., n les segments et par 1, 2, ..., j , ..., $n+1$ les jonctions, j étant la jonction des segments i et $i+1$ (fig. 10).

On définit un vecteur d'état S , d'ordre (5×1) , dont les éléments sont le déplacement v , la pente ψ , le moment M , l'effort tranchant V et l'unité. Ce dernier élément est introduit pour pouvoir inclure l'influence des charges transversales agissant sur la barre entre les extrémités.

Ainsi :

$$S = \{v \ \psi \ M \ V \ 1\} \quad (1)$$

Alors, on peut écrire sans grande difficulté, [7], [8], la relation matricielle :

$$S_2 = T_n G_n \dots T_{i+1} G_i T_i \dots G_2 T_1 S_1 \quad (2)$$

ou bien

$$S_2 = B S_1 \quad (3)$$

où :

S_1 est le vecteur d'état à l'extrémité 1 de la barre

S_2 est le vecteur d'état à l'extrémité 2 de la barre

T_i est la matrice de transmission, d'ordre (5×5) , qui lie le vecteur d'état de l'extrémité droite du segment i avec celui de son extrémité gauche

G_j est la matrice, d'ordre (5×5) , qui lie le vecteur d'état de l'extrémité gauche du segment $i+1$ avec celui de l'extrémité droite du segment i

B est la matrice de transmission de la barre élastoplastique liant les vecteurs d'état S_2 et S_1 .

Les conditions aux limites, existant effectivement sous la sollicitation considérée, fournissent à chaque extrémité deux grandeurs parmi les paramètres v , ψ , M , V de cette extrémité ou deux relations entre ces quatre paramètres s'il y a des ressorts non plastifiés. La figure 11 représente les neuf types d'appuis que l'on peut rencontrer aux extrémités d'une barre. Pour une combinaison quelconque de ces appuis et pour des conditions effectives à ces extrémités sous la sollicitation considérée, on peut aussi écrire la relation (3) comme suit :

$$AX = H \quad (4)$$

où X est le vecteur des quatre inconnues (deux à chaque extrémité). La solution de ce système est donnée par :

$$X = A^{-1} H \quad (5)$$

Connaissant le vecteur X , donc le vecteur d'état S_1 , on détermine par la méthode des paramètres initiaux, le déplacement, la pente, le moment et l'effort tranchant aux deux extrémités de chaque segment et finalement la rigidité équivalente de chaque segment. Les calculs de la déformée sont répétés avec ces nouvelles valeurs de rigidité, en introduisant les modifications éventuelles, dues à la plastification d'un ressort directionnel ou rotationnel ou, encore, dues à la formation d'une rotule plastique à une extrémité.

La déformée ainsi calculée est comparée à celle obtenue par le calcul précédent. Si la différence obtenue n'est pas négligeable, les calculs sont répétés avec les nouvelles valeurs des rigidités, jusqu'à ce qu'une convergence satisfaisante soit obtenue.

Une précision de $\pm 0,002$ à $\pm 0,005$ cm sur les déplacements est utilisée dans les exemples des références [2], [7], [8]. Dans ces calculs, on avait besoin de 3 à 5 cycles de calculs pour des valeurs de $\lambda \leq 0,90 \lambda_u$ et jusqu'à 8 cycles de calculs si $0,90 \lambda_u < \lambda < 0,95 \lambda_u$.

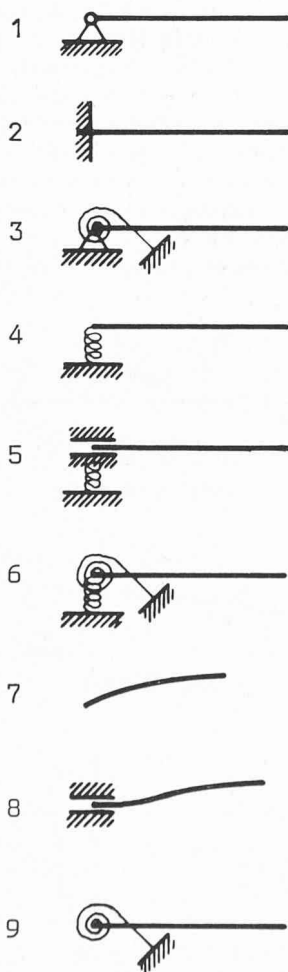


Fig. 11. — Types des conditions limites considérées.

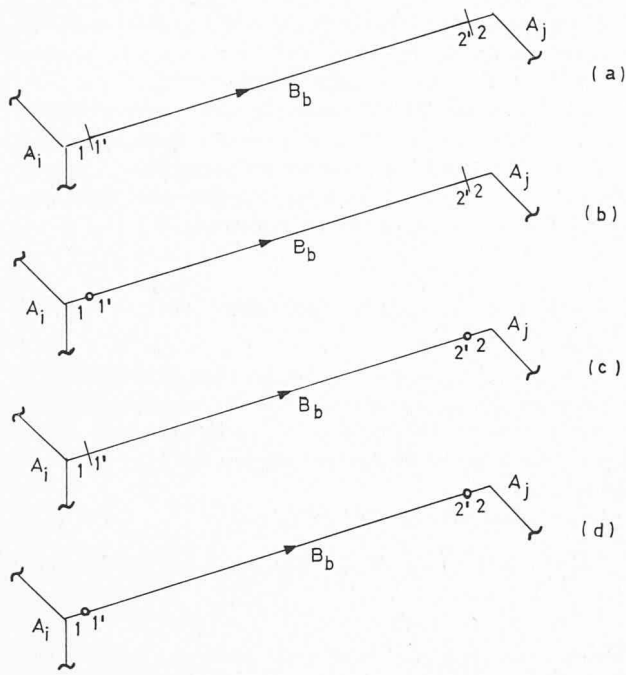


Fig. 12. — Types des liaisons d'extrémité d'une barre.

5. Déformation élasto-plastique d'une barre

Les calculs de la déformée d'un cadre, sous une sollicitation donnée, s'exécutent de la façon suivante:

1. On calcule d'abord les matrices de rigidité de chacune des barres dans le système local des coordonnées YZ . Ces matrices permettent d'exprimer les forces internes agissant aux extrémités d'une barre en fonction des déformations de ces extrémités et des charges extérieures propres à cette barre.
2. On transforme ces matrices de rigidité relatives à chaque barre suivant le système global des coordonnées $Y^o Z^o$.
3. En assemblant ces matrices d'après la géométrie du cadre, on obtient la matrice de rigidité du cadre partiellement plastifié.
4. La résolution de la matrice de rigidité du cadre nous donne sa déformée.

5.1 Matrices de rigidité d'une barre dans le système local YZ

Considérons une barre B_b liant les nœuds A_i et A_j du cadre (fig. 1). Nous supposons que la sollicitation entraîne une plastification de certaines parties de cette barre et donne éventuellement naissance à des rotules plastiques aux extrémités. Nous admettons, dans ce paragraphe, que l'état de plastification des sections de cette barre est connu.

Il y a lieu d'examiner quatre cas de liaisons des extrémités de cette barre comme l'indique la figure 12 :

- Cas a) La barre est rigidement liée aux nœuds à ses deux extrémités (fig. 12a).
- Cas b) La liaison d'extrémité 2' au nœud A_j est rigide tandis que la liaison entre l'extrémité 1' de la barre et le nœud A_i est constituée par une rotule mécanique ou plastique (fig. 12b).
- Cas c) La liaison d'extrémité 1' au nœud A_i est rigide tandis que la liaison entre l'extrémité 2' de la barre et le nœud A_j est constituée par une rotule (fig. 12c).

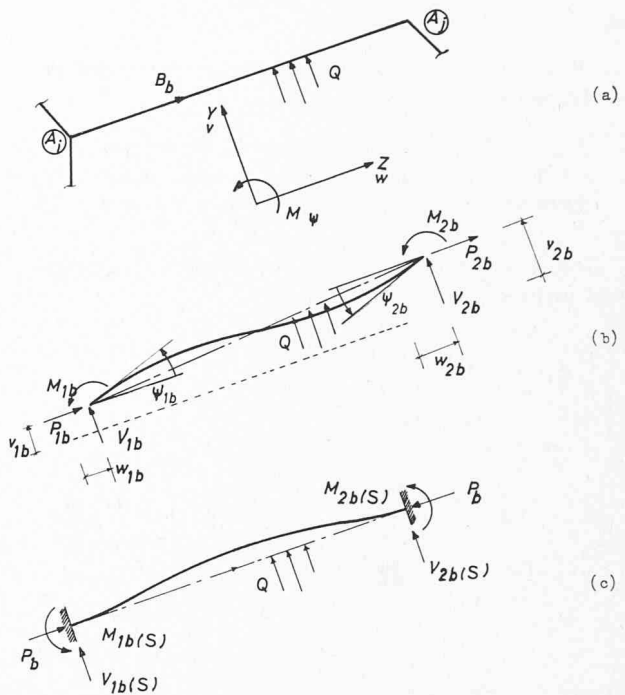


Fig. 13. — Forces et déformations aux extrémités d'une barre (système local).

Cas d) Les liaisons des deux extrémités sont constituées par des rotules (fig. 12d).

Les discontinuités — rotules mécaniques ou plastiques — sont supposées voisines des nœuds. Dans le cas où une rotule plastique se forme loin des nœuds, on ajoute un nœud fictif infiniment voisin de cette rotule plastique. Les notations montrées sur la figure 12 permettent de distinguer les moments de part et d'autre des discontinuités. Ainsi, l'extrémité 1' de la barre B_b est supposée reliée au nœud A_i par un segment $A_i 1'$ de longueur infiniment petite. Si la liaison d'extrémité est rigide $\psi_{1'b} = \psi_{1b}$ et $M_{1'b} = M_{1b}$. Ces deux relations sont remplacées, dans le cas d'une liaison constituée par une rotule ($\psi_{1'b} \neq \psi_{1b}$), par les deux relations $M_{1'b} = M_{x1'b}$ et $M_{1b} = M_{x1b}$. Ici, $M_{x1'b}$ et M_{x1b} sont des moments imposés. Dans le cas d'une rotule mécanique, ces moments sont des grandeurs données ($M_{x1b} = 0$ en général), tandis que dans le cas d'une rotule plastique ils sont égaux au moment plastique $M_{p(P)}$ ¹ en valeur absolue et leur signe est donné par celui de la rotation ψ_{1b} .

Soient F_{1b} et F_{2b} les vecteurs des forces agissant aux points 1 et 2 représentés par (fig. 13) :

$$F_{1b} = \{P_{1b} \ V_{1b} \ M_{1b}\} \quad F_{2b} = \{P_{2b} \ V_{2b} \ M_{2b}\} \quad (6)$$

Soient également D_{1b} et D_{2b} les vecteurs des déformations de ces extrémités :

$$D_{1b} = \{w_{1b} \ v_{1b} \ \psi_{1b}\} \quad D_{2b} = \{w_{2b} \ v_{2b} \ \psi_{2b}\} \quad (7)$$

Ces vecteurs des forces et des déformations sont reliés par les relations matricielles :

$$\begin{aligned} F_{1b} &= \hat{R}_{11} D_{1b} + \hat{R}_{12} D_{2b} + F_{1b(S)} \\ F_{2b} &= \hat{R}_{21} D_{1b} + \hat{R}_{22} D_{2b} + F_{2b(S)} \end{aligned} \quad (8)$$

¹ C'est le moment plastique d'un profil modifié pour la présence de l'effort normal P .

où

- \hat{R}_{11} , \hat{R}_{12} , \hat{R}_{21} , \hat{R}_{22} sont les matrices de rigidité de la barre (système local) ;
- $F_{1b(S)}$ et $F_{2b(S)}$ sont les vecteurs des forces qui reflètent l'influence des charges extérieures agissant sur la barre entre ses extrémités, sur les vecteurs F_{1b} et F_{2b} .

Dans leur forme développée, les relations (8) se présentent comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P \\ V \\ M \end{bmatrix}_{1b} &= \begin{bmatrix} \hat{r}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{r}_{22} & \hat{r}_{23} \\ 0 & \hat{r}_{32} & \hat{r}_{33} \end{bmatrix}_{11} \begin{bmatrix} w \\ v \\ \psi \end{bmatrix}_{1b} + \\ &+ \begin{bmatrix} \hat{r}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{r}_{22} & \hat{r}_{23} \\ 0 & \hat{r}_{32} & \hat{r}_{33} \end{bmatrix}_{12} \begin{bmatrix} w \\ v \\ \psi \end{bmatrix}_{2b} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}_{1b(S)} \\ (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P \\ V \\ M \end{bmatrix}_{2b} &= \begin{bmatrix} \hat{r}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{r}_{22} & \hat{r}_{23} \\ 0 & \hat{r}_{32} & \hat{r}_{33} \end{bmatrix}_{21} \begin{bmatrix} w \\ v \\ \psi \end{bmatrix}_{1b} + \\ &+ \begin{bmatrix} \hat{r}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{r}_{22} & \hat{r}_{23} \\ 0 & \hat{r}_{32} & \hat{r}_{33} \end{bmatrix}_{22} \begin{bmatrix} w \\ v \\ \psi \end{bmatrix}_{2b} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}_{2b(S)} \end{aligned}$$

On constate facilement que les éléments des matrices \hat{R} , à l'état de plastification considéré, peuvent être identifiés et calculés comme les efforts qui naissent aux extrémités de la barre en posant successivement une des déformations (parmi v_{1b} , w_{1b} , ψ_{1b} , v_{2b} , w_{2b} , et ψ_{2b}) égale à l'unité, toutes les autres étant nulles. Les forces extérieures agissant sur la barre n'interviennent pas dans ces calculs. A titre d'exemple, les éléments $(\hat{r}_{23})_{11}$, $(\hat{r}_{23})_{21}$, $(\hat{r}_{33})_{11}$ et $(\hat{r}_{33})_{21}$ sont respectivement les forces transversales V_{1b} et V_{2b} et les moments M_{1b} et M_{2b} qui résultent d'une rotation unitaire de l'extrémité 1 ; c'est-à-dire $\psi_{1b} = 1$; $v_{1b} = v_{2b} = w_{1b} = w_{2b} = \psi_{2b} = 0$.

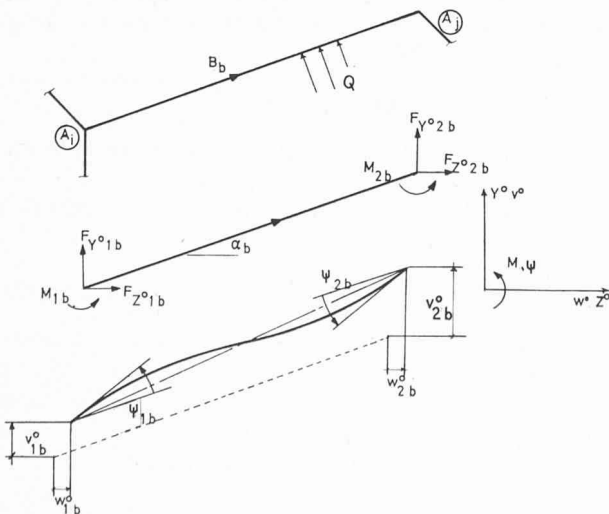


Fig. 14. — Forces et déformations aux extrémités d'une barre (système global).

Les éléments des vecteurs $F_{1b(S)}$ et $F_{2b(S)}$ sont les efforts aux extrémités de la barre sous les charges extérieures toutes les déformations étant empêchées (fig. 13 c).

Dans le cas où il y a des rotules plastiques ou mécaniques, on doit tenir compte de leur présence dans les calculs ci-dessus. La théorie développée au paragraphe 4 permet d'évaluer ces éléments d'une façon rationnelle. Pour plus de détails, il faut consulter la référence [2].

5.2 Matrice de rigidité d'une barre dans le système global $Y^0 Z^0$

Dans les relations (8), les forces et les déformations se rapportent toutes au système local de coordonnées de la barre. Soient F_{1b}^0 , F_{2b}^0 , D_{1b}^0 et D_{2b}^0 les composantes de ces forces et de ces déformations suivant les axes $Y^0 Z^0$ du système global.

On a d'après la figure 14 :

$$F_{1b}^0 = \{F_{Z^0 1b} F_{Y^0 1b} M_{1b}\} \quad F_{2b}^0 = \{F_{Z^0 2b} F_{Y^0 2b} M_{2b}\} \quad (10)$$

$$D_{1b}^0 = \{w_{1b}^0 v_{1b}^0 \psi_{1b}^0\} \quad D_{2b}^0 = \{w_{2b}^0 v_{2b}^0 \psi_{2b}^0\} \quad (11)$$

Soit α_b l'angle que fait l'axe Z de la barre avec l'axe Z^0 . Soit T_b la matrice de transfert des axes, définie par :

$$T_b = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \\ -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

En résolvant les vecteurs des forces F_{1b} , F_{2b} et les vecteurs des déformations D_{1b} et D_{2b} suivant les axes Y^0 et Z^0 et en y introduisant les notations :

$$R_{11}^0 = T_b^{-1} \hat{R}_{11} T_b \quad R_{12}^0 = T_b^{-1} \hat{R}_{12} T_b \quad F_{1b(S)}^0 = T_b^{-1} F_{1b(S)} \quad (13)$$

$$R_{21}^0 = T_b^{-1} \hat{R}_{21} T_b \quad R_{22}^0 = T_b^{-1} \hat{R}_{22} T_b \quad F_{2b(S)}^0 = T_b^{-1} F_{2b(S)}$$

on obtient, d'après les relations (8), les équations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} F_{1b}^0 &= R_{11}^0 D_{1b}^0 + R_{12}^0 D_{2b}^0 + F_{1b(S)}^0 \\ F_{2b}^0 &= R_{21}^0 D_{1b}^0 + R_{22}^0 D_{2b}^0 + F_{2b(S)}^0 \end{aligned} \quad (14)$$

Ces équations peuvent encore être simplifiées comme suit :

Désignons par τ l'extrémité voisine du nœud en étude, η étant le numéro de l'autre extrémité. Par exemple, sur la figure 12, nous avons pour le nœud A_i , $\tau = 1$, $\eta = 2$ tandis que pour le nœud A_j , $\tau = 2$ et $\eta = 1$. Les équations (14) se réduisent donc à la seule relation :

$$F_{\tau b}^0 = R_{\tau\tau}^0 D_{\tau b}^0 + R_{\tau\eta}^0 D_{\eta b}^0 + F_{\tau b(S)}^0 \quad (15)$$

5.3 Matrice de rigidité du cadre et sa déformée

Soit un nœud quelconque (A_i par exemple) du cadre plan représenté sur la figure 1a. La déformation de ce nœud peut être représentée par une matrice colonne D_i^0 dont les trois composantes sont les déplacements v_i^0 , w_i^0 suivant les axes Y^0 respectivement Z^0 et la rotation ψ_i .

Considérons une barre B_b dont l'extrémité τ est liée au nœud A_i , l'autre extrémité η étant liée au nœud A_j . Les forces internes $F_{\tau b}^0$ à l'extrémité τ de la barre B_b , par rapport aux axes $Y^0 Z^0$, sont données par l'équation (15). Cette barre exerce donc sur le nœud A_i un système de forces dont les éléments de réduction, par rapport aux axes $Y^0 Z^0$, forment une matrice colonne $-F_{\tau b}^0$. Nous

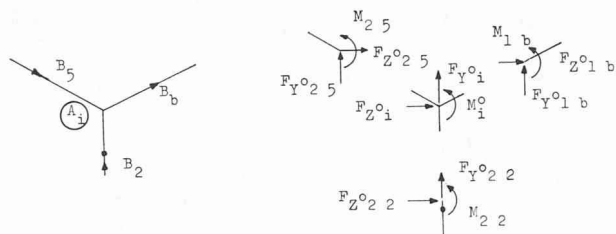


Fig. 15. — Equilibre d'un nœud.

avons donc des équations analogues pour toutes les autres barres qui convergent au nœud A_i (fig. 15). Si F_i^0 est la matrice colonne des forces extérieures agissant sur ce nœud, alors l'équilibre des forces agissant au nœud A_i s'exprime par l'équation :

$$F_i^0 - \sum_b F_{\tau b}^0 = 0 \quad (16)$$

dans laquelle la somme s'étend à toutes les barres B_b dont une extrémité τ est liée au nœud A_i .

La condition de compatibilité des déformations, au nœud A_i , s'exprime par :

$$D_i^0 = D_{\tau b}^0 = \dots \quad (17)$$

A l'aide des relations (15) et (17), l'équation (16) devient :

$$\left[\sum_b R_{\tau\tau}^0 \right] D_i^0 + \sum_j R_{\tau\eta}^0 D_j^0 = F_i^0 - \sum_b F_{\tau b(s)}^0 \quad (18)$$

que l'on peut écrire sous forme :

$$R_{ii} D_i^0 + \sum_j R_{ij} D_j^0 = F_i \quad (19)$$

L'équation d'équilibre ci-dessus, qui a été écrite pour le nœud A_i seul, peut aussi l'être pour les autres nœuds de la structure. Nous obtenons ainsi autant d'équations que de nœuds, c'est-à-dire d'inconnues D_i^0 .

Les équations (19) peuvent encore être condensées. Supposons que le nombre de nœuds soit égal à N . Désignons par D et F les matrices colonnes :

$$D = \{D_1^0 D_2^0 \dots D_i^0 \dots D_N^0\} \quad (20)$$

$$F = \{F_1 F_2 \dots F_i \dots F_N\} \quad (21)$$

et par R la matrice carrée d'ordre $3N$:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1i} & \dots & R_{1j} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2i} & \dots & R_{2j} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{i1} & R_{i2} & \dots & R_{ii} & \dots & R_{ij} & \dots & R_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{j1} & R_{j2} & \dots & R_{ji} & \dots & R_{jj} & \dots & R_{jN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{Ni} & \dots & R_{Nj} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \quad (22)$$

R est la matrice de rigidité du cadre sous la sollicitation donnée. Dans l'expression (22) de cette matrice, l'élément R_{ij} doit être pris égal à zéro si les nœuds A_i et A_j ne sont pas reliés par une barre. Les équations (19) écrites pour $i = 1, 2, \dots, N$ se réduisent donc à la seule équation matricielle :

$$RD = F \quad (23)$$

Dans le cas où l'une, deux ou toutes les trois composantes des déformations d'un nœud sont empêchées, on apporte les modifications nécessaires dans la matrice R et le vecteur F . Par exemple, si le déplacement horizontal du nœud A_i est empêché (c'est-à-dire $w_i^0 = 0$ ou l'élément d_{3i-2} du vecteur D est égal à zéro), on fait :

$$\begin{aligned} r_{3i-2,k} &= 0 & \text{pour tous } k \neq 3i-2 \\ r_{k,3i-2} &= 0 & \text{pour tous } k \neq 3i-2 \\ f_{3i-2} &= 0. \end{aligned}$$

Le vecteur des déformations D s'obtient par la résolution du système (23) ainsi modifié. On a, en effet

$$D = R^{-1} F \quad (24)$$

Possédant les déformations des nœuds définies par le vecteur D , on calcule les moments, les forces longitudinales et transversales agissant aux extrémités de chaque barre à l'aide des équations (8). Connaissant ces grandeurs, on calcule les moments de flexion et l'effort normal aux extrémités de chaque segment de chaque barre, à l'aide de la théorie développée sous paragraphe 4. De ces valeurs on détermine, à l'aide des courbes $P-M-EI_{eq}$ décrites au paragraphe 3, les rigidités effectives dans chaque segment.

On répète les calculs de la déformée du cadre avec ces nouvelles valeurs des rigidités. On répète ces calculs jusqu'à ce qu'ils convergent avec une précision voulue.

6. Flambage élasto-plastique par divergence

La théorie, exposée dans les paragraphes précédents, permet de déterminer la déformée d'une poutre-colonne ou d'un cadre sous une charge donnée. En répétant ces calculs pour des valeurs croissantes de la charge extérieure, on arrive à la charge ultime de la structure, au-delà de laquelle les calculs ne convergent plus.

Marche à suivre pour le calcul de la charge ultime λ_u :

1. On commence les calculs avec une valeur initiale de $\lambda = \lambda_0$ qui est plus petite que la valeur ultime cherchée. En pratique λ_0 est choisi de sorte que la structure (le cadre ou la barre en question) soit partout dans le domaine élastique. Ainsi, les calculs peuvent être commencés avec les rigidités élastiques.
2. On détermine la déformée de la structure sous la sollicitation λ considérée, en utilisant la théorie donnée sous paragraphe 4, si c'est une barre ; ou la théorie donnée sous paragraphe 5, si c'est un cadre.
3. Puis, λ est augmenté par étapes de δ_1 et le calcul indiqué ci-dessus est répété, jusqu'à ce que l'on arrive à des valeurs $\lambda = \lambda_{inf}$ et $\lambda = \lambda_{sup}$ différentes de la valeur δ_1 , de sorte que
pour λ_{inf} les calculs convergent
pour λ_{sup} les calculs divergent.
Ceci indique que la charge ultime de la structure se situe entre λ_{inf} et λ_{sup} (fig. 2).
4. On continue les calculs au-delà de la valeur λ_{inf} avec des accroissements réduits $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_m$ (avec $\delta_m < \dots < \delta_2 < \delta_1$), pour améliorer l'exactitude dans la détermination de la charge ultime.
5. On trouve ainsi les valeurs raffinées de λ_{inf} et λ_{sup} différentes de δ_m . λ_u est alors pris égal à $(\lambda_{inf} + \lambda_{sup})/2$.

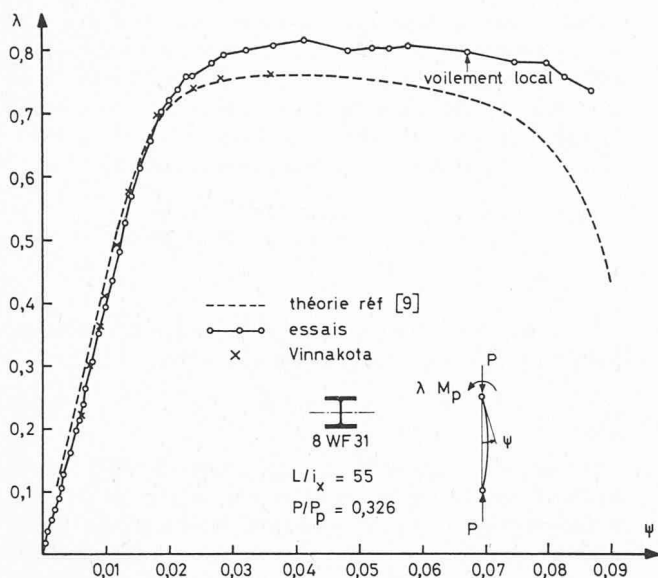


Fig. 16. — Exemple 1 : Poutre-colonne.

Il est recommandé, avant de commencer les calculs ci-dessus, d'effectuer une analyse plastique (du 1^{er} ordre) de la structure pour déterminer λ_p . Ce calcul facilitera le choix des grandeurs $\lambda_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$.

7. Exemples d'application

La méthode qui vient d'être exposée est utilisée, dans les références [2], [7], [8], pour évaluer les charges ultimes et les caractéristiques charges-déformations des nombreuses poutres-colonnes et des cadres. Ces résultats sont ensuite confrontés avec ceux des théories antérieures et avec ceux des nombreux essais sur modèles, de grandeur nature, effectués à l'université Lehigh aux Etats-Unis. Cette comparaison a montré que la méthode développée donne, avec une précision satisfaisante, non seulement la charge ultime des poutres-colonnes et des cadres, mais également les relations charges-déformations jusqu'à la rupture; ceci dans tous les cas où les conditions des structures correspondent aux hypothèses de l'étude.

Dans ce qui suit, on donnera deux exemples numériques qui ont fait l'objet d'essais à Lehigh. Tout d'abord, on étudiera une poutre-colonne articulée à ses deux extrémités et puis un cadre plan non-contreventé d'un seul étage. On comparera les solutions numériques aux résultats expérimentaux de Lehigh.

7.1 Poutre-colonne articulée à ses extrémités

Cet essai a été exécuté sur une colonne d'élancement 55, composée d'un profil 8 WF 31 (\approx HEA 200) en acier doux A 7 (\approx Ac 37). Elle était articulée à ses deux extrémités et guidée latéralement en son milieu pour éviter le déversement. En plus d'un effort normal P , la colonne était soumise à un moment λM_p à l'une de ses extrémités. Le plan de ce moment coïncidait avec le plan de l'âme du profil. La charge axiale de $0,326 P_p$ fut maintenue constante pendant l'essai, tandis que l'on fit croître le moment de zéro à sa valeur maximum. On a observé que la colonne a effectivement péri par excès de flexion.

Les contraintes résiduelles dans le profil ont été mesurées et leurs effets inclus dans les calculs théoriques. Le diagramme moments-rotations relatif à cet essai est confronté sur la figure 16, avec ceux, tirés de la référence [9] et déduits de la présente étude.

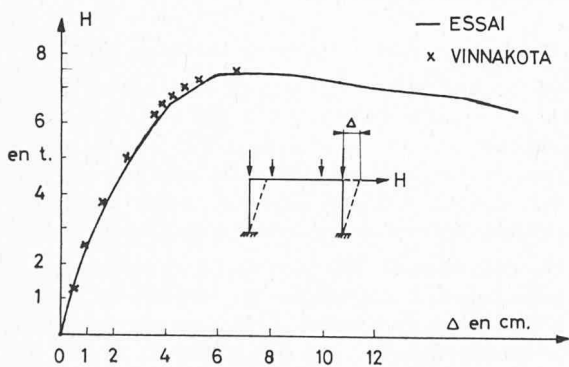
On constate que l'accord entre les résultats de la présente étude et l'étude théorique de la référence [9] est très bon, tandis que l'accord avec l'essai est bon.

7.2 Cadre rectangulaire

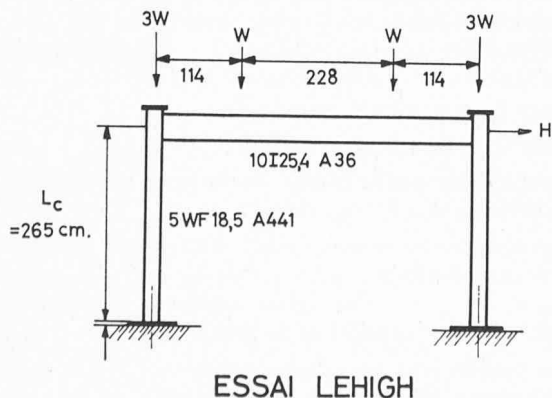
Le cadre rectangulaire choisi a une hauteur d'environ 2,65 m et une portée d'environ 4,56 m. La poutre horizontale est constituée d'un profil américain 10 I 25,4 (\approx IPER 240), tandis que les colonnes sont faites de profils américains 5 WF 18,5 (\approx HEB 200). Les colonnes sont en acier à haute résistance A 441 (\approx Ac 52), tandis que la poutre horizontale est en acier de construction A 36 (\approx Ac 37). Les charges verticales sont laissées constantes, à la valeur $W = 9$ tonnes, tandis que la charge horizontale H est augmentée de façon continue et progressive.

La courbe charges-déformations d'après l'essai est montrée sur la figure 17. Sur la même figure, on a montré les points obtenus d'après la présente étude. L'accord entre la théorie et l'essai est de nouveau satisfaisant.

FLAMBAGE D'UN CADRE NON-CONTREVENTE



COURBE CHARGE-DEFORMATION



ESSAI LEHIGH

Fig. 17. — Exemple 2 : Cadre rectangulaire non-contreventé.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie M. le professeur J.-C. Badoux, EPFL, pour son aide précieuse lors de la préparation de cet article. Ses remerciements vont également à M. A. Perret, assistant à l'ICOM, qui a aidé à la rédaction de cet article, M. M. Fiaux, qui a préparé les dessins et M^{lle} C. Dubois qui a dactylographié le texte.

Adresse de l'auteur :

S. Vinnakota, Institut de la Construction métallique de l'Ecole polytechnique fédérale, 9, ch. des Délices, 1006 Lausanne.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SFINTESCO, D. : *Calcul des constructions métalliques, tendances actuelles dans les règles européennes*. Construction Métallique n° 1, mars 1967.
- [2] VINNAKOTA, S. : *Flambage des cadres dans le domaine élasto-plastique*. Thèse EPFL, 1967.
- [3] CAMPUS, F. et MASSONNET, CH. : *Recherches sur le flambement de colonnes en acier A37, à profil en double té, sollicitées obliquement*. Bull. CERES, Liège, Vol. VII, 1955.
- [4] KETTER, R. L., KAMINSKY, E. L. et BEEDLE, L. S. : *Plastic Deformation of Wide-Flange Beam-Columns*. Trans. ASCE, Vol. 120, p. 1028, 1955.
- [5] VINNAKOTA, S. et BADOUX, J.-C. : *Comportement élasto-plastique des profilés symétriques* (en préparation).
- [6] PARIKH, B. P. : *Elastic-Plastic Analysis and Design of Unbraced Multistory Frames*. Thèse Lehigh University, 1966.
- [7] VINNAKOTA, S. et BADOUX, J.-C. : *Flambage élasto-plastique des poutres-colonnes appuyées sur des ressorts*. Construction Métallique, Vol. 2, juin 1970.
- [8] VINNAKOTA, S. et BADOUX, J.-C. : *Strength of Laterally Loaded Restrained Beam-Columns*. Transactions, Institution of Engineers, Australia, Octobre 1971.
- [9] GALAMBOS, T. V. et LAY, M. G. : *End Moment-End Rotation Characteristics for Beam-Columns*. Fritz Engineering Laboratory Report, n° 205A.35.
- [10] ADAMS, P. F. : *Plastic Design in High Strength Steel*. FLR. n° 297.19, 1966.

L'évacuation d'immeubles en cas d'urgence

par REMO A. SPEHLER, Stäfa, et WERNER G. PEISSARD, Zurich

Introduction

Chaque fois qu'un incendie éclate dans un immeuble où se trouve un public nombreux, on se pose de nouveau la question combien de temps il faudrait compter pour évacuer la maison entièrement occupée. Ce problème ne concerne pas seulement les grands magasins et les centres d'achats, mais également les dancings, les discothèques, les salles de théâtre et de concerts etc. Ce rapport a pour but d'examiner les expériences faites et les réflexions qui en découlent, afin de créer les fondements théoriques déterminant les données architecturales et influençant l'ensemble des installations nécessaires à permettre une évacuation rapide sans panique. Dans ce sens, les spécialistes sont tous d'accord que nulle alerte aussi immédiate soit-elle ne contribue d'une façon décisive au succès de l'évacuation. Pour en illustrer toutes les éventualités, nous avons choisi l'exemple d'un grand magasin.

Une conflagration dans un immeuble occupé par un grand nombre de personnes pose toujours le problème d'une évacuation assez rapide. Ce problème ne saurait être résolu par des réflexions faites après coup au sujet de ce que tel et tel avait fait faux ou négligé de faire. Il n'y a qu'un seul point de départ valable : s'il faut faire sortir à temps une foule donnée, c'est-à-dire dans un délai fixe, il faut que l'on dispose de chemins d'évacuation suffisamment larges et nombreux, et sans obstacles. Il va de soi qu'il faut veiller à ce que les sorties de secours puissent être facilement ouvertes par n'importe qui et qu'elles ne soient pas encombrées de dehors, de sorte que les foules puissent se disperser rapidement. Mais il est tout aussi important de tenir compte du fait que, même en cas d'urgence, une foule ne s'achemine vers les sorties de secours qu'après un certain temps de réaction. Mentionnons en passant que pendant cette phase, la fumée peut très bien produire une panique.

Notre étude a pour but d'éclaircir combien de temps il faut pour évacuer, en cas d'urgence, un immeuble encombré d'une grande foule. Nous essayerons de trouver une formule simple et universellement valable, basée sur des réflexions tenant compte du temps d'évacuation tout entier. Les

données qui en résulteront devront permettre un examen logique et conséquent de l'organisation d'alarme, des possibilités d'évacuation et des autres mesures de sécurité existantes.

Il faudra surtout examiner les conditions dans les grands magasins et les établissements à self-service où le désir d'accroître le chiffre d'affaires et le besoin de sécurité adéquate se contestent mutuellement les zones de ventes plus intensives, et où les stands temporairement arrangés au milieu des chemins d'évacuation sont à l'ordre du jour.

Nous examinerons donc en premier lieu l'évacuation de personnes non handicapées qui sont en mesure de se sauver elles-mêmes. Nos réflexions sont, en partie, également valables pour l'évacuation de foyers et d'hôpitaux, à condition qu'on tienne compte de prémisses et notamment de délais différents.

Phase d'évacuation

La phase d'évacuation dans son ensemble se compose de quatre facteurs qui peuvent être clairement distingués. La nécessité d'une évacuation est presque toujours la consé-

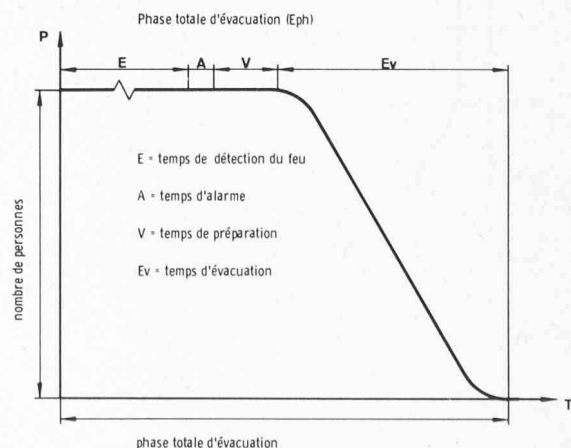


Fig. 1.