Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 97 (1971)

Heft: 20

Artikel: Contribution au dimensionnement des ponts-biais continus à rigidité torsionnelle de Saint-Venant négligeable et à travées d'inertie variable: calcul des efforts intérieurs et des réactions d'appuis à l'aide de l'ordinateur

Autor: Jaccoud, Jean-Paul / Badoux, Jean-Claude

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-71249

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Contribution au dimensionnement des ponts-biais continus à rigidité torsionnelle de Saint-Venant négligeable et à travées d'inertie variable[1]

Calcul des efforts intérieurs et des réactions d'appuis à l'aide de l'ordinateur

par JEAN-PAUL JACCOUD, ing. EPFL, et JEAN-CLAUDE BADOUX, Dr. sc., professeur à l'EPFL

Introduction et sommaire

Dans le cadre des travaux de l'*Institut de la Construction métallique (ICOM)*, nous avons dû à plusieurs reprises examiner le problème de l'influence du biais des appuis sur le dimensionnement d'un pont à une ou plusieurs travées. Le tracé des voies de communication au-dessus d'obstacles naturels tels que les rivières ou au-dessus de constructions existantes, telles que routes, voies ferrées ou bâtiments, impose souvent l'implantation de piles, palées ou culées, biaises par rapport à l'axe longitudinal des ouvrages d'art. L'ingénieur projeteur de tels ouvrages est donc fréquemment amené à résoudre le problème de l'influence du biais des appuis sur la structure, tant du point de vue des efforts intérieurs et des réactions d'appuis, que du point de vue des contraintes.

Dans cet article, nous présentons plus spécialement une méthode de calcul des efforts et des réactions d'appuis pour un pont-biais à section transversale ouverte à deux poutres-maîtresses et à plusieurs travées. Cette méthode a été développée à partir de l'excellent ouvrage de Kollbrunner et Basler [2],[2] dont la traduction en français est parue depuis peu, et qui traite entre autres du calcul des ponts-biais d'inertie constante en torsion non uniforme pure. Nous avons utilisé le même modèle de calcul que dans la réf. [2] : soit la barre prismatique à parois minces, à section transversale ouverte et indéformable, à rigidité torsionnelle de Saint-Venant nulle ou négligeable. Moyennant certaines approximations, nous avons développé et étendu l'application de ce modèle de calcul au cas de ponts à inertie variable.

Au sommaire de cet article, tout d'abord quelques rappels ou notions sur la coordonnée sectorielle, le gauchissement et le bimoment de torsion, ainsi que sur le calcul des contraintes dans les sections ; ensuite, nous traitons la statique de la barre prismatique et du pont-biais en torsion non uniforme pure, puis nous donnons quelques éléments sur l'établissement de notre programme de calcul des efforts intérieurs et des réactions d'appuis, ainsi que sa description et ses règles d'emploi ; finalement, nous présentons un exemple du dimensionnement d'un pont-biais à trois travées inégales d'inertie variable, avec biais différents des appuis.

[1] Cet article reprend le sujet d'une conférence donnée en novembre 1970 sous le titre « Dimensionnement des ponts mixtes biais à l'aide de l'ordinateur et d'un approfondissement de certaines données de statique et de résistance des matériaux » dans le cadre des journées d'études organisées par le *Groupe spécialisé des ponts et charpentes* de la Société suisse des ingénieurs et architectes (SIA).

[2] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie de fin d'article.

1. Coordonnée sectorielle

Section droite d'un profil ouvert à parois minces (fig. 1) :

C = centre de gravité de la section ;

D = centre de cisaillement ou centre de rotation ;

s = abscisse curviligne sur le contour de la section à partir d'une origine O quelconque ;

t = épaisseur des parois ;

dA = $t \cdot ds$;

ρ_D = distance de D à la tangente au contour en A ;

$d\omega$ = $d\Omega = \rho_D \cdot ds$ = deux fois l'aire du secteur $(AA'D)$.

Définition de la coordonnée sectorielle du point A d'abscisse s :

$$\Omega = \int_0^s d\Omega = \int_0^s \rho_D \cdot ds \qquad (1.1)$$

La coordonnée sectorielle a donc la dimension d'une aire : cm² ou m².

Définition de la coordonnée sectorielle normalisée ω : (Normalisation = translation du point origine des coordonnées de manière que le moment statique sectoriel de la section tout entière soit nul.)

$$\omega = \Omega - \frac{\int_s \Omega dA}{A} \qquad (1.2)$$

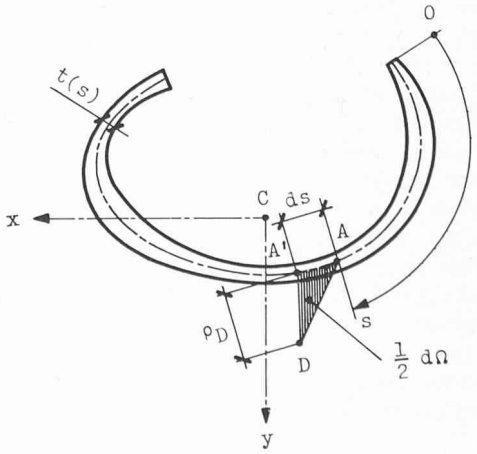


Fig. 1. — Section droite d'un profil ouvert à parois minces.

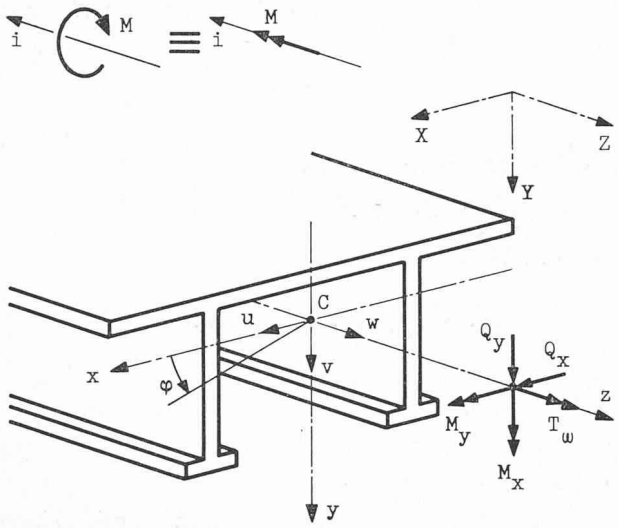


Fig. 2. — Systèmes d'axes de référence et déformations. Convention de signes des efforts et déformations.

2. Caractéristiques statiques de la section

Considérons le cas d'un profil possédant un axe de symétrie (fig. 2). Si le système d'axes de référence x, y, z est principal d'inertie, les grandeurs statiques suivantes sont suffisantes.

Moments statiques du 1er ordre :

$$S_x = \int_o^s x \cdot dA \ [\text{cm}^3]\,; \quad S_y = \int_o^s y \cdot dA \ [\text{cm}^3]\,;$$
$$S_w = \int \omega \cdot dA \ [\text{cm}^4]$$

Moments statiques du 2e ordre :

$I_{xx} = \int_A x^2\, dA = -\int_s S_x \cdot dx \ [\text{cm}^4]$ moments d'inertie de flexion

$I_{yy} = \int_A y^2\, dA = -\int_s S_y \cdot dy \ [\text{cm}^4]$

$I_{\omega\omega} = \int_A \omega^2\, dA = -\int_s S_\omega \cdot d\omega \ [\text{cm}^6]$ moment d'inertie sectoriel

Remarque : les notations adoptées dans le présent article sont celles des références [2] et [5].

3. Notion de gauchissement — bimoment de torsion

Soit un profilé ouvert à parois minces, à rigidité de torsion uniforme nulle ou négligeable, encastré parfaitement à l'une de ses extrémités et soumis à un moment de torsion extérieur M_D à son autre extrémité, libre (fig. 3 a).

En torsion non uniforme pure, le moment de torsion intérieur T_ω dans une section droite quelconque d'une barre (fig. 3 a), est repris par un couple d'efforts tranchants Q, égaux et opposés, dans les deux ailes du profil (fig. 3 b). Sous l'effet de ce couple de forces Q, chaque aile fléchit, l'une vers le bas et l'autre vers le haut. A ce couple d'efforts tranchants Q correspond dans les ailes un couple de moments M, égaux et opposés (fig. 3 a). La résultante statique de ce couple de moments est nulle dans chaque section. Le bimoment de torsion M_ω dans la section considérée désigne l'ensemble de ces deux moments M égaux et opposés. Le bimoment est donc l'effort intérieur qui provoque le gauchissement des sections.

Ces quelques lignes suffisent pour justifier les termes de « torsion fléchie » ou de « flexion antimétrique » que l'on emploie parfois en lieu et place de torsion non uniforme.

La flexion antimétrique des deux ailes du profil (fig. 3 a) entraîne, sous l'effet du bimoment M_ω, une distorsion

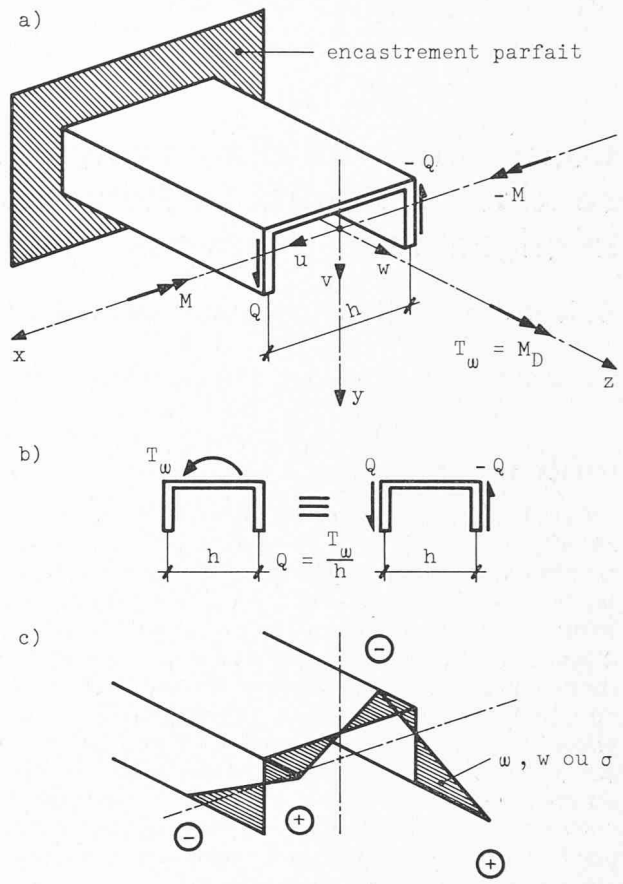


Fig. 3. — Gauchissement d'un profil soumis à un moment de torsion.

de la section transversale initialement plane : c'est ce que l'on appelle le gauchissement de la section. Il peut être représenté visuellement à l'aide du diagramme des coordonnées sectorielles ω, du diagramme des déformations w de la section hors de son plan ou du diagramme des contraintes normales longitudinales σ, les trois grandeurs ω, w et σ étant proportionnelles dans une section considérée (fig. 3 c).

4. Analogie des équations différentielles de la flexion et de la torsion non uniforme pure — calcul des contraintes

On peut montrer que l'équation différentielle de la déformée en torsion non uniforme pure, grâce à la notation définie ci-dessus, est analogue à l'équation différentielle de la déformée en flexion pure.

Les définitions des systèmes d'axes, des déformations et des efforts conventionnellement positifs sont données à la figure 2. Rappelons que les axes x, y, z sont principaux d'inertie (voir tableau 1).

Contraintes dans le cas général : Flexion + Torsion non uniforme pure :

$$\sigma = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot x + \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot y + \frac{M_\omega}{I_{\omega\omega}} \cdot \omega$$
$$q = \tau \cdot t = -\frac{Q_x}{I_{xx}} \cdot S_x - \frac{Q_y}{I_{yy}} \cdot S_y - \frac{T_\omega}{I_{\omega\omega}} \cdot S_\omega \qquad (4.5)$$

Les équations (4.5) ne sont valables que dans le cas où le système d'axes x, y, z est principal d'inertie. Dans le cas contraire, on trouvera des équations analogues plus compliquées dans l'ouvrage de Kollbrunner/Basler [2].

TABLEAU 1
Calcul des contraintes

Flexion	Torsion non uniforme pure
Loi des sections planes : $w = -u'X - v'Y + w_0(z)$	Loi du gauchissement linéaire des sections : $w = -\varphi'\Omega + w_0(z)$
Loi de Hooke : $\sigma = E\dfrac{\partial w}{\partial z}$	Loi de Hooke : $\sigma = E\dfrac{\partial w}{\partial z}$
Normalisation des coordonnées : $x = X - \dfrac{\int_A X\,dA}{A}$ et $y = Y - \dfrac{\int_A Y\,dA}{A}$	Normalisation des coordonnées : $\omega = \Omega - \dfrac{\int_A \Omega\,dA}{A}$
Des lois de Hooke, des sections planes et des conditions d'équilibre, on tire : $\sigma = -Eu''x - Ev''y$	Des lois de Hooke, du gauchissement linéaire des sections et des conditions d'équilibre, on tire : $\sigma = -E\,\varphi''\,\omega$
$u'' = -\dfrac{M_x}{EI_{xx}}$ et $v'' = -\dfrac{M_y}{EI_{yy}}$ (4.1)	$\varphi'' = -\dfrac{M_\omega}{EI_{\omega\omega}}$ (4.1)
M_x et M_y = moments de flexion [tm] (fig. 2)	M_ω = bimoment de torsion [tm^2] (fig. 2)
$\sigma = \dfrac{M_x}{I_{xx}}x + \dfrac{M_y}{I_{yy}}y$ (4.2)	$\sigma = \dfrac{M_\omega}{I_{\omega\omega}}\omega$ (4.2)
Efforts tranchants : $Q_x = \dfrac{dM_x}{dz}$ et $Q_y = \dfrac{dM_y}{dz}$ (4.3)	Moment de torsion : $T_\omega = \dfrac{dM_\omega}{dz}$ [tm] (4.3)
Flux de cisaillement : $q = \tau t$	Flux de cisaillement : $q = \tau t$
t = épaisseur des parois	t = épaisseur des parois
$q = -\dfrac{Q_x}{I_{xx}}S_x - \dfrac{Q_y}{I_{yy}}S_y$ (4.4)	$q = -\dfrac{T_\omega}{I_{\omega\omega}}S_\omega$ (4.4)

Dans chacune des équations (4.5), les deux premiers termes sont ceux bien connus dus à la flexion, tandis que le dernier terme, de forme tout à fait semblable, représente l'influence de la torsion non uniforme pure.

Les efforts intérieurs étant connus, on peut aisément calculer les contraintes en n'importe quel point d'une section transversale à l'aide des équations (4.5). Les caractéristiques des sections (I_{xx}, I_{yy}, $I_{\omega\omega}$), ainsi que des points où l'on calcule les contraintes (x, y, ω, S_x, S_y, S_ω) à introduire dans ces équations, sont définies au paragraphe 2.

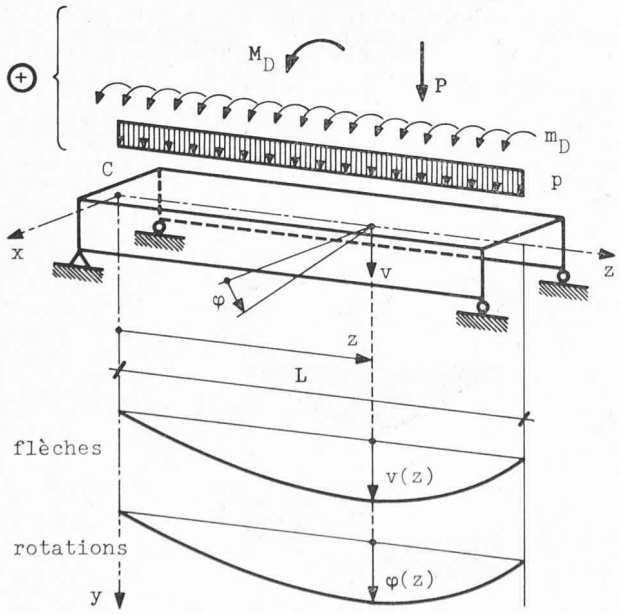


Fig. 4. — Déformée d'une poutre.

Mentionnons qu'un programme, élaboré par M. P.-A. Eperon, ing. EPUL-SIA, et disponible à l'ICOM, permet de calculer électroniquement toutes les caractéristiques statiques nécessaires d'une section ouverte de forme quelconque (Programme CME 2).

5. Statique de la torsion non uniforme. Analogie avec la statique de la flexion

5.1 *Poutre simple* (fig. 4 et tableau 3).

Les diagrammes des efforts intérieurs dans le cas de la poutre simple sont représentés sur la figure 5.

TABLEAU 2
Analogie de la statique de la torsion et de la flexion

Flexion	Torsion non uniforme pure
Charge répartie : $p = p_y$	Moment tordant réparti (extérieur) : m_D
Charge concentrée : $P = P_y$	Moment tordant concentré : M_D
Flèche : v	Rotation : φ
v'	φ'
Moment : $M_y = -EI_{yy}\,v''$	Bimoment : $M_\omega = -EI_{\omega\omega}\,\varphi''$
Effort tranchant : $Q_y = M_y'$	Moment de torsion intérieur : $T_\omega = M_\omega'$
$p_y = -Q_y' = EI_{yy}\,v'''$	$m_D = -T_\omega' = EI_{\omega\omega}\,\varphi'''$

TABLEAU 3

Cas de la poutre simple

Flexion	Torsion non uniforme pure
$v(z=0) = 0$ $v(z=L) = 0$ $M_y(z=0) = 0$ $M_y(z=L) = 0$	$\varphi(z=0) = 0$ $\varphi(z=L) = 0$ $M_\omega(z=0) = 0$ appuis à fourche $M_\omega(z=L) = 0$
Charge répartie uniformément :	Moment tordant réparti uniformément :
$v_{max} = \frac{5}{384}\frac{p_y L^4}{EI_{yy}}$ [cm]	$\varphi_{max} = \frac{5}{384}\frac{m_D L^4}{EI_{\omega\omega}}$ [radian]
$M_{ymax} = \frac{p_y L^2}{8}$ [tm] (5.1)	$M_{\omega max} = \frac{m_D L^2}{8}$ [tm²] (5.1)
$Q_{ymax} = \pm \frac{p_y L}{2}$ [t] (5.2)	$T_{\omega max} = \pm \frac{m_D L}{2}$ [tm] (5.2)
Charge concentrée à mi-portée :	Moment tordant concentré à mi-portée :
$v_{max} = \frac{P_y L^3}{48\, EI_{yy}}$	$\varphi_{max} = \frac{M_D L^3}{48\, EI_{\omega\omega}}$
$M_{ymax} = \frac{P_y L}{4}$ (5.3)	$M_{\omega max} = \frac{M_D L}{4}$ (5.3)
$Q_{ymax} = \pm \frac{P_y}{2}$ (5.4)	$T_{\omega max} = \pm \frac{M_D}{2}$ (5.4)

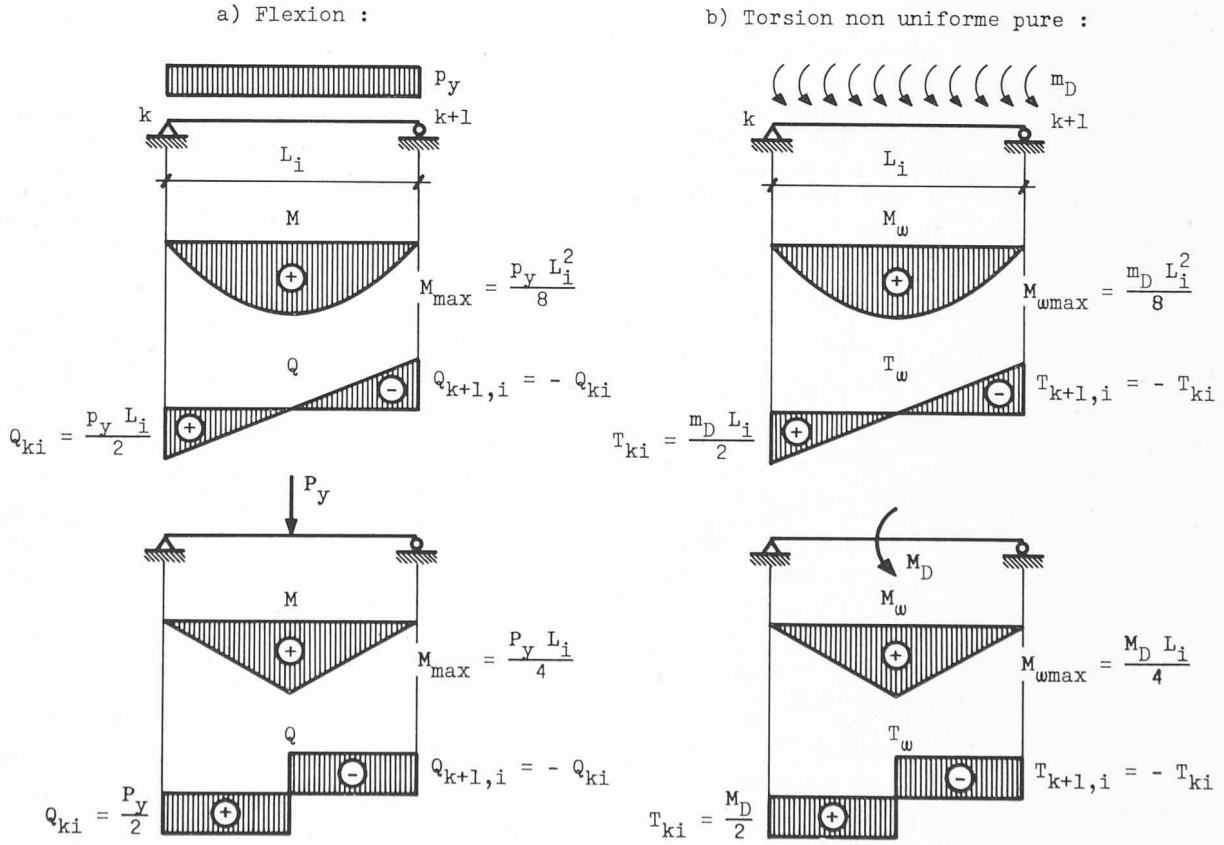


Fig. 5. — Diagrammes des efforts intérieurs dans la poutre simple.

TABLEAU 4

Cas de la poutre continue

Flexion	Torsion non uniforme pure
$v(z_i = 0) = 0$ $v(z_i = L_i) = 0$ On pose : $\alpha_i = v'(z_i = 0)$ $\beta_i = -v'(z_i = L_i)$ Compatibilité des déformations : (fig. 6a) $\beta_{i-1} + \alpha_i = 0$ (5.6) $\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{ik} M_{ki} + \alpha_{i,\,k+1} M_{k+1,\,i}$ (5.7) où : M_{ki} et $M_{k+1,\,i}$ = moment de continuité en k et $k+1$ α_{ik} = pente en k due à un moment unitaire en k $\alpha_{i,\,k+1}$ = pente en k due à un moment unitaire en $k+1$ α_{i0} = pente en k due aux charges extérieures sur la travée i isostatique de même : $\beta_i = \beta_{i0} + \beta_{ik} M_{ki} + \beta_{i,\,k+1} M_{k+1,\,i}$ (5.8)	$\varphi(z_i = 0) = 0$ $\varphi(z_i = L_i) = 0$ On pose : $a_i = \varphi'(z_i = 0)$ $b_i = -\varphi'(z_i = L_i)$ Compatibilité des déformations : (fig. 6b) $b_{i-1} + a_i = 0$ (5.6) $a_i = a_{i0} + a_{ik} X_{ki} + a_{i,\,k+1} X_{k+1,\,i}$ (5.7) où : X_{ki} et $X_{k+1,\,i}$ = bimoments de continuité en k et $k+1$ a_{ik} = gauchissement en k dû à un bimoment unitaire en k $a_{i,\,k+1}$ = gauchissement en k dû à un bimoment unitaire en $k+1$ a_{i0} = gauchissement en k dû aux moments extérieurs sur la travée i isostatique (moments tordants) de même : $b_i = b_{i0} + b_{ik} X_{ki} + b_{i,\,k+1} X_{k+1,\,i}$ (5.8)

5.2 *Poutre continue* (fig. 6 et tableau 4).

Si l'on remplace α_i, β_{i-1}, a_i et b_{i-1} dans les équations (5.6) par leurs valeurs données dans les équations (5.7) et (5.8), on obtient une équation « des trois moments » pour la flexion et une équation analogue « des trois bimoments » pour la torsion non uniforme pure. On peut donc résoudre un système hyperstatique en torsion non uniforme pure par les mêmes méthodes statiques que l'on utilise dans le cas de systèmes hyperstatiques en flexion.

5.3 *Cas particuliers de la poutre continue d'inertie constante* (fig. 6 et tableau 5).

6. Ponts-biais en torsion non uniforme pure

6.1 *Hypothèses*

a) La rigidité de torsion uniforme ou torsion de Saint-Venant est négligeable par rapport à la rigidité de torsion non uniforme ou de gauchissement.

$$GK \ll E\,I_{\omega\omega}$$

b) La section transversale est indéformable. Le pont porte ses charges à la manière d'une poutre rigide et non pas à la manière d'une ossature plissée.

c) Le décalage des appuis en élévation est petit vis-à-vis de la longueur des travées.

TABLEAU 5

Poutre continue d'inertie constante

Flexion	Torsion non uniforme pure
$\alpha_{ik} = \beta_{i,\,k+1} = \dfrac{L_i}{3\,EI_{yy}}$ $\alpha_{i,\,k+1} = \beta_{ik} = \dfrac{L_i}{6\,EI_{yy}}$ Charge uniformément répartie : $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = \dfrac{p_y\,L_i^3}{24\,EI_{yy}}$ Charge concentrée à mi-portée : $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = \dfrac{P_y\,L_i^2}{16\,EI_{yy}}$	$a_{ik} = b_{i,\,k+1} = \dfrac{L_i}{3\,EI_{\omega\omega}}$ $a_{i,\,k+1} = b_{ik} = \dfrac{L_i}{6\,EI_{\omega\omega}}$ Moment tordant uniformément réparti : $a_{i0} = b_{i0} = \dfrac{m_D\,L_i^3}{24\,EI_{\omega\omega}}$ Moment tordant concentré à mi-portée : $a_{i0} = b_{i0} = \dfrac{M_D\,L_i^2}{16\,EI_{\omega\omega}}$

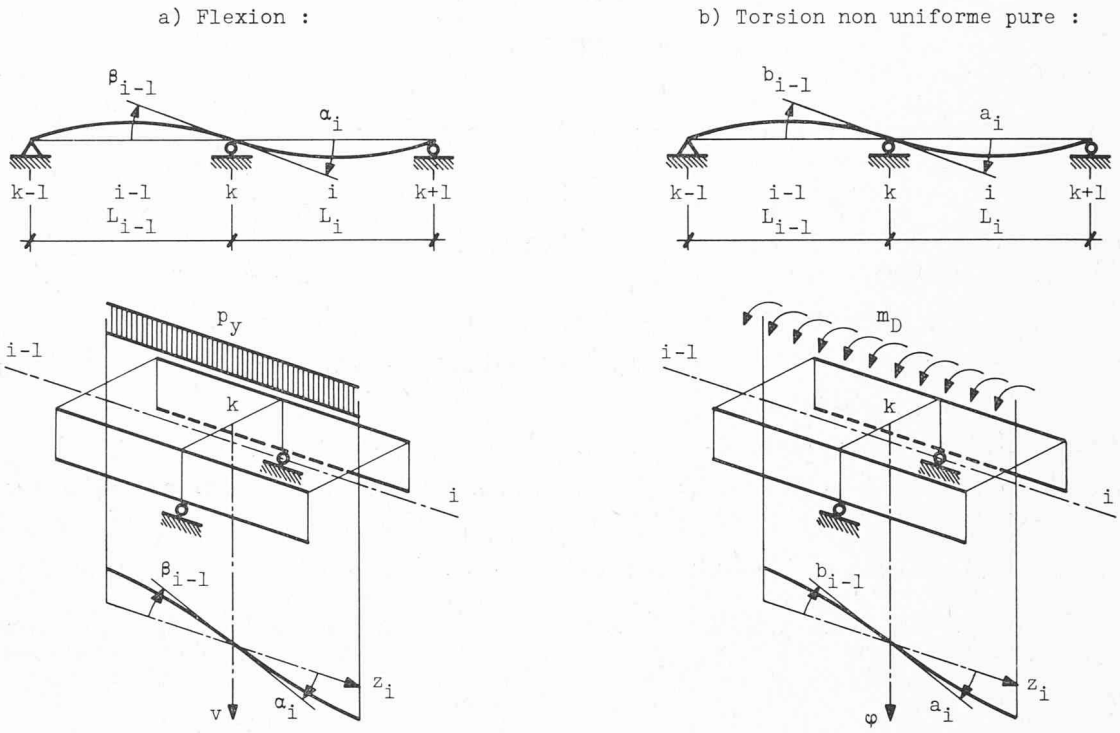


Fig. 6. — Compatibilité des déformations sur appuis des poutres continues.

d) Les appuis sont constitués de deux appareils d'appui distincts qui n'entravent pas le gauchissement des sections d'appuis.

e) La section transversale possède un axe de symétrie.

f) La section transversale est constante par travée. Le pont est donc idéalisé comme une barre prismatique.

Pour la plupart, les ponts métalliques ou mixtes à section transversale ouverte satisfont ces hypothèses.

L'hypothèse *a)* restreint l'application sans autres de cette théorie, aux ponts à section transversale ouverte en béton et aux ponts à section transversale fermée, aussi bien en métal qu'en béton. Les ponts-mixtes à section ouverte sont en général à la limite du domaine d'application de la théorie de la torsion non uniforme pure. Dans certains cas, il est nécessaire de corriger quelque peu les résultats des efforts en travée, afin de tenir compte de l'influence non tout à fait négligeable de la rigidité torsionnelle de Saint-Venant du tablier de béton. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [2].

L'indéformabilité de la section transversale du pont est généralement assurée de manière suffisante par les entretoises.

Généralement, les ponts ont des sections transversales présentant un axe de symétrie. L'influence du dévers de la chaussée, par conséquent du tablier et parfois d'une faible différence de hauteur des poutres-maîtresses, est le plus souvent négligeable pour la symétrie du profil.

Normalement, l'hypothèse *c)* est toujours satisfaite pour les ponts métalliques ou mixtes. Les ponts à travées aussi larges que longues sont plutôt construits en béton.

L'hypothèse *f)* est la plus restrictive pour l'application pratique. En effet, nous n'avons pour ainsi dire jamais à calculer un pont métallique à section transversale constante. Par souci d'économie, les poutres maîtresses métalliques sont toujours dimensionnées au gré des efforts (moments de flexion), qui varient fortement à l'intérieur d'une même travée. Cependant, en faisant certaines approximations, lors de l'établissement de notre programme de calcul électronique, nous nous débarrasserons de cette dernière hypothèse par trop restrictive.

6.2 *Notations — systèmes fondamentaux*

Définitions des notations utilisées (fig. 7) :

i = indice de la travée ;

k = indice de l'appui ;

ki = indice de l'appui de gauche k de la travée i ;

$k+1, i$ = indice de l'appui de droite $k+1$ de la travée i.

Les systèmes fondamentaux utilisés dans les calculs sont les travées simples, biaises. Les hyperstatiques sont les moments et les bimoments de continuité sur appuis.

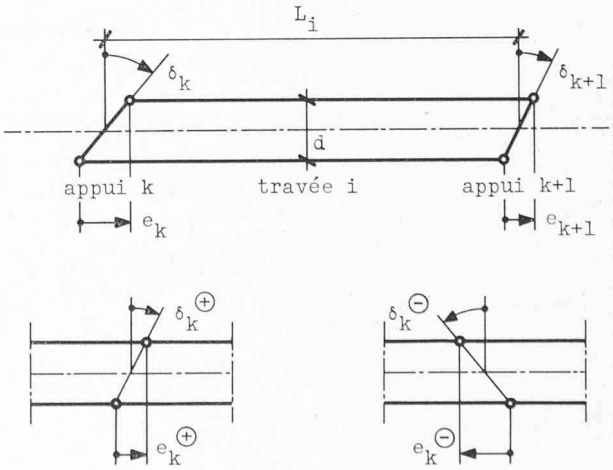


Fig. 7. — Travée biaise : notations et conventions de signes.

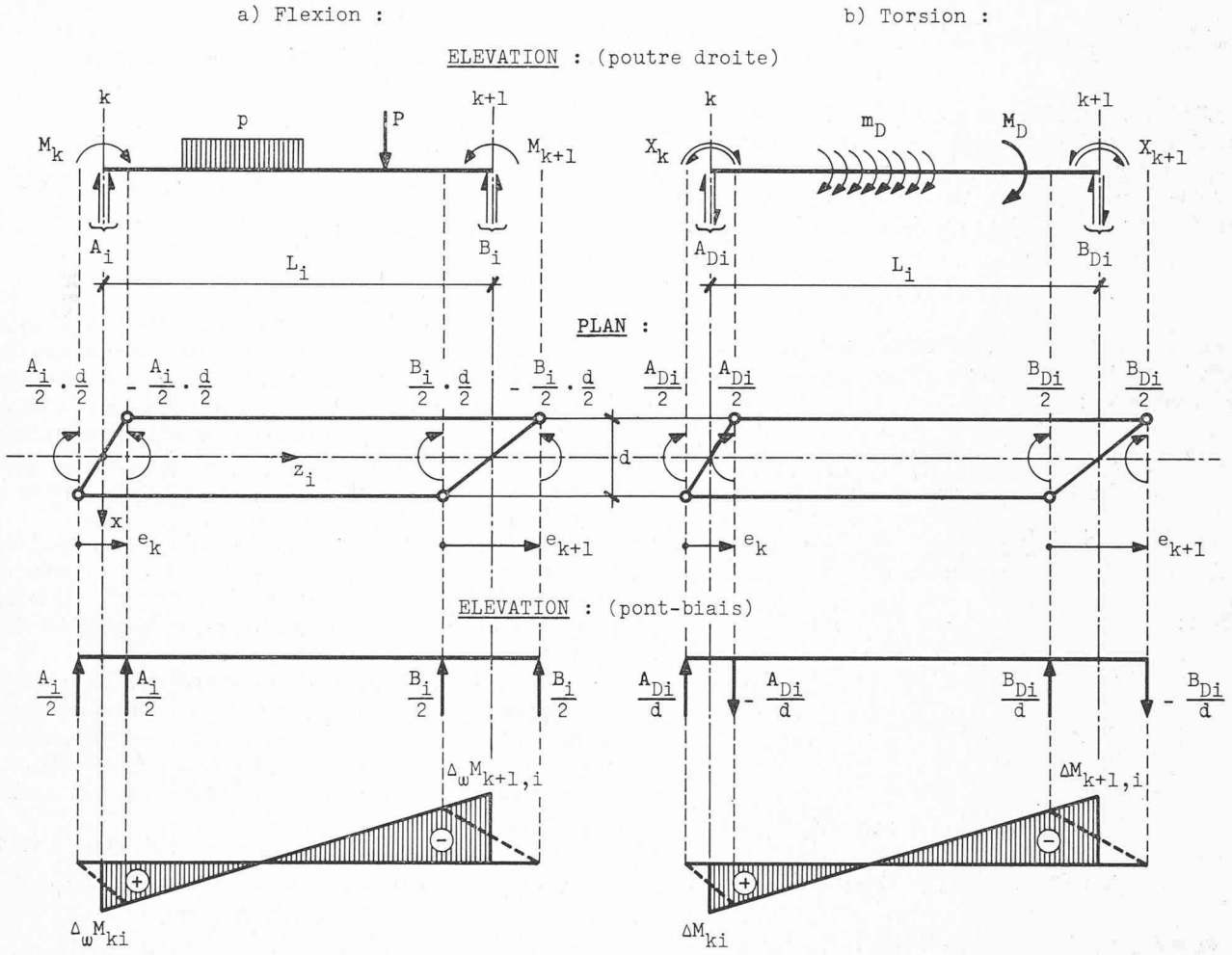


Fig. 8. — Statique du pont-biais : interaction flexion-torsion.

Les efforts intérieurs dans les systèmes fondamentaux sont caractérisés par l'indice $^{(0)}$ et les angles de rotation de flexion ou de torsion par les indices $_o$.
Par exemple :

$Q_{ki}^{(0)}$ = effort tranchant à l'appui k de la travée i, indépendante ou isostatique.

$M_i^{(0)}$ = moment de flexion sous les charges dans la travée i indépendante.

$T_{k+1,i}^{(0)}$ = moment de torsion intérieur à l'appui $k+1$ de la travée i indépendante.

${}_\omega M_i^{(0)}$ = bimoment de torsion sous les moments extérieurs de torsion dans la travée i indépendante.

Les valeurs des efforts intérieurs de flexion et de torsion non uniforme pure à utiliser pour les travées indépendantes sont celles données, pour la poutre simple, au paragraphe 5.1.

6.3 *Statique du pont-biais*

Principe : on dissocie l'analyse en deux parties : analyse de ce qui se passe en flexion seule et analyse de ce qui se passe en torsion non uniforme seule. Puis, on superpose et on exprime l'interaction entre les deux effets flexion et torsion.

On raisonne (fig. 8), simultanément en plan et en élévation, successivement pour la torsion seule et la flexion seule.

Torsion seule :

m_D et M_D, pas de flexion due aux charges extérieures.

X_k = bimoment de continuité à l'appui k.

A_{Di} et B_{Di} = réactions des appuis sur la poutre (couples). L'effet de ces couples est de créer des moments de continuité de flexion sur appuis :

$$\Delta M_{ki} = \frac{A_{Di}}{d} \cdot e_k \text{ (valeur théorique sur l'axe de l'appui).}$$

En fait ΔM_{ki} n'est pas introduit brutalement au droit de l'axe de l'appui. ΔM croît linéairement comme représenté en traitillé (fig. 8).

L'influence du biais des appuis, dans le cas de charges extérieures de torsion uniquement, est donc d'introduire de la flexion. Les deux réactions des appareils d'appui décalés en élévation réalisent un certain encastrement à la flexion.

Flexion seule :

p et P agissent sur l'axe de symétrie, pas de torsion extérieure due aux charges.

M_k = moment de continuité à l'appui k.

Sur chaque appui, deux réactions égales. Ces deux réactions provoquent des couples de torsion égaux et opposés et réalisent ainsi un certain encastrement à la torsion.

Par analogie avec ce que l'on avait pour la torsion, ces paires de couples égaux et opposés introduisent un certain gauchissement, d'où un bimoment :

$$\Delta_\omega M_{ki} = \frac{Ai}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot e_k \text{ (valeur théorique sur l'axe de l'appui).}$$

L'influence du biais des appuis dans le cas de charges extérieures verticales centrées sur l'axe de symétrie du pont est donc d'introduire de la torsion.

Appliquons maintenant les conditions de compatibilité des déformations (5.6) au cas du pont-biais continu :

$$\beta_{i-1} + \alpha_i = 0 \text{ et } b_{i-1} + a_i = 0.$$

Les angles de rotation de flexion et de gauchissement dans le cas de travées biaises sont donnés par les expressions suivantes :

$$\underbrace{\alpha_i = M_k \cdot \alpha_{ik} + M_{k+1}\, \alpha_{i\,k+1}}_{\text{effet des hyperstatiques}} \quad \underbrace{+\, \alpha_{io}}_{\text{effet des charges}}$$

$$\underbrace{+\, \Delta M_{ki}\, \alpha_{ik} + \Delta M_{k+1,i}\, \alpha_{ik+1}}_{\text{effet du biais}}$$

On a :

$$A_i = Q_{ki} = Q_{ki}^{(o)} + \frac{M_{k+1} - M_k}{L_i} \text{ et}$$

$$A_{Di} = T_{ki}^{(o)} + \frac{X_{k+1} - X_k}{L_i}$$

$$\Delta M_{ki} = \frac{A_{Di}}{d}\, e_k = T_{ki} \cdot \text{tg}\, \delta_k$$

$$\text{de même } \Delta M_{k+1,i} = T_{k+1,i} \cdot \text{tg}\, \delta_{k+1}$$

$$\alpha_i = M_k \cdot \alpha_{ik} + M_{k+1} \cdot \alpha_{ik+1} + \alpha_{io} + T_{ki} \cdot \alpha_{ik} \cdot \text{tg}\, \delta_k + \\ + T_{k+1,i} \cdot \alpha_{ik+1} \cdot \text{tg}\, \delta_{k+1} \qquad (6.1)$$

De même :

$$\beta_i = M_k \cdot \beta_{ik} + M_{k+1} \cdot \beta_{ik+1} + \beta_{io} + T_{ki} \cdot \beta_{ik} \cdot \text{tg}\, \delta_k + \\ + T_{k+1,i} \cdot \beta_{ik+1} \cdot \text{tg}\, \delta_{k+1} \qquad (6.2)$$

On a :

$$\Delta_\omega M_{ki} = \frac{A_i \cdot d}{4} \cdot e_k = Q_{ki} \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \text{tg}\, \delta_k$$

$$\text{et } \Delta_\omega M_{k+1,i} = Q_{k+1,i} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \text{tg}\, \delta_{k+1}$$

On montrerait de même pour la torsion que :

$$a_i = X_k \cdot a_{ik} + X_{k+1} \cdot a_{ik+1} + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (Q_{ki} a_{ik} \cdot \text{tg}\, \delta_k + \\ + Q_{k+1,i} \cdot a_{ik+1} \cdot \text{tg}\, \delta_{k+1}) - \frac{1}{L_i} (\alpha_i \cdot \text{tg}\delta_k + \beta_i \cdot \text{tg}\, \delta_{k+1}) \qquad (6.3)$$

$$\text{et } b_i = X_k \cdot b_{ik} + X_{k+1} \cdot b_{ik+1} + b_{io} + \\ + \underbrace{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (Q_{ki} \cdot b_{ik} \cdot \text{tg}\, \delta_k + Q_{k+1,i} \cdot b_{ik+1} \cdot \text{tg}\, \delta_{k+1}) + \\ + \frac{1}{L_i} (\alpha_i \cdot \text{tg}\, \delta_k + \beta_i \cdot \text{tg}\, \delta_{k+1})}_{\text{influence du biais}} \qquad (6.4)$$

Le dernier terme est l'effet d'une rotation de la section d'appui due au biais.

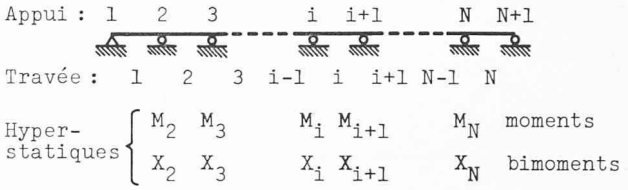


Fig. 9. — Grandeurs surabondantes.

Ensuite on remplace dans les équations (6.1) à (6.4) les termes Q_{ki}, T_{ki},... etc. par leurs valeurs données plus haut. On écrit les conditions de compatibilité des déformations. On a deux conditions par appui intermédiaire. Les seules inconnues sont les grandeurs surabondantes M_k et X_k, soient deux par appui intermédiaire. On a donc autant d'équations que d'inconnues et le problème est déterminé (fig. 9).

Si l'on effectue le travail de substitution et que l'on ordonne convenablement les termes des équations de compatibilité, on obtient un système de $(2 \cdot N-2)$ équations linéaires à $(2 \cdot N-2)$ inconnues, si N est le nombre de travées.

Ce système d'équations est comparable au système d'équations « des trois moments », si ce n'est que dans notre cas, chaque équation comporte trois termes relatifs aux moments et trois termes relatifs aux bimoments.

Ecrivons ce système d'équations sous forme matricielle :

$$[D]_{(2 \cdot N-2) \times (2 \cdot N-2)} \cdot [X]_{(2 \cdot N-2)} = [C]_{(2 \cdot N-2)} \qquad (6.5)$$

où : $[D]$ = matrice des coefficients qui ne dépendent que des caractéristiques du pont.

$[X]$ = matrice des grandeurs surabondantes (fig. 9).

$[X]^T = [M_2, M_3, M_4, \ldots, M_N, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_N]$

$[C]$ = matrice des termes de charge qui dépendent des caractéristiques du pont et des charges appliquées.

Nous n'expliciterons pas plus les termes de ces différentes matrices, car cela serait très long et fastidieux et n'ajouterait rien à la compréhension de ce texte. Il est bien évident que nous avons dû effectuer ces développements pour l'établissement de notre programme de calcul électronique.

Par conséquent, on obtient les efforts hyperstatiques :

$$[X] = [D]^{-1} \cdot [C] \qquad (6.6)$$

Ayant déterminé les efforts hyperstatiques M_k et X_k, on obtient facilement les efforts intérieurs et les réactions d'appuis résumés dans le tableau 6.

Pour calculer tous les efforts de ce tableau, on commence au coin gauche en haut. Il faut supposer à priori des valeurs pour T_{ki} et $T_{k+1,i}$, d'où un travail par approximations successives jusqu'à ce que les T_{ki} et $T_{k+,1i}$ résultant des calculs (en bas à droite du tableau) soient égaux aux valeurs supposées. Kollbrunner et Basler dans leur ouvrage [2] ont effectué une fois pour toutes ce travail et donnent les valeurs de T_{ki} et $T_{k+1,i}$ à introduire à priori dans les calculs.

Certains cas particuliers simples sont traités dans l'ouvrage de Kollbrunner et Basler [2] : Ponts-biais d'inertie constante avec même biais des appuis, pont-biais à une travée, pont-biais à deux travées égales avec appuis intermédiaires biais uniquement.

TABLEAU 6

Calcul des efforts intérieurs et des réactions d'appuis

Flexion	Torsion
Moments sur appuis : $$M_{ki} = M_k + \underbrace{T_{ki} \operatorname{tg} \delta_k}_{\Delta M_{ki}}$$ $$M_{k+1,\,i} = M_{k+1} + T_{k+1,\,i} \operatorname{tg} \delta_{k+1}$$	Bimoments sur appuis : $$_\omega M_{ki} = X_k + \underbrace{Q_{ki} \left(\frac{d}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \delta_k}_{\Delta_\omega M_{ki}}$$ $$_\omega M_{k+1,\,i} = X_{k+1} + Q_{k+1,\,i} \left(\frac{d}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \delta_{k+1}$$
Moment de flexion : $$M_i = M_i^{(0)} + M_{ki} \left(1 - \frac{z_i}{L_i}\right) + M_{k+1,\,i} \frac{z_i}{L_i}$$	Bimoment de torsion : $$_\omega M_i = {}_\omega M_i^{(0)} + {}_\omega M_{ki} \left(1 - \frac{z_i}{L_i}\right) + {}_\omega M_{k+1,\,i} \frac{z_i}{L_i}$$
Effort tranchant : $$Q_i = Q_i^{(0)} + \frac{(M_{k+1,\,i} - M_{ki})}{L_i}$$	Moment de torsion : $$T_i = T_i^{(0)} + \frac{({}_\omega M_{k+1,\,i} - {}_\omega M_{ki})}{L_i}$$
Réaction d'appuis : $$F_k = Q_{ki} - Q_{k,\,i-1}$$	Couple réaction d'appuis : $$T_k = T_{ki} - T_{k,\,i-1}$$
Réactions sur les appareils d'appuis : $$F_k \pm = \frac{F_k}{2} \pm \frac{T_k}{d}$$	

7. Programme CMJA 1 de calcul des efforts intérieurs et des réactions d'appuis

Pour résoudre le problème du calcul des efforts intérieurs et des réactions d'appuis dans un pont-biais continu à rigidité torsionnelle de Saint-Venant négligeable, nous avons élaboré un programme en langage Fortran pour l'ordinateur ; ce programme construit les matrices intervenant dans l'équation (6.6), il résout cette équation et il calcule les efforts intérieurs et les réactions d'appuis du tableau 6.

Lors de l'établissement de ce programme, nous avons étendu la théorie et les équations du pont-biais en torsion non uniforme pure, données au paragraphe 6, au cas d'un pont à poutres-maîtresses de hauteur constante, mais à section transversale d'inertie variable par sauts, compte tenu de l'approximation suivante.

Ce programme n'est exact que pour un pont idéal, assimilable à une barre prismatique, pour lequel on peut appliquer en toute rigueur la théorie et les équations du pont-biais en torsion non uniforme données au paragraphe 6. Dans le cas tout à fait général d'une barre non prismatique chargée de manière quelconque, les équations différentielles de la déformée ne sont plus celles, simples et indépendantes les unes des autres, données au paragraphe 6. Il intervient des termes qui s'annulaient dans le cas de la barre prismatique et en fait, nous avons à résoudre un système de trois équations différentielles liées [1].

E. Karamuk a montré [4], dans le cas particulier d'une barre non prismatique à section transversale symétrique en torsion non uniforme pure, chargée de manière quelconque, que non seulement les sections d'appuis tournent autour d'un axe horizontal et gauchissent, mais qu'également ces sections tournent autour d'un axe vertical a_i, ceci à cause de la variation du niveau de la fibre neutre d'une section transversale à une autre (fig. 10).

Si les sections A et B (fig. 10) ne sont pas libres de tourner autour de l'axe vertical a_i, par exemple à cause de l'effet de continuité d'une travée adjacente, on devrait en toute rigueur, à cause de cette rotation empêchée, exprimer également la compatibilité des déformations correspondantes en plus des conditions de compatibilité des angles de rotation autour d'un axe horizontal et des angles de gauchissement. Cette condition supplémentaire aurait pour conséquence l'introduction de moments hyperstatiques de flexion dans le plan horizontal.

Cependant, dans le cas de ponts mixtes ou orthotropes à poutres maîtresses de hauteur constante (cas le plus fréquent pour les ouvrages biais), les variations d'inertie des sections transversales n'entraînent que des variations

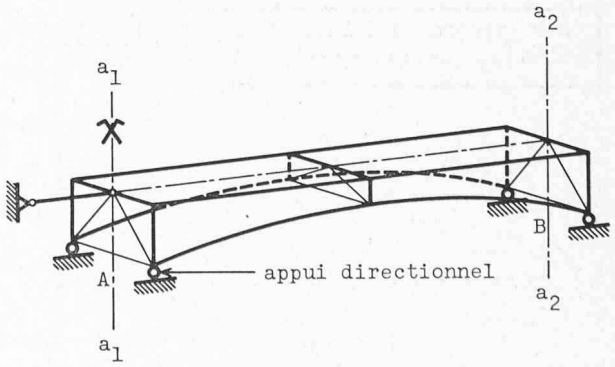


Fig. 10. — Conditions d'appuis d'une travée simple, non prismatique.

minimes du niveau de la fibre neutre. La fibre neutre est la fibre où la contrainte normale est nulle. Par conséquent, les rotations des sections d'appuis des travées libres, autour d'axes verticaux a_i, seront faibles et l'on pourra négliger en première approximation les efforts de flexion horizontaux qui en résultent. Pour l'application de notre programme de calcul électronique, nous avons fait cette approximation, ce qui nous permet d'appliquer la théorie et les équations de la barre prismatique biaise et continue au cas du pont à section transversale d'inertie variable.

Au lieu d'introduire dans les équations (6.1) à (6.4) les valeurs données au paragraphe 5.3 pour les angles de rotation de flexion et de gauchissement, on calcule ces valeurs, dans le cas de travées à inertie variable, en appliquant le théorème de Maxwell (fig. 11).

Les données numériques à introduire dans le programme, pour chaque application particulière, sont les caractéristiques géométriques du pont (nombre et longueur des travées, nombre et longueur des intervalles par travée, et décalage des appuis biais, qui peut varier d'un appui à l'autre), les caractéristiques statiques des sections transversales du pont (rigidité à la flexion et au gauchissement, aux extrémités de chaque intervalle) et les caractéristiques relatives aux charges extérieures (charges uniformément réparties et concentrées à mi-portée, par travée, excentricités de ces différentes charges par rapport à l'axe de symétrie).

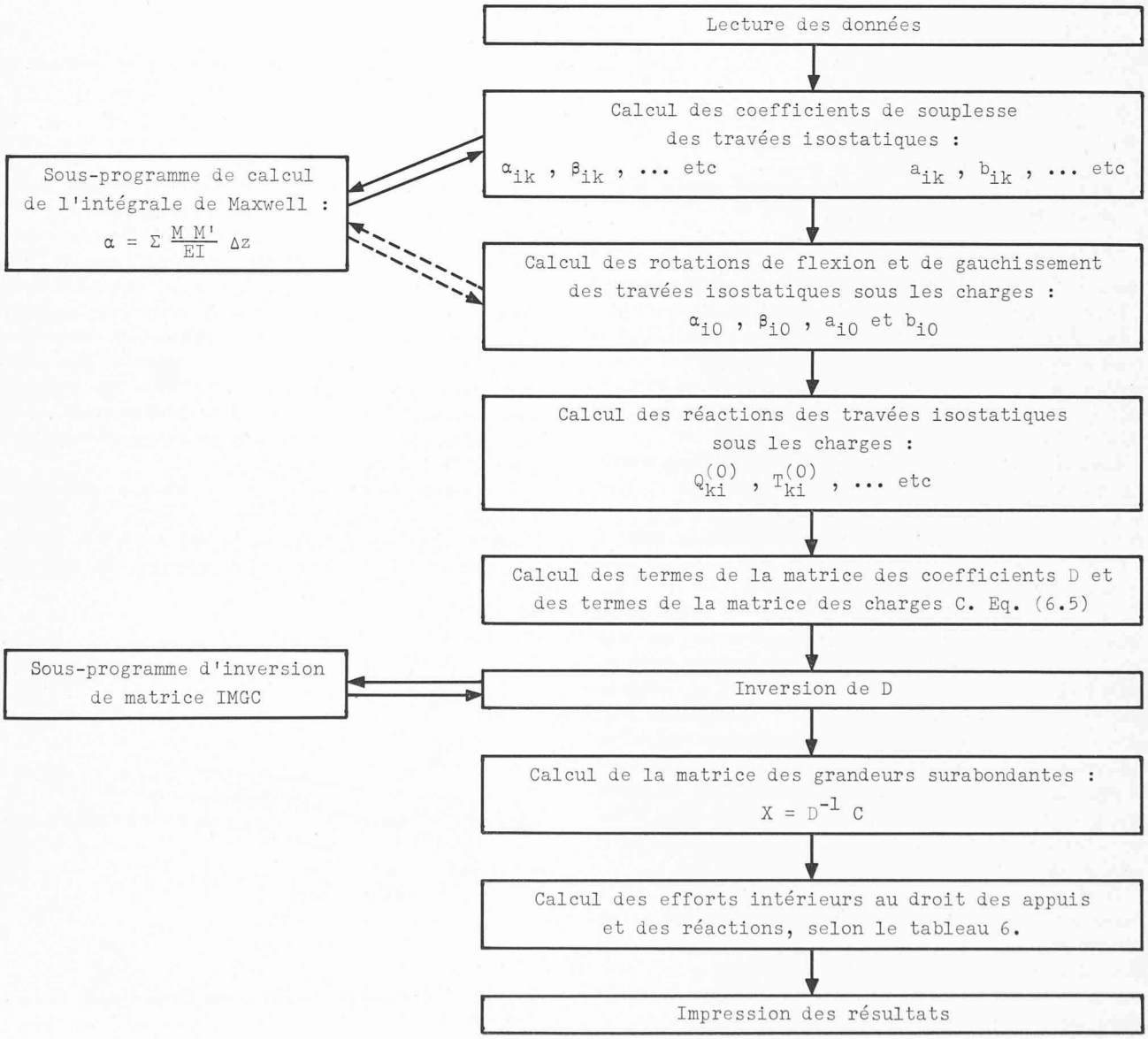
Les résultats des calculs à l'ordinateur sont fournis sous forme de tableaux (voir exemple). Pour chaque travée nous obtenons les valeurs au droit de l'axe des appuis, aux extrémités gauche et droite respectivement, des moments, des efforts tranchants, des bimoments et des moments de torsion. Pour chaque appui nous obtenons les réactions sur les appareils d'appui gauche et droite de la section droite transversale (fig. 12).

Les conventions de signes suivantes sont à respecter :

— Pour le biais des appuis, selon (fig. 7 b).
— Pour les charges et moments extérieurs, selon (fig. 4).
— Pour les efforts intérieurs, selon (fig. 2).
— Pour les réactions sur les appareils d'appui, selon (fig. 12).

Pour tracer les diagrammes des efforts intérieurs, il suffit maintenant de « suspendre » les diagrammes des efforts intérieurs des travées isostatiques (fig. 5) aux valeurs des efforts au droit de l'axe des appuis (voir exemple ci-après).

TABLEAU 7 — *Organigramme du programme CMJA1*



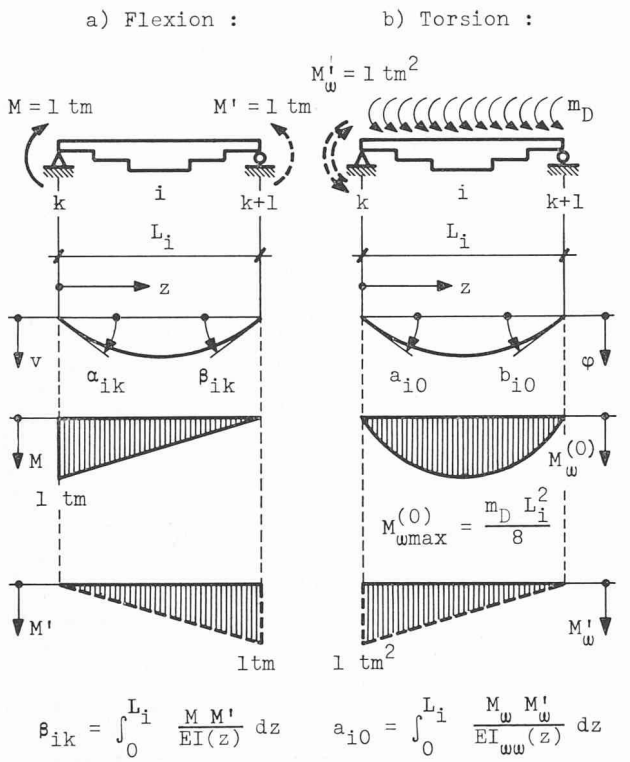


Fig. 11. — Deux applications particulières du théorème de Maxwell.

Cartes de données — Input :

Notations :

C	=	numéro du cas de charge.
N	=	nombre de travées, $N = 20$ au maximum, $2 \leq N \leq 20$.
$M(i)$	=	nombre d'intervalles par travée i, $M(i) = 20$ au maximum.
d	=	écartement des poutres maîtresses [m].
$e(k)$	=	biais des appuis, signe selon (fig. 7 b), [m].
$L(i)$	=	longueur de la travée i [m].
$\Delta Z(i,j)$	=	longueur de l'intervalle j de la travée i [m].
EI^0_{yy}	=	rigidité de référence à la flexion [tm^2]
$EI^0_{\omega\omega}$	=	rigidité de référence au gauchissement [tm^4].
$\lambda(i,j)$	=	facteur de multiplication des rigidités de référence.
$EI^0_{yy} \cdot \lambda(i,j)$	=	rigidité à la flexion de la section j de la travée i.
$EI^0_{\omega\omega} \cdot \lambda(i,j)$	=	rigidité au gauchissement de la section j de la travée i.
$P(i)$	=	charge concentrée au milieu de la travée i [t].
$e_P(i)$	=	excentricité de la charge $P(i)$ par rapport à l'axe de symétrie [m], signe selon (fig. 4).
$p(i)$	=	charge linéaire uniformément répartie sur la travée i [t/m].
$e_p(i)$	=	excentricité de $p(i)$ par rapport à l'axe de symétrie [m].

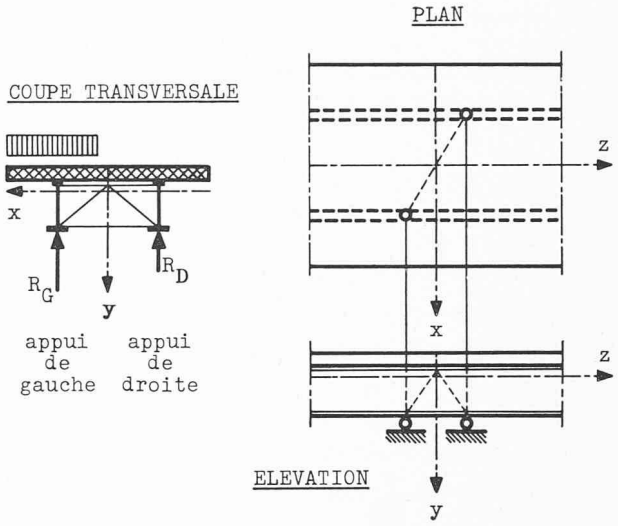


Fig. 12. — Réactions sur les appareils d'appui.

Remarques :

a) Dans le cas de ponts à inertie constante par tronçons, ce qui est pratiquement toujours le cas pour les ponts métalliques, il faut introduire un intervalle de longueur $\Delta Z = 0$ au droit de chaque discontinuité.

b) Il faut prendre au minimum 5 intervalles par travée (non compris les intervalles de longueur nulle) pour obtenir une précision suffisante sur la valeur des efforts calculés, ceci même dans le cas d'inertie constante.
Cela est dû au processus approché de calcul de l'intégrale de Maxwell par intégration numérique (tableau 7). Pour $M(i) = 5$ intervalles par travée, la précision sur la valeur des efforts est de l'ordre de 5 à 6 %, pour $M(i) = 10$ intervalles la précision est de l'ordre de 2 %, ce qui est très suffisant.

c) Un seul facteur de multiplication λ pour les rigidités de flexion et de gauchissement suffit ; en effet, on peut montrer que ces deux rigidités varient pratiquement selon un même facteur de proportionnalité pour toutes les sections transversales d'un même pont.

d) Par souci de simplification de notre programme, nous n'avons pas cherché à placer les charges concentrées dans les positions les plus défavorables longitudinalement, car pour cela il aurait fallu chercher ces positions extrêmes au moyen des lignes d'influence. Il nous a paru suffisamment exact de ne considérer qu'une seule position des essieux, soit dans la section à mi-portée de chaque travée. Cette simplification est acceptable, l'influence du cas de charge des essieux étant généralement négligeable pour le dimensionnement global de l'ouvrage.

Ajoutons que dans le cas limite d'un pont droit à quatre travées inégales d'inertie variable, les résultats du programme CMJA 1 ont été confrontés avec les résultats donnés par le programme GC 5 du Centre de calcul élec-

tronique de l'EPFL pour le calcul des poutres continues : ces résultats sont absolument identiques (pour l'effet de flexion uniquement, bien entendu).

D'autre part, notre programme a été testé de manière positive sur les exemples de ponts-biais d'inertie constante (barre prismatique) de l'ouvrage de Kollbrunner/Basler [2].

TABLEAU 8

Input du programme Fortran CMJA 1

Carte 1 :	texte quelconque (référence à l'ouvrage par exemple)
Carte 2 :	C, N selon Format 2 I10
Carte 3 :	$M(i)$ $i = 1, N$ selon Format 8 I10
Carte 4 :	d selon Format F10.
Carte 5 :	$e(k)$ $k = 1, N + 1$ selon Format 8 F10.
N cartes suivantes :	$L(i)$, $\Delta z(i, j)$ $j = 1, M(i)$ $i = 1, N$ selon Format 8 F10. $L(i)$ étant toujours au début d'une carte
Carte suivante :	EI^0_{yy}, $EI^0_{\omega\omega}$ selon Format 2 E20.
N cartes suivantes :	$\lambda(i, j)$ $j = 1, M + 1$ $i = 1, N$ selon Format 8 F10. $\lambda(i, 1)$ étant toujours au début d'une carte
N cartes suivantes :	$P(i)$, $e_P(i)$, $p(i)$ et $e_p(i)$ $i = 1, N$ selon Format 4 F10. $P(i)$ étant toujours au début d'une carte

8. Exemple

8.1 *Caractéristiques de l'ouvrage*

Soit le pont-biais continu à trois travées inégales (45 + 55 + 50 m) (fig. 13). L'ouvrage est constitué d'un tablier de béton armé (BS 450) de 18 m de largeur d'épaisseur variable avec goussets au droit des poutres maîtresses; pour les calculs, on admet un tablier d'épaisseur constante égale à 30 cm. Les poutres maîtresses métalliques, au nombre de deux, sont de hauteur constante égale à 2,20 m sur toute la longueur de l'ouvrage.

La répartition de la matière des poutres-maîtresses métalliques constituées d'acier 52, ainsi que la répartition de l'armature longitudinale du tablier sont données à la figure 14. Les appuis de l'ouvrage sont constitués d'appareils d'appui distincts, décalés en élévation de façon irrégulière (3,00, 3,00, 10,00 et 0,00 m).

Pour calculer les efforts intérieurs, nous avons admis toutes les sections transversales homogènes (également sur appuis) avec $n = \dfrac{E_a}{E_b} = 5$, que ce soit pour les surcharges mobiles ou pour les surcharges permanentes. Notons qu'en ce qui concerne le calcul des efforts intérieurs ou des réactions d'appuis, cette hypothèse simplificatrice est suffisamment exacte.

Nous avons implicitement admis que le poids propre du tablier est repris par les poutres maîtresses métalliques seules. L'effet du biais des appuis n'intervient donc que pour les surcharges permanentes et les surcharges mobiles; il agit sur la section mixte uniquement.

TABLEAU 9

Caractéristiques des sections transversales du pont
Sections homogènes avec $n = 5$

Section type n°	I_{vv} [m^4]	$I_{\omega\omega}$ [m^6]	λ		λ moyen
			I_{yy}	I_{ww}	
1	0,32686	8,2207	0,598	0,596	0,597
2	0,46207	11,647	0,846	0,845	0,846
3	0,54636	13,784	1,000	1,000	1,000
4	0,30957	7,7832	0,567	0,565	0,566
5	0,52123	13,149	0,954	0,954	0,954
6	0,72972	18,474	1,336	1,340	1,338
7	0,79271	20,083	1,451	1,457	1,454

Les caractéristiques des sections transversales, calculées à l'aide du programme CME 2, sont données au tableau 9. A titre d'exemple, nous avons fait figurer les valeurs du rapport λ des inerties de flexion et de gauchissement. Nous voyons bien que ces deux rapports sont pratiquement identiques pour une même section transversale. Nous avons pris la section en travée, type 3, comme référence, pour laquelle :

$$I^0_{yy} = 0{,}54636 \text{ m}^4 \qquad I^0_{\omega\omega} = 13{,}784 \text{ m}^6$$

Comme $E = 2{,}1 \cdot 10^7$ t/m² :

$$EI^0_{yy} = 0{,}11474 \cdot 10^8 \text{ tm}^2 \qquad \text{et } EI^0_{\omega\omega} = 0{,}28946 \cdot 10^9 \text{ tm}^4$$

8.2 *Charges sur l'ouvrage :*

Surcharges permanentes :

Bordures préfabriquées :	0,530 t/m'
Mortier d'égalisation :	0,080 t/m'
Glissières de sécurité :	0,046 t/m'
Revêtement bitumineux : (ép. 7 cm ; $\delta = 2{,}2$ t/m³ largeur : $18{,}00 - 2 \cdot 0{,}65 = 16{,}70$ m) $0{,}07 \cdot 16{,}70 \cdot 2{,}2 =$	2,572 t/m'
Total pour le pont :	3,228 t/m' $\cong$ 3,23 t/m'

Surcharges mobiles : cas de charge I de la Norme SIA 160 (1970)

$$\left.\begin{array}{l} p = 400 \text{ kg/m}^2 \\ 2 \text{ essieux de } 18 \text{ t} \end{array}\right\} \varphi \text{ dynamique}$$

$$l_m = \frac{45{,}00^2 + 55{,}00^2 + 50{,}00^2}{45{,}00 + 55{,}00 + 50{,}00} = 50{,}40 \text{ m}$$

$$\varphi = 5\,\frac{100 + l_m}{10 + l_m} = 5 \cdot \frac{150{,}40}{60{,}40} = 12{,}5\ \%$$

$$p\,(1 + \varphi) = 400 \cdot 1{,}125 = 450 \text{ kg/m}^2$$

$$P\,(1 + \varphi) = 18 \cdot 1{,}125 = 20{,}3 \text{ t}$$

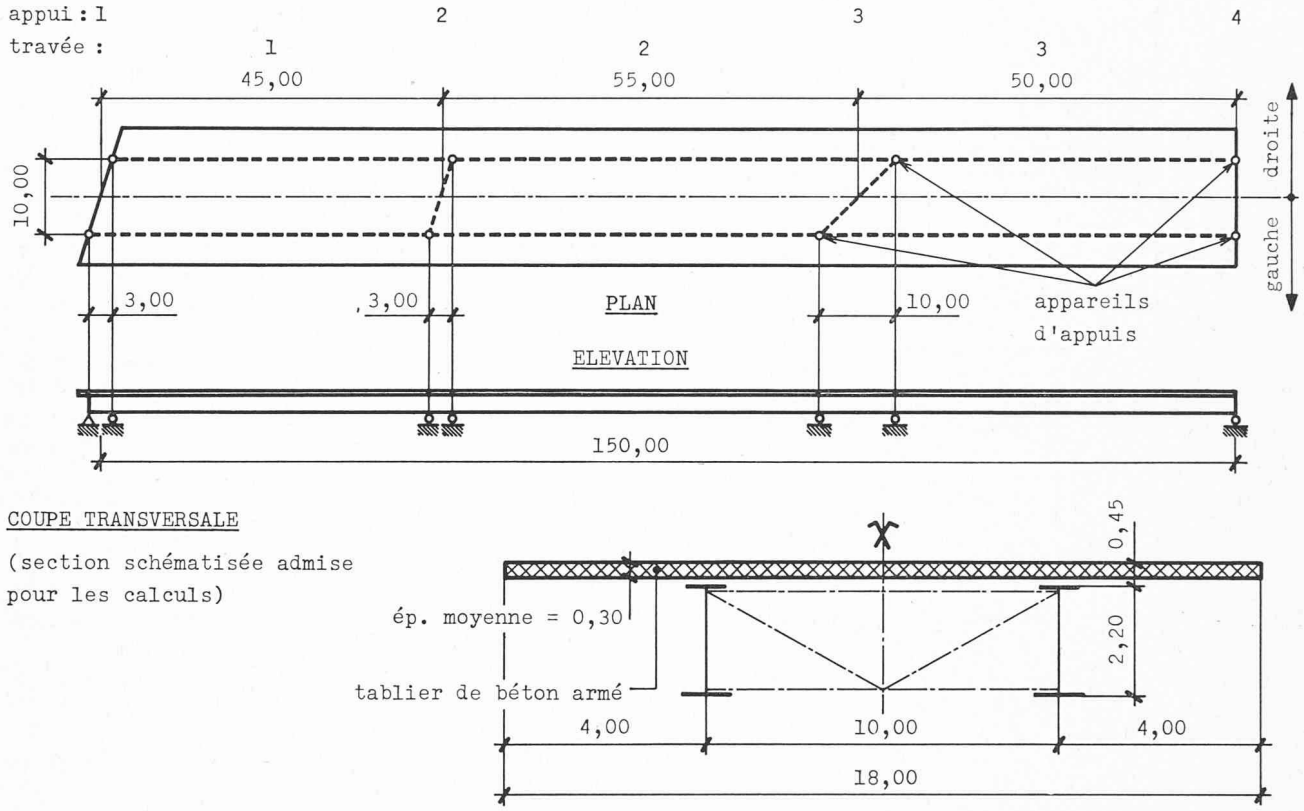


Fig. 13. — Exemple d'un pont-biais à trois travées : caractéristiques géométriques.

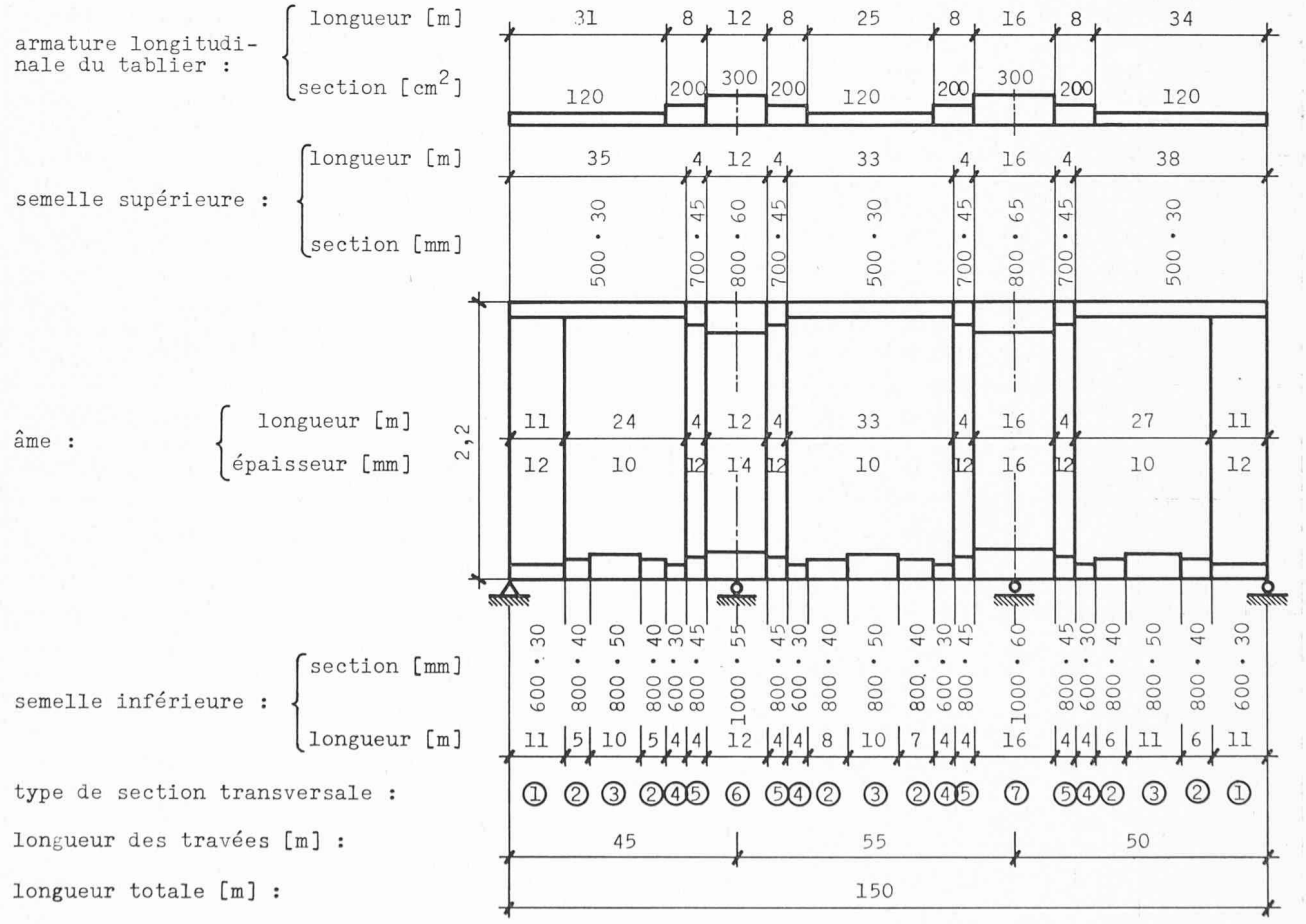


Fig. 14. — Répartition de la matière rapportée à l'axe longitudinal du pont : armature du tablier et poutre maîtresse.

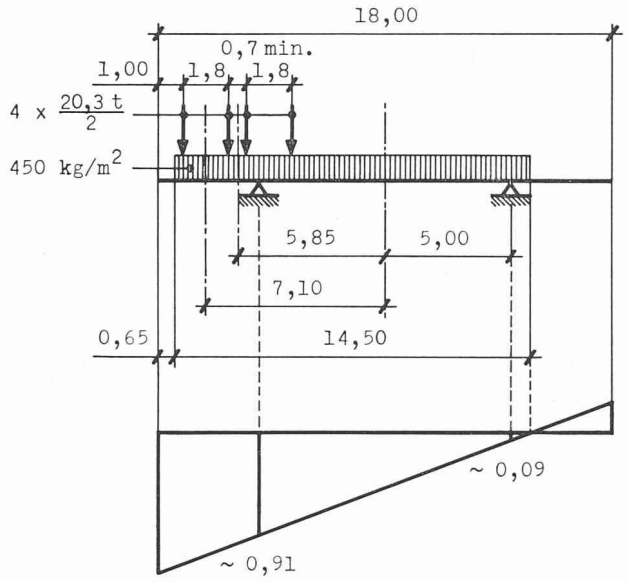


Fig. 15. — Répartition transversale des charges en travée.

On admet la loi de répartition transversale des charges représentée à la figure 15. La publication [6] permet d'évaluer de manière précise la loi de répartition transversale pour un tel profil.

8.3 *Cas de charge*

Nous avons envisagé huit cas de charge (fig. 16). Les conventions de signe de l'excentricité des charges par rapport à l'axe longitudinal du pont, sont celles définies au paragraphe 7. Les valeurs des charges et de leur excentricité sont déduites de la (fig. 15).

Le cas de charge n° 1 est celui de la surcharge permanente uniformément répartie. Les cas de charge n°s 2, 3 et 4 sont quelques cas de surcharges mobiles réparties donnant les moments et bimoments maximaux. Le cas de charge n° 5, surcharges mobiles réparties en damier, est celui donnant les moments de torsion maximaux. Les cas de charge n°s 6, 7 et 8 sont les cas analogues pour les essieux.

Les résultats du calcul des efforts intérieurs et des réactions d'appuis à l'aide du programme CMJA 1 sont donnés

TABLEAU 10

Efforts intérieurs théoriques à l'axe des appuis

Cas de charge	Travée	Moment [*tm*]		Effort tranchant [*t*]		Bimoment [*tm²*]		Moment de torsion [*tm*]	
		gauche	droite	gauche	droite	gauche	droite	gauche	droite
1	1	− 7,25	− 822,62	+ 54,56	− 90,79	+ 409,17	− 678,75	− 24,18	− 24,18
	2	− 831,51	−1051,77	+ 84,82	− 92,83	+ 638,36	−2320,74	− 53,80	− 53,80
	3	−1048,83	0	+101,73	− 59,77	+2543,17	0	− 50,86	− 50,86
2	1	+ 29,30	− 545,31	+133,93	−159,47	+1004,48	−1861,44	+ 97,68	−225,06
	2	− 475,08	−1003,38	− 9,61	− 9,61	− 737,47	− 240,14	+ 9,04	+ 9,04
	3	− 923,86	0	+181,48	−144,52	+4536,93	0	+ 88,56	−270,04
3	1	+ 9,29	−1121,26	− 25,12	− 25,12	− 188,42	+1205,47	+ 30,98	+ 30,98
	2	−1228,90	−1109,49	+181,47	−177,13	+2754,93	−4428,22	−327,83	+ 66,63
	3	−1188,00	0	+ 23,76	+23,76	+ 594,00	0	− 11,88	− 11,88
4	1	+ 10,09	− 796,01	− 17,91	− 17,91	− 134,35	+1379,65	+ 33,64	+ 33,64
	2	− 907,56	−2197,67	+155,84	−202,76	+2682,83	−5068,91	−338,17	+ 56,29
	3	−2540,16	0	+213,80	−112,20	+5345,08	0	−286,20	+ 72,40
5	1	+ 108,08	− 970,83	+ 60,62	−108,58	+ 454,68	+ 772,97	+360,28	−346,13
	2	−1023,79	−1202,01	+100,16	−106,64	+2338,48	−2666,01	−522,69	+340,70
	3	−1209,36	0	+118,19	− 69,81	+2954,68	0	+333,36	−451,54
6	1	+ 0,21	+ 83,78	+ 1,86	+ 1,86	+ 13,93	+ 44,87	+ 0,69	+ 0,69
	2	+ 82,78	− 280,31	− 6,60	− 6,60	− 18,57	− 165,04	− 2,66	− 2,66
	3	− 170,75	0	+ 23,72	− 16,88	+ 592,88	0	+106,90	−130,61
7	1	+ 8,89	− 177,90	− 4,15	− 4,15	− 31,13	+1302,47	+ 29,64	+ 29,64
	2	− 233,13	− 139,01	+ 22,01	− 18,59	+1498,69	− 464,72	−154,45	+ 83,06
	3	− 224,31	0	+ 4,49	+ 4,49	+ 112,15	0	− 2,24	− 2,24
8	1	+ 5,55	− 44,04	− 1,10	− 1,10	− 8,27	+ 823,77	+ 18,49	+ 18,49
	2	− 77,78	− 210,14	+ 7,74	− 12,56	+ 890,11	− 313,91	− 93,96	+ 50,17
	3	− 195,28	0	+ 14,06	− 6,24	+ 351,39	0	+ 65,04	− 79,09

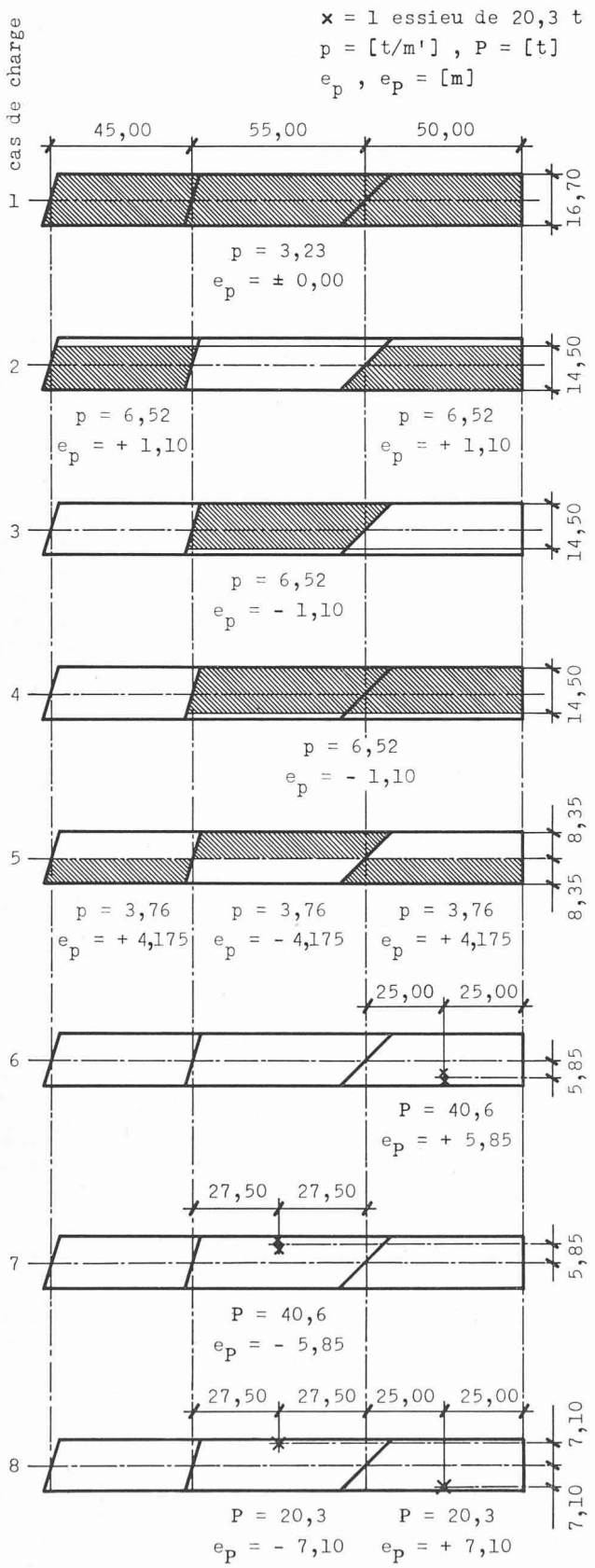


Fig. 1 — Cas de charge envisagés.

dans les tableaux 10 et 11, pour les différents cas de charge envisagés (fig. 16). Pour chaque travée, nous avons les valeurs des efforts intérieurs, respectivement à l'axe des appuis gauche et droite de la travée. Pour chaque appui,

TABLEAU 11

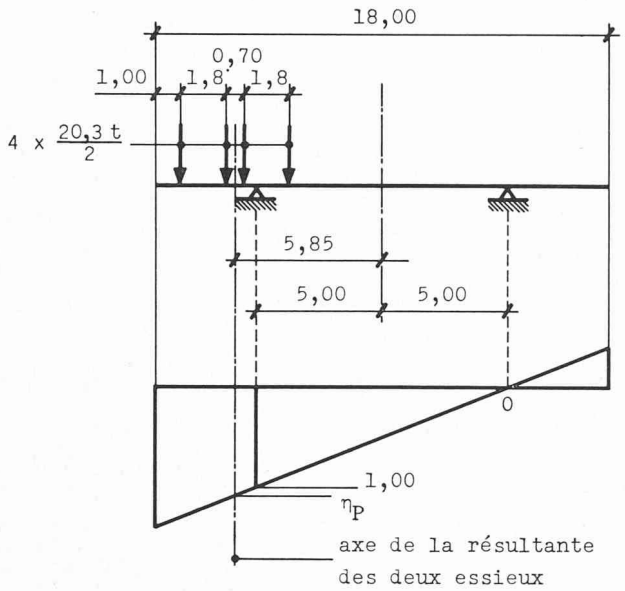
Réactions sur les appareils d'appui en tonnes

Cas de charge	Appui	Appareil d'appui	
		gauche	droite
1	1	+ 24,86	+ 29,70
	2	+ 84,84	+ 90,70
	3	+ 97,57	+ 96,98
	4	+ 34,97	+ 24,80
2	1	+ 76,73	+ 57,20
	2	+ 98,34	+ 51,52
	3	+103,49	+ 87,59
	4	+ 99,27	+ 45,26
3	1	− 9,46	− 15,66
	2	+ 67,42	+139,18
	3	+ 92,59	+108,30
	4	− 10,69	− 13,07
4	1	− 9,59	− 12,32
	2	+ 49,70	+124,06
	3	+174,03	+242,53
	4	+ 48,86	+ 63,34
5	1	+ 66,34	− 5,72
	2	+ 86,71	+122,02
	3	+111,68	+113,15
	4	+ 80,06	− 10,25
6	1	+ 1,00	+ 0,86
	2	− 4,56	− 3,89
	3	+ 26,11	+ 4,20
	4	+ 21,50	− 4,62
7	1	+ 0,89	− 5,04
	2	− 5,33	+ 31,49
	3	+ 3,01	+ 20,07
	4	− 2,02	− 2,47
8	1	+ 1,30	− 2,40
	2	− 6,82	+ 15,67
	3	+ 14,79	+ 11,82
	4	+ 11,03	− 4,79

nous avons la valeur des réactions sur les appareils d'appui, gauche et droite respectivement, comme définis à la figure 12.

Pour obtenir les efforts maximaux, par exemple dans la section au droit de la pile la plus biaise (appuis n° 3), on voit qu'il faut cumuler, outre les efforts dus au poids propre des poutres maîtresses et du tablier agissant sur la section des poutres maîtresses métalliques seules, les efforts dus aux cas de charge n°s 1, 4 et 7.

Si, d'autre part, on désire obtenir la réaction maximale, par exemple à l'appareil d'appui gauche de la culée droite (appuis n° 4), on doit cumuler, outre les valeurs de la réaction due au poids propre d'une poutre métallique et de la demi-largeur du tablier, les valeurs de cette réaction dues aux cas de charge n°s 1 et 2, ainsi que celle due aux essieux placés au droit de cet appui.



$\eta_P = 1{,}00 \dfrac{10{,}85}{10{,}00} = 1{,}085$

Fig. 17. — Répartition transversale des charges sur appuis.

Du tableau 11 on tire :

Cas de charge n° 1 : $F_{4\ \text{Gauche}} =$ 34,97 t

n° 2 : $F_{4\ \text{Gauche}} =$ 99,27 t

Essieux : (fig. 17).

$$4 \cdot \frac{20{,}3\ \text{t}}{2}\ \eta_p = 4 \cdot \frac{20{,}3}{2} \cdot 1{,}085 = \underline{44{,}00\ \text{t}}$$

178,24 t

Valeur maximale de $F_{4\ \text{Gauche}}$ sous les surcharges : 178,24 t

8.5 *Diagrammes des efforts intérieurs pour le cas de charge n° 4* (fig. 18).

Les valeurs des efforts au droit des axes des appuis sont lues sur le tableau 10.

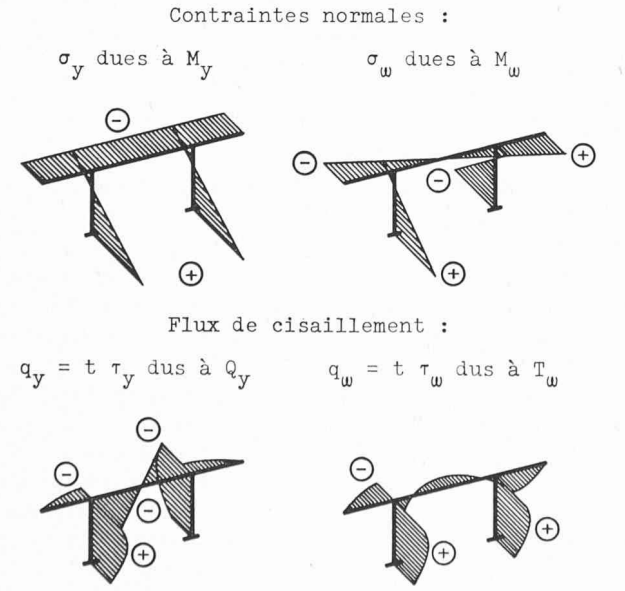


Fig. 19. — Diagrammes des contraintes dans une section transversale du pont, en travée.

Efforts dans les travées isostatiques selon les formules (5.1) :

$$M_2{}^{(o)}{}_{\max} = \frac{6{,}52 \cdot 55^2}{8} = 2465{,}4\ \text{tm}$$

$$M_3{}^{(o)}{}_{\max} = \frac{6{,}52 \cdot 50^2}{8} = 2037{,}5\ \text{tm}$$

$$_\omega M_2{}^{(o)}{}_{\max} = \frac{-6{,}52 \cdot 1{,}10 \cdot 55^2}{8} = -\ 2711{,}2\ \text{tm}^2$$

$$_\omega M_3{}^{(o)}{}_{\max} = \frac{-6{,}52 \cdot 1{,}10 \cdot 50^2}{8} = -\ 2240{,}6\ \text{tm}^2$$

Diagrammes des efforts au droit des appuis :

$$\Delta M_{\text{appui 3}} = \frac{6{,}52 \cdot 10^2}{8} = 81{,}5\ \text{tm}$$

$$\Delta_\omega M_{\text{appui 3}} = \frac{6{,}52 \cdot 1{,}10 \cdot 10^2}{8} = 89{,}7\ \text{tm}^2$$

Au droit de chaque appareil d'appui le diagramme des efforts tranchants présente une discontinuité égale à la valeur de la réaction d'appui que l'on lit sur le tableau 11.

De même, au droit de chaque appareil d'appui, le diagramme des moments de torsion présente une discontinuité égale au couple de torsion dû à la réaction d'appui.

Par exemple :

$T_\omega = +\ 33{,}6$ tm.

$F_{2\ \text{Gauche}} = 49{,}7$ t => $\Delta T = 49{,}7 \cdot 5{,}00 = 248{,}5$ tm

T_ω à droite de l'appareil d'appui 2 Gauche :

$$33{,}6 + 248{,}5 = 281{,}1\ \text{tm}.$$

8.6 *Calcul des contraintes dans la section au droit de l'appui 3 Droite sous le cas de charge n° 4*

Les efforts sont lus sur la figure 18 :

$M_y = -\ 1525$ tm $\qquad M_x = 0$

$Q_y = -\ 62{,}5$ t $\qquad Q_x = 0$

$M_\omega = +\ 3950$ tm^2

$T_\omega = +\ 969{,}7$ tm

Les caractéristiques de la section type 7, le tablier de béton armé tendu étant admis fissuré, ont été calculées à l'aide du programme CME 2. Quelques résultats sont donnés au tableau 12.

TABLEAU 12

Quelques résultats du programme CME 2 pour la section type 7

Point n°	y [m]	ω [m^2]	S_y [m^3]	S_ω [m^4]
N 9 (âme)	+1,349	− 6,801	−0,081	+0,408
N 10	+1,349	− 8,616	~0	~0
N 13	−1,146	+10,213	0	0

$I_{yy} = 0{,}42149$ m^4 ; $I_{\omega\omega} = 10{,}748$ m^6

On a représenté des diagrammes donnant l'allure des contraintes dans les sections transversales ouvertes d'un pont à deux poutres maîtresses (fig. 19).

Nous donnons ci-dessous le calcul des contraintes en quelques points de la section représentée schématiquement à la figure 20. On applique les formules (4.5).

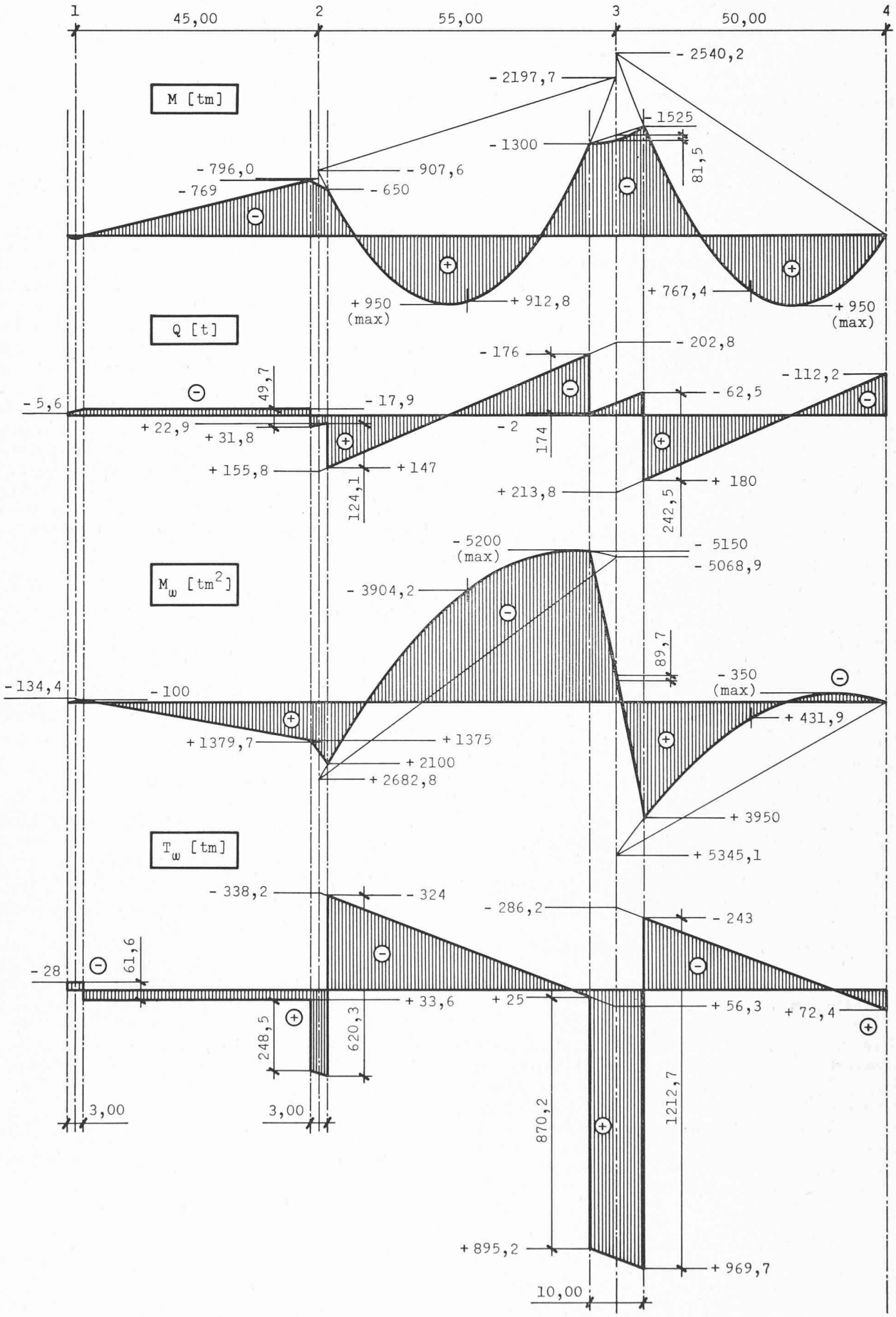


Fig. 18. — Diagrammes des efforts intérieurs ; cas de charge nº 4.

Le sens des flux de cisaillement positifs est indiqué par les flèches (fig. 20).

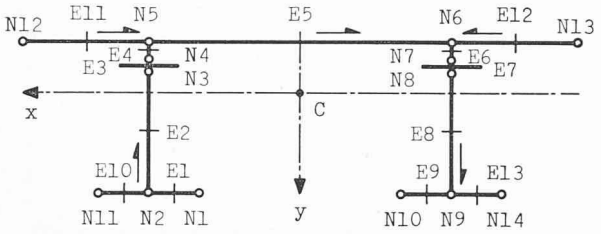


Fig. 20. — Numérotation des points d'une section transversale selon le programme CME 2.

— *Contraintes au nœud N9 dans l'âme :*

$$\sigma = \frac{-1525}{0{,}42149} \cdot 1{,}349 + \frac{3950}{10{,}748} \cdot (-6{,}801) = -4881 - 2499 =$$
$$= -7380 \text{ t/m}^2 = \underline{\underline{-0{,}738 \text{ t/cm}^2}}$$

$$q = -\frac{-62{,}5}{0{,}42149} \cdot (-0{,}081) - \frac{969{,}7}{10{,}748} \cdot 0{,}408 = -12 - 37 =$$
$$= -49 \text{ t/m} = -0{,}49 \text{ t/cm}$$

$$\text{d'où } \tau = \frac{-0{,}49}{1{,}6} = \underline{\underline{-0{,}306 \text{ t/cm}^2}}$$

— *Contrainte au nœud N10 :*

$$\tau = \frac{-1525}{0{,}42149} \cdot 1{,}349 + \frac{3950}{10{,}748} (-8{,}616) = -4881 - 3166 =$$
$$= -8047 \text{ t/m}^2 = \underline{\underline{-0{,}805 \text{ t/cm}^2}}$$

τ est nul à l'extrémité des semelles.

— *Contrainte au nœud N13 :*

$$\sigma = \frac{-1525}{0{,}42149} \cdot (-1{,}146) + \frac{3950}{10{,}748} (+10{,}213) = +4146 +$$
$$+ 3753 = +7899 \text{ t/m}^2 = +0{,}790 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow$$ traction dans les armatures du tablier à l'extrémité du porte-à-faux.

τ est nul à l'extrémité du porte-à-faux du tablier.

9. Conclusion

Dans cet article, nous avons rappelé aussi clairement et brièvement que possible, la théorie de la torsion non uniforme des barres prismatiques, puis nous avons appliqué cette théorie à l'étude du comportement des ponts-biais. Nous avons présenté succinctement un programme de calcul pour l'ordinateur, outil de travail quasi indispensable à l'étude des ponts-biais continus. A l'aide d'un exemple, nous avons montré de manière concrète, les résultats obtenus au moyen de cette théorie et à l'aide de notre programme électronique, ainsi que la manière d'exploiter ces résultats. Nous espérons ainsi avoir apporté une aide efficace aux ingénieurs des bureaux techniques en leur donnant des informations à la fois nouvelles et directement utilisables.

Compte tenu de certaines approximations justifiées par les simplifications qu'elles ont apporté à notre étude, nous avons appliqué la théorie et les équations de la barre prismatique en torsion non uniforme au cas de la barre non prismatique, c'est-à-dire au cas du pont à section transversale d'inertie variable. Nous espérons qu'un travail de doctorat entrepris depuis peu, sous la direction du professeur Jean-Claude Badoux, apportera des renseignements nouveaux et plus précis quant à l'exactitude d'une telle approximation par rapport aux méthodes de calcul dites exactes, comme celle des éléments finis. On pourrait penser qu'une étude telle que la nôtre, même suffisamment approchée, à l'aide d'un modèle de calcul relativement simple, ne présente aucun intérêt face aux possibilités énormes de méthodes de calcul plus exactes, comme celle des éléments finis. Cependant, dans la plupart des cas, un calcul par décomposition de la structure en éléments finis est de loin beaucoup plus coûteux qu'un calcul à l'aide d'un modèle simple, dont la barre par exemple, qui malgré les approximations qu'il comprend, est suffisamment exact pour les besoins de l'ingénieur dans la majorité des cas.

Remerciements

Les auteurs remercient tous les collaborateurs de l'ICOM qui ont contribué à la rédaction de cet article, plus particulièrement M. Fiaux qui a préparé et dessiné les tableaux et les figures, et Mlle Dubois qui a dactylographié le texte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Z. Vlassov : *Pièces longues en voiles minces*. Eyrolles 1962.

[2] Kollbrunner/Basler : *Torsion*. Springer Verlag 1966. Traduction anglaise par E. C. Glauser : Torsion in Structures. Springer Verlag 1969. Traduction française par P.-A. Eperon : Torsion, application à l'étude des structures. Spes 1970.

[3] L. de Loringhoven : *La torsion des poutres*. CM 4 — 1967.

[4] E. Karamuk : *Zur Berechnung dünnwandiger Stäbe mit variablem, offenem Querschnitt*. Thèse EPF-Zürich 1968.

[5] Badoux, Jaccoud, Wüst et Dutoit : *La stabilité des constructions* (chap. 12 sur la torsion). ICOM 1969.

[6] P. Dubas : *Développements suisses récents en matière de ponts mixtes en acier-béton*. Costruzioni Metalliche — n° 1 — 1969.

Adresse des auteurs :
Institut de la Construction métallique de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne
9, chemin des Délices, 1006 Lausanne.