Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 97 (1971)
Heft: 17

Artikel: Programme STRIP pour le calcul des structures en surface porteuse
Autor: Wolf, John P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-71242

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Programme STRIP pour le calcul des structures en surface porteuse

par JOHN P. WOLF, ing. dipl. EPF

1. Introduction

Le programme STRIP (STRuctural Integrated Programs) a été élaboré conjointement par les deux maisons DIGITAL S.A., à Zurich, et Nordisk ADB AB, à Stockholm, durant les années 1966 à 1969. Il se compose de trois programmes intégrés basés sur les mêmes principes. Le premier programme calcule des structures planes formées de barres, le second des structures spatiales formées de barres et le troisième — nommé STEP-S — des structures en surface porteuse (parois, plaques, membranes, coques). Pour chacun de ces programmes, l'utilisateur dispose d'un manuel d'emploi détaillé [1, 2, 3] [2] qui décrit la formulation des données et l'interprétation des résultats et contient un exposé de la théorie de même que les hypothèses y relatives. L'article général [4] est consacré à la préparation orientée des données de STRIP ainsi qu'à la représentation des résultats et comprend, outre certains aspects relatifs à la technique de programmation, un aperçu des problèmes de la statique pouvant être résolus ainsi que des exemples et des informations théoriques. STRIP a été présenté aux ingénieurs suédois en janvier 1968 et en automne de la même année au Groupe professionnel des ingénieurs des ponts et charpentes (GPPC) de la Société suisse des ingénieurs et architectes (SIA) [5].

Le présent article constitue un complément de l'exposé [4] relatif au programme de calcul des structures en surface porteuse ; nous ne parlerons pas ici des deux programmes traitant du calcul des structures formées de barres. STRIP utilise la méthode des éléments finis qui, entre autres choses, rend possible le calcul de structures en surface porteuse quelconques. STRIP convient également à l'analyse d'ossatures importantes. Ainsi, on a récemment calculé une structure en surface porteuse comportant 3000 nœuds, ce qui conduit à un système d'équations présentant environ 10 000 inconnues. Les caractéristiques du modèle de calcul utilisé — nommé « modèle hybride (fonction de contrainte) » — seront brièvement décrites par la suite. Puis nous représenterons la précision des résultats obtenue avec diverses divisions en éléments pour des systèmes porteurs présentant en partie des singularités, dont les solutions théoriques sont connues, et nous comparerons celle-ci à la précision des deux éléments finis « purs », à savoir le modèle de déplacement et le modèle d'équilibre. Enfin, après une courte description du programme, nous présenterons les résultats obtenus pour trois exemples pratiques : un pont-dalle, une pièce à profil fermé déformable et un paraboloïde hyperbolique. Ces résultats seront confrontés soit à des valeurs théoriques, soit à des résultats de mesures issus d'essais sur modèles.

[1] Conférence donnée le 3 février 1971 dans le cadre de la journée d'étude organisée par la SVIA, à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et consacrée aux éléments finis.

[2] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, en fin d'article.

2. Aspects théoriques

STRIP utilise un modèle hybride (fonction de contrainte) que nous avons développé en été 1966 à partir d'un premier article de Pian [6]. Depuis lors, plusieurs publications ont paru à ce sujet [7 à 14]. Dans ce qui suit, nous discuterons brièvement les hypothèses relatives à ce modèle hybride et mettrons en évidence les relations existant avec les deux modèles « purs », les modèles de déplacement et d'équilibre. Nous suivrons en substance la présentation de la référence [3] (p. 167-184), en utilisant pour l'illustration l'élément de plaque fléchie.

De la même manière que dans le cas d'un modèle d'équilibre (voir par exemple [15]), nous partons d'une fonction de contrainte sur l'élément fini qui satisfait en chaque point de l'élément les équations différentielles (en général inhomogènes) de l'équilibre. Pour l'élément de plaque de la figure 1, on peut utiliser, par exemple, la fonction d'efforts intérieurs quadratique suivante (simplification : élément non chargé) :

$$m_x\,(x, y) = \beta_1 + \beta_2\,x + \beta_3\,y + \beta_4\,x^2 + \beta_5\,xy + \beta_6\,y^2,$$

$$m_y\,(x, y) = \beta_7 + \beta_8\,x + \beta_9\,y + \beta_{10}\,x^2 + \beta_{11}\,xy + \beta_{12}\,y^2,$$

$$m_{xy}(x, y) = \beta_{13} + \beta_{14}\,x + \beta_{15}\,y + \beta_{16}\,x^2 - (\beta_4 + \beta_{12})xy + \beta_{17}\,y^2.$$

Les 17 valeurs des coefficients β sont des inconnues. Les axes x-y constituent un système de coordonnées locales de l'élément (voir fig. 1). Les deux efforts tranchants q_x et q_y sont obtenus à l'aide des deux conditions d'équilibre des moments :

$$q_x(x, y) = m_{x,x} + m_{xy,y} = \beta_2 + \beta_{15} + (\beta_4 - \beta_{12})x + (\beta_5 + 2\beta_{17})y,$$

$$q_y(x, y) = m_{xy,x} + m_{y,y} = \beta_9 + \beta_{14} + (\beta_{11} + 2\beta_{16})x + (-\beta_4 + \beta_{12})y.$$

La condition de composantes

$$q_{x,x} + q_{y,y} = m_{x,xx} + m_{y,yy} + 2m_{xy,xy} = 0$$

est identiquement satisfaite.

Des conditions de bord statiques peuvent être introduites dans les fonctions d'efforts intérieurs des éléments de bord de la construction et le long de joints. STRIP peut dans tous les cas faire usage de cette possibilité. Comme cela est montré plus loin, la précision obtenue peut, par ce moyen, être augmentée dans de nombreux cas pour une division en éléments donnée (fig. 5 et 10). Par exemple, si le bord 1-2 (fig. 1) est appuyé librement, nous avons $m_n = m_y = 0$, et alors β_7, β_8 et β_{10} s'annulent. Il en résulte que quatorze coefficients β seulement apparaissent dans les calculs.

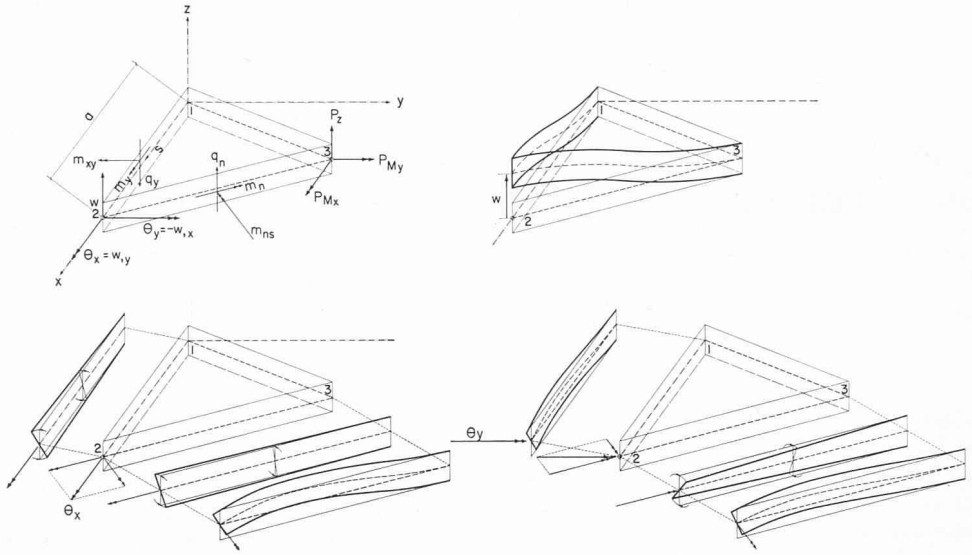


Fig. 1. — Modèle hybride : on choisit une fonction d'efforts intérieurs en équilibre ainsi que une fonction de déformations le long des bords, totalement indépendante de la première et coïncidant avec celle de l'élément voisin.

En général, la répartition admise des efforts intérieurs ne permet pas de déterminer un champ de déformation — dans notre exemple, le déplacement vertical w — ordonné sur l'élément, c'est-à-dire que les relations déformations-efforts intérieurs ne peuvent pas être intégrées.

$$m_x = -D(w_{,xx} + \nu \cdot w_{,yy}),$$
$$m_y = -D(w_{,yy} + \nu \cdot w_{,xx}),$$
$$m_{xy} = -(1-\nu) \cdot D \cdot w_{,xy},$$
$$D = \frac{E\,t^3}{12(1-\nu^2)}.$$

En d'autres termes, la condition de compatibilité n'est pas satisfaite :

$$m_{x,yy} - \nu \cdot m_{x,xx} + m_{y,xx} - \nu \cdot m_{y,yy} - 2(1+\nu) \cdot m_{xy,xy} = \\ = 2\beta_4 + 2\beta_6 + 2\beta_{10} + 2\beta_{12} \neq 0.$$

Par ailleurs, dans le modèle hybride, une fonction de déformation totalement indépendante de la répartition admise des efforts intérieurs est introduite. Cette fonction est ainsi choisie que chaque point de bord de deux éléments voisins subit la même déformation si les déformations aux nœuds concordent. La même exigence a été formulée pour les modèles du type déplacement conforme. Il est cependant beaucoup plus difficile de choisir des fonctions de déformation satisfaisant à des exigences supplémentaires sur l'élément [15], et non pas seulement le long des bords, surtout lorsque — comme cela se présente dans la flexion des plaques — la flèche et la pente transversale (rotation), lesquelles ne peuvent présenter aucune discontinuité sur la ligne de séparation, sont liées entre elles sur la base des hypothèses de Kirchhoff. Dans le cas de l'élément de plaque (voir fig. 1), trois degrés de liberté sont introduits à chaque nœud : une flèche et deux rotations. Les déformations aux nœuds ont un effet seulement sur les déformations des deux bords adjacents. La flèche w (fig. 1, à droite, en haut) au nœud 2 entraîne des déformations de bords données par des paraboles cubiques (nœud 2 : flèche $= w$, rotation $= 0$; nœuds 1 et 3 : flèche = rotation $= 0$), cependant que les pentes transversales sont nulles (rotations). La rotation θ au nœud est décomposée vectoriellement en composantes perpendiculaire et parallèle au bord considéré : voir par exemple, pour le côté 2-3, la figure 1 en bas. L'une des composantes entraîne une déformation du bord donnée par une parabole cubique (nœud 2 : rotation = composante, flèche = 0 ; nœud 3 : flèche = rotation = 0), sans pente transversale, alors que l'autre composante entraîne une pente transversale décroissant linéairement (nœud 2 : pente transversale = composante ; nœud 3 : pente transversale = 0), sans déformation verticale du bord. Ainsi, par exemple, les déformations w, θ_x, θ_y au nœud 2 produisent — le long du bord 1-2 d'orientation particulière relativement au système de coordonnées local x, y — la déformation verticale $w_{1\text{-}2}$ et la pente transversale $\theta_{n1\text{-}2}$ ($= \theta_x$) suivantes :

$$w_{1\text{-}2}(s) = \left[3\left(\frac{s}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{a}\right)^3 \right] w + \left[-\left(\frac{s}{a}\right)^2 + \left(\frac{s}{a}\right)^3 \right] a\theta_y,$$
$$\theta_{n1\text{-}2}(s) = \frac{s}{a} \cdot \theta_x.$$

La flèche le long d'un bord quelconque est représentée par une parabole cubique dont les quatre coefficients sont fixés par la flèche et la rotation — au moyen d'un vecteur perpendiculaire au bord — des deux nœuds d'extrémité ; la pente transversale varie linéairement et est déterminée par la rotation dont le vecteur est parallèle au bord considéré.

Etant donné que les nœuds n'ont pas été choisis comme dans les modèles d'équilibre, de manière telle que les efforts intérieurs agissant dans la surface commune à deux éléments voisins soient continus, des discontinuités des efforts intérieurs apparaissent ; par conséquent, les conditions d'équilibre sont — dans le modèle hybride et bien que les efforts intérieurs agissant sur l'élément soient en équilibre — seulement macroscopiquement satisfaites. Il est à remarquer que, dans les modèles d'équilibre, les conditions d'équilibre sont satisfaites microscopiquement mais que, cependant, le champ d'efforts intérieurs n'est pas continu puisque les efforts intérieurs le long d'un bord, agissant dans une surface perpendiculaire, font apparaître des discontinuités d'un élément à l'autre. Le nombre de degrés de liberté est en général plus petit que pour le modèle d'équilibre présentant une même fonction d'efforts intérieurs ([16], p. 101). Par le fait que les termes des fonctions de

déformation et d'efforts intérieurs peuvent être choisis indépendamment les uns des autres, les instabilités apparaissant dans certains modèles d'équilibre sont évitées [10].

Par l'application d'une forme modifiée du principe du minimum de l'énergie complémentaire (principe des travaux virtuels), nous pouvons déterminer les matrices de rigidité, les matrices « efforts intérieurs - déformations » et les matrices des charges [6, 10, 11, 12]. Il en résulte que les déformations choisies le long des bords constituent des « poids » dans l'intégration des efforts intérieurs de bord pour la détermination des efforts concentrés généralisés ; l'indépendance des efforts intérieurs de bord vis-à-vis des déformations de bord se manifeste donc favorablement sur la précision. Un principe de variation est présenté dans la référence [11] ; la convergence est strictement démontrée. On s'aperçoit que la convergence apparaît également lorsque la fonction d'efforts intérieurs ne tient pas compte des conditions de bord statiques.

	champ de déplacement à l'intérieur	déplacement de bord	équilibre à l'intérieur	équilibre de bord
modèle du type déplacement conforme	oui	oui	non	non
modèle du type déplacement (nombre infini de coeff. de déplacements internes)	oui	oui	oui	non
modèle hybride (nombre infini de coeff. de contraintes internes)				
modèle hybride	non	oui	oui	non
modèle du type équilibre	non	non	oui	oui

même déplacement de bord

assouplissement

même fonction de contraintes

Fig. 2. — Propriétés physiques parfaitement satisfaites (indication oui) ou satisfaites seulement en moyenne — en vertu des principes énergétiques — (indication non) des divers types d'éléments finis. Le modèle hybride est plus souple que le modèle de déplacement compatible, trop rigide, présentant la même fonction de déformation de bord et plus rigide que le modèle d'équilibre présentant la même fonction d'efforts intérieurs (tiré de la référence [12]).

Dans la figure 2, tirée de l'article [12], les propriétés du modèle hybride ont été représentées d'une manière condensée et comparées à celles du modèle de déplacement conforme et du modèle d'équilibre. De Veubeke a montré (voir, par exemple, la référence [15]) que pour le modèle de déplacement conforme, respectivement le modèle d'équilibre, le travail de déformation ou, ce qui revient au même, le produit de toutes les charges et déplacements de la solution approximative est plus petit, respectivement plus grand, que celui de la solution exacte ; le résultat est alors trop rigide, respectivement trop souple. Avec le modèle hybride, le résultat peut être trop rigide ou trop souple. Mais il apparaît que le modèle hybride donne une solution qui, d'une part, est plus rigide que celle trop souple du modèle d'équilibre présentant la même fonction d'efforts intérieurs et, d'autre part, plus souple que celle trop rigide du modèle de déplacement conforme présentant la même fonction de déformation de bord. Ci-après, nous exposerons les motifs à la base de cette constatation ; la preuve exacte est contenue dans la référence [14].

Dans un modèle d'équilibre, la fonction d'efforts intérieurs détermine les efforts généralisés et, par conséquent, les déformations généralisées. Le modèle hybride présentant la même fonction d'efforts intérieurs est certainement plus rigide, car les déformations de bord prescrites, indépendantes de cette fonction, doivent être satisfaites (fig. 2).

Dans un modèle de déplacement, des nœuds internes peuvent être introduits sans modifier pour cela la déformation le long du bord (origine). Ils peuvent être éliminés au moyen du procédé statique de condensation (voir, par exemple, [17]). Les écarts apparaissant dans les conditions d'équilibre interne deviennent donc plus petits. La solution s'approche de la solution exacte ; elle devient plus souple. Si l'on choisit un nombre infini de nœuds, les conditions d'équilibre interne sont satisfaites (fig. 2). Si, dans un modèle hybride, le nombre de coefficients de contraintes est augmenté, l'erreur diminue dans la condition de compatibilité et la solution devient plus rigide. Si un nombre infini de coefficients de contraintes est introduit, la condition de compatibilité est satisfaite et il existe un champ de déformation. Si, de plus, la déformation de bord du modèle hybride présentant un nombre infini de coefficients d'efforts intérieurs concorde avec celle du modèle de déplacement compatible et que celui-ci a été formé au moyen d'un nombre infini de nœuds internes, les deux solutions coïncident (fig. 2). Il en résulte que le modèle hybride (comportant un nombre fini de coefficients de contraintes) est plus souple que le modèle de déplacement conforme présentant la même déformation de bord.

3. Précision des résultats

Considérons, comme premier exemple (fig. 3), la plaque carrée appuyée librement, soumise à une charge concentrée en son centre. Dans ce cas, la flèche sous la charge représente une mesure du travail de déformation. Dans le modèle hybride, la condition de bord statique $m_n = 0$

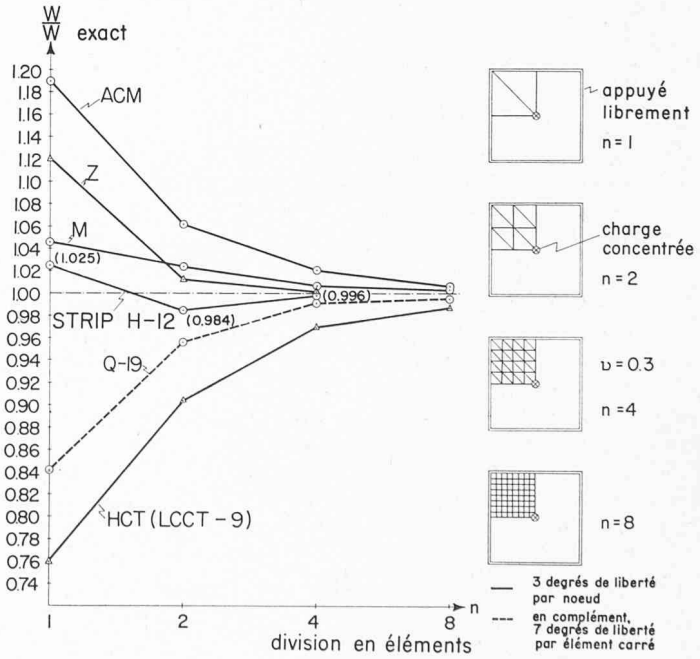


Fig. 3. — Comparaison de la convergence de la flèche (et par conséquent, dans ce cas particulier, de l'énergie de déformation) au droit d'une charge concentrée agissant sur une dalle appuyée librement. Quelle que soit la division en éléments adoptée, le comportement du modèle hybride est meilleur que celui d'autres éléments finis comportant trois degrés de liberté par nœud.

est introduite dans la fonction d'efforts intérieurs des éléments finis qui confinent aux bords appuyés librement (voir paragraphe 2). Nous avons reporté les valeurs non dimensionnelles de la flèche pour les divisions en éléments données à la figure 3. Dans le cas des éléments de forme carrée H-12 du modèle hybride, les valeurs de la flèche (et par conséquent celles du travail de déformation) sont soit trop grandes (division en éléments $n = 1$), soit trop petites ($n = 2$, $n = 4$). A titre de comparaison, nous avons donné les résultats d'autres éléments finis présentant trois degrés de liberté à chaque nœud. Nous désignons par HCT [18] un modèle de déplacement conforme de forme triangulaire et Q-19 [19] un modèle de déplacement conforme de forme carrée, constitué par quatre éléments triangulaires, assemblés par élimination de sept degrés de liberté (processus de condensation statique). Les notations Z [20], respectivement ACM [18, 21] désignent un modèle de déplacement non conforme, de forme triangulaire, respectiment carrée. Ces derniers modèles ne convergent toutefois pas nécessairement dans le domaine des solutions rigides. M [22] caractérise un élément découvert sur la base de réflexions physiques. De tous les éléments finis comportant trois degrés de liberté par nœud, le modèle hybride est celui dont le comportement est le meilleur.

Dans le but d'établir également une comparaison avec d'autres éléments finis, reportons (voir fig. 4) en abscisse le nombre d'équations avant l'introduction des conditions de bord géométriques, qui constitue un étalon de mesure du travail à effectuer pour le calcul. En plus des résultats relatifs aux éléments finis HCT [18] et Q-19 [19] présentant trois degrés de liberté par nœud, nous avons reporté ceux obtenus par d'autres modèles de déplacement conforme prenant en considération soit des nœuds supplémentaires au milieu des côtés (modèles LCCT-12 [19] et CQ [23]), soit des dérivées d'ordre supérieur constituant des degrés de liberté supplémentaires aux nœuds (modèles Q-16 [24] et T-18 [25]), soit encore les deux ensemble (modèle T-21 [25, 26, 27]). Les degrés de liberté de ces différents modèles sont indiqués à la figure 4. Les résultats du modèle d'équilibre EQT [28] présentant une répartition linéaire des moments ainsi que de deux modèles mixtes reposant sur le principe de Reissner — M-6 [29] dont la répartition des moments est constante et celle de la flèche linéaire, et M-12 [30] comportant une répartition linéaire des moments et une répartition quadratique de la flèche — sont également représentés. En outre, parallèlement au modèle STRIP H-12, apparaît un autre modèle hybride H-16 [12], lequel travaille également avec une répartition quadratique des

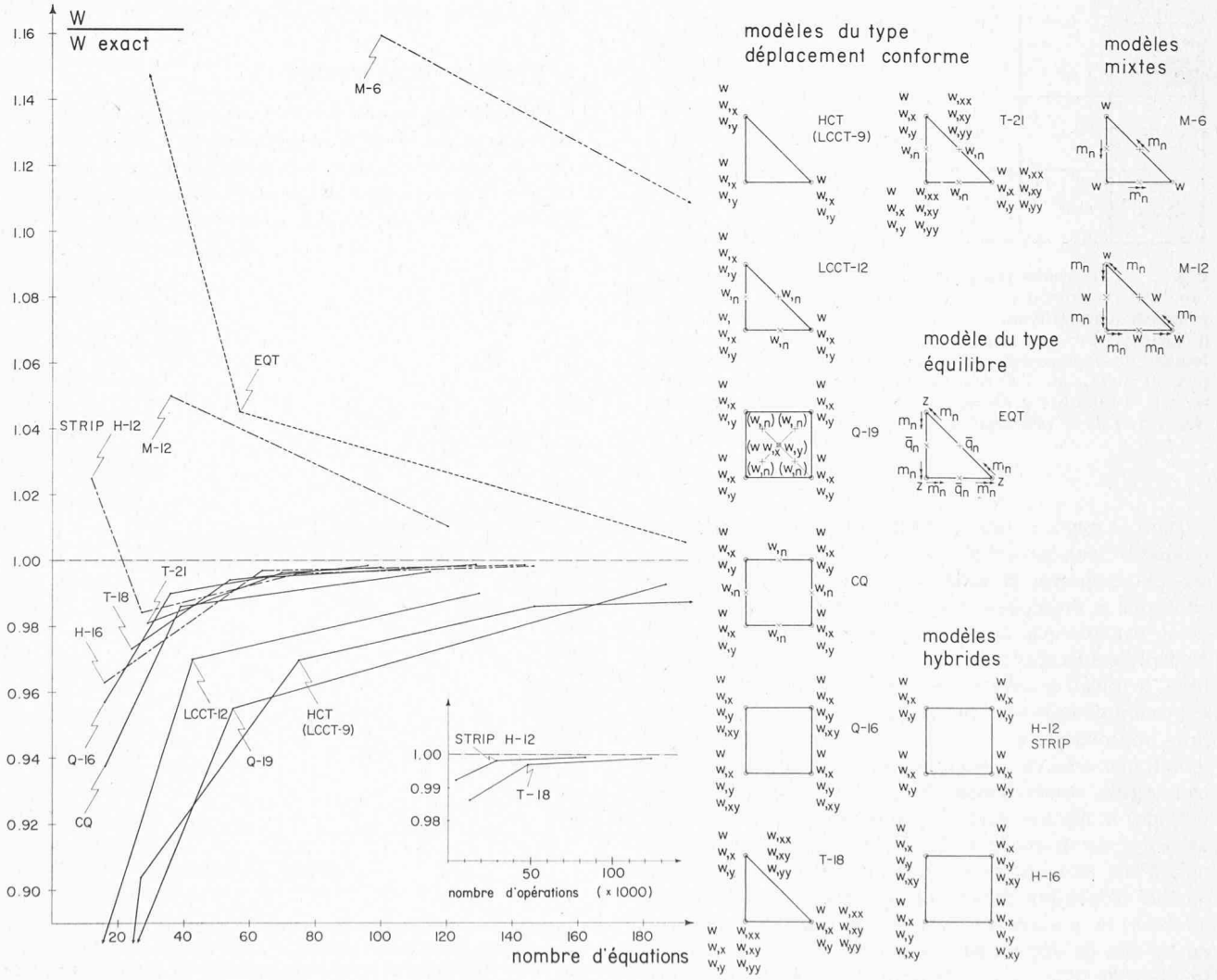
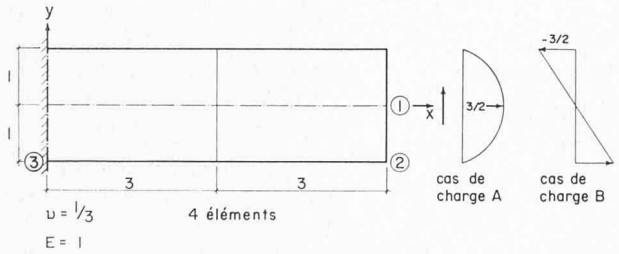


Fig. 4. — Plaque appuyée librement, soumise à une charge concentrée. Comparaison de la flèche verticale au droit de la charge — en fonction du nombre d'équations — obtenue à l'aide de divers éléments finis.

moments ; toutefois, dans le cas de ce dernier élément, une cubique a également été choisie pour la pente transversale (rotation) θ_n le long des bords et non pas seulement pour la flèche w. Remarquons que la condition de bord statique n'a pas été introduite dans la fonction d'efforts intérieurs de ce modèle hybride. Il ressort de la figure 4 que les modèles hybrides conduisent environ à la même précision que les modèles de déplacement conforme T-18 et T-21 présentant un polynôme du 5e degré ; tous les autres modèles fournissent des résultats de qualité inférieure pour un nombre donné d'équations. Si nous choisissons un étalon de mesure du travail plus sévère, à savoir le nombre d'opérations essentielles intervenant au cours de la résolution du système d'équations — lequel nombre est égal au produit du nombre d'inconnues par le carré de la largeur de bande — alors le comportement de H-12 est meilleur que celui de T-18 (voir fig. 4, au milieu, en bas). Il faut souligner que, pour le cas considéré, le modèle hybride (fonction de contrainte) travaillant sans l'inclusion des conditions de bord statiques fournit pratiquement les mêmes résultats que le modèle hybride [31] (fonction de déformation), lequel travaille avec une fonction de déformation sur l'élément ainsi qu'avec une fonction de déformation et une fonction d'efforts intérieurs le long du bord, choisies indépendamment de la première.

La paroi en porte-à-faux ([3], voir p. 187-188), représentée à la figure 5, a été calculée avec quatre éléments de type hybride seulement, pour une charge extérieure verticale parabolique et un moment fléchissant « réparti linéairement », en tenant compte ou non des conditions de bord statiques. Les valeurs exactes de la théorie de l'élasticité sont données (selon le mode de formulation des conditions de bord dans la section encastrée, on obtient des flèches différentes pour l'un des cas de charge). Il apparaît que l'introduction des conditions de bord statiques, et par



		théorie de l'élasticité		modèle hybride STRIP			
				les conditions de bord statiques non incluses		les conditions de bord statiques incluses	
		cas de charge		cas de charge		cas de charge	
		A	B	A	B	A	B
déformation verticale au point ①		2160÷ 3120	270.0	1291.8	151.4	2426.3	262.9
contraintes au point ②	σ_x	0.	1.5	2.5	.8	0.	1.5
	σ_y	0.	0.	.2	−.1	0.	0.
	τ	0.	0.	−.3	−.4	0.	0.
contraintes au point ③	σ_x	18.0	1.5	7.4	.8	19.6	1.6
	σ_y	0.	0.	.1	.0	0.	0.
	τ	0.	0.	4.9	.4	0.	0.

Fig. 5. — Dans le cas d'une paroi en porte-à-faux, l'introduction des conditions de bord statiques dans le modèle hybride, c'est-à-dire leur formulation dans la fonction d'efforts intérieurs, améliore fortement les résultats.

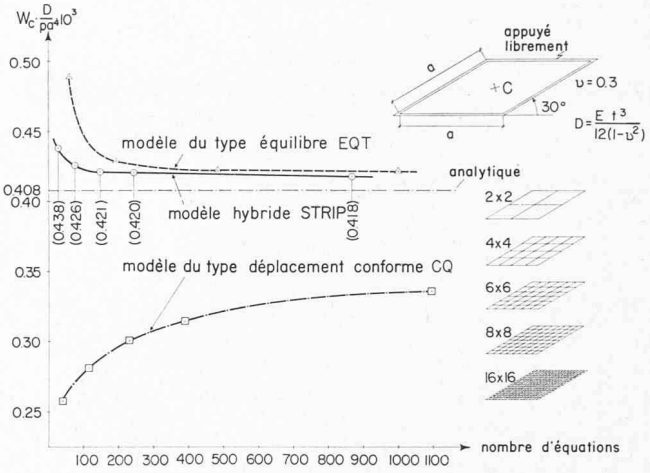


Fig. 6. — Plaque biaise appuyée librement, soumise à une charge uniforme. Comparaison de la flèche verticale au centre de la plaque — en fonction du nombre d'équations — obtenue à l'aide du modèle hybride avec conditions de bord statiques, d'un modèle de déplacement conforme et d'un modèle d'équilibre.

conséquent d'une modification de la fonction d'efforts intérieurs (voir paragraphe 2), améliore considérablement les flèches et contraintes obtenues. Les fonctions d'efforts intérieurs et de déformation de bord de l'élément de disque utilisées dans STRIP sont données à la référence [3], p. 172 ff.

On sait que le moment d'une dalle soumise à une charge concentrée est infiniment grand au droit de cette charge. Dans le premier exemple, cette singularité ne s'est pas manifestée sur la précision de la flèche (fig. 3 et 4). Comme autre exemple comportant une singularité, considérons la plaque biaise appuyée librement et soumise à une charge uniformément répartie. Selon la théorie de Kirchhoff, les moments fléchissants sont infiniment grands à l'angle obtus (voir fig. 8 [32, 33]). Cette singularité est très marquée ; même dans la théorie des plaques de Reissner, l'un des moments principaux est infini dans le cas où les mêmes

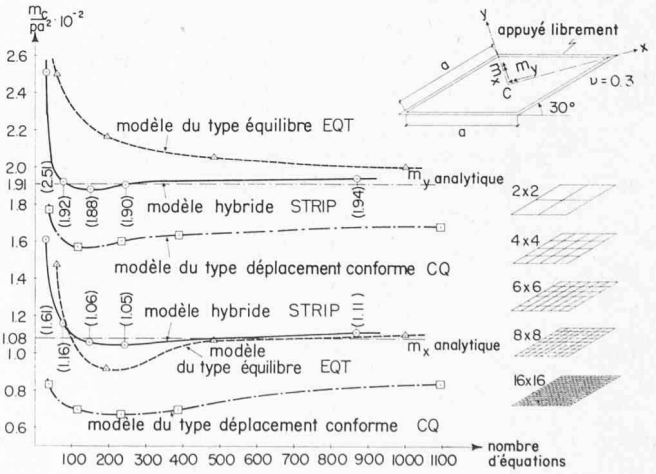


Fig. 7. — Plaque biaise appuyée librement, soumise à une charge uniforme. Moments principaux au centre de la plaque, en fonction du nombre d'équations. La comparaison du modèle hybride comportant les conditions de bord statiques avec un modèle de déplacement conforme et un modèle d'équilibre montre que le comportement du premier est le meilleur ; en outre, les résultats du modèle hybride sont bons même pour de très grossières divisions en éléments.

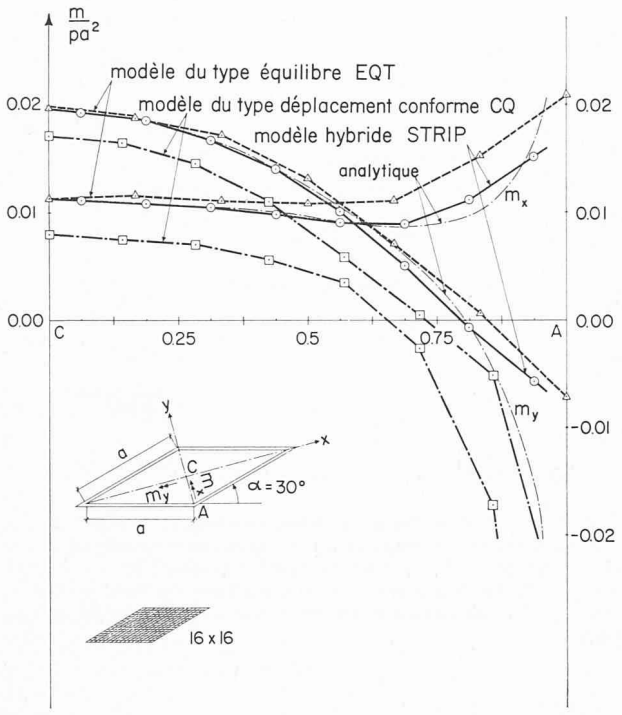


Fig. 8. — Plaque biaise appuyée librement, soumise à une charge uniforme. Répartition des moments principaux, du centre à l'angle obtus de la plaque. Le modèle hybride avec formulation des conditions de bord statiques réagit mieux envers la singularité existant à l'angle obtus que le modèle d'équilibre et surtout que le modèle de déplacement conforme considérés.

conditions de bord que Kirchhoff sont introduites [16], p. 186. Il n'existe pas de solution exacte ; celle de Morley [34], qui utilise un développement en séries dont les coefficients sont déterminés au moyen de la méthode des moindres carrés, est très précise. Examinons de quelle manière le modèle hybride STRIP, le modèle de déplacement conforme CQ [23] et le modèle d'équilibre EQT [28] réagissent face à cette singularité.

Dans le cas du modèle hybride, cinq divisions en éléments — lesquels sont tous des parallélogrammes — ont été introduites (fig. 6). Dans la fonction d'efforts intérieurs des éléments de bord, la condition de bord statique $m_n = 0$ a été introduite le long des bords appuyés librement. A la figure 6, respectivement 7, nous avons représenté les valeurs non dimensionnelles de la flèche, respectivement des moments principaux au centre de la plaque, en fonction du nombre d'équations avant l'introduction des conditions de bord géométriques. Les valeurs des modèles EQT et CQ sont tirées de la référence [16]. Les résultats sont très frappants. Ainsi, dans le cas du modèle de déplacement conforme et même pour la division en éléments la plus fine — un réseau 14×14 conduisant à 1095 inconnues — la singularité se manifeste encore fortement sur les résultats relatifs au centre de la plaque, lequel est pourtant très éloigné de l'angle obtus. La figure 8 met en évidence le comportement de la méthode des éléments finis envers la singularité. La variation des moments fléchissants principaux le long du segment s'étendant du centre de la plaque à l'angle obtus a été représentée pour le modèle CQ (division du réseau 14×14, 1095 inconnues), le modèle EQT (division du réseau 6×6, 481 inconnues) et pour le modèle hybride STRIP (division du réseau 16×16, 867 inconnues). Le modèle hybride présente le meilleur comportement. Dans le cas du modèle de déplacement conforme, de grandes valeurs du moment m_x apparaissent dans le domaine de l'angle obtus. Les discontinuités le long des bords des éléments finis sont très grandes et la valeur moyenne présente même le mauvais signe !

Il est intéressant de constater que des coques dont la surface moyenne comporte une double courbure peuvent être calculées par l'intermédiaire d'éléments finis plans. Un élément isolé fait intervenir un effet de paroi et un effet de plaque agissant indépendamment l'un de l'autre. La liaison de ces deux effets n'est réalisée qu'au droit des nœuds. On peut se poser la question de savoir si les résultats de la coque ainsi calculée — pour une division en éléments toujours plus fine — convergent ou non vers les valeurs exactes. Dans la référence [35], il est montré qu'un arc schématisé par une ligne polygonale se comporte parfaitement dans le cas limite d'éléments de poutre infiniment petits. Si les déformations inconnues apparaissant dans la condition d'équi-

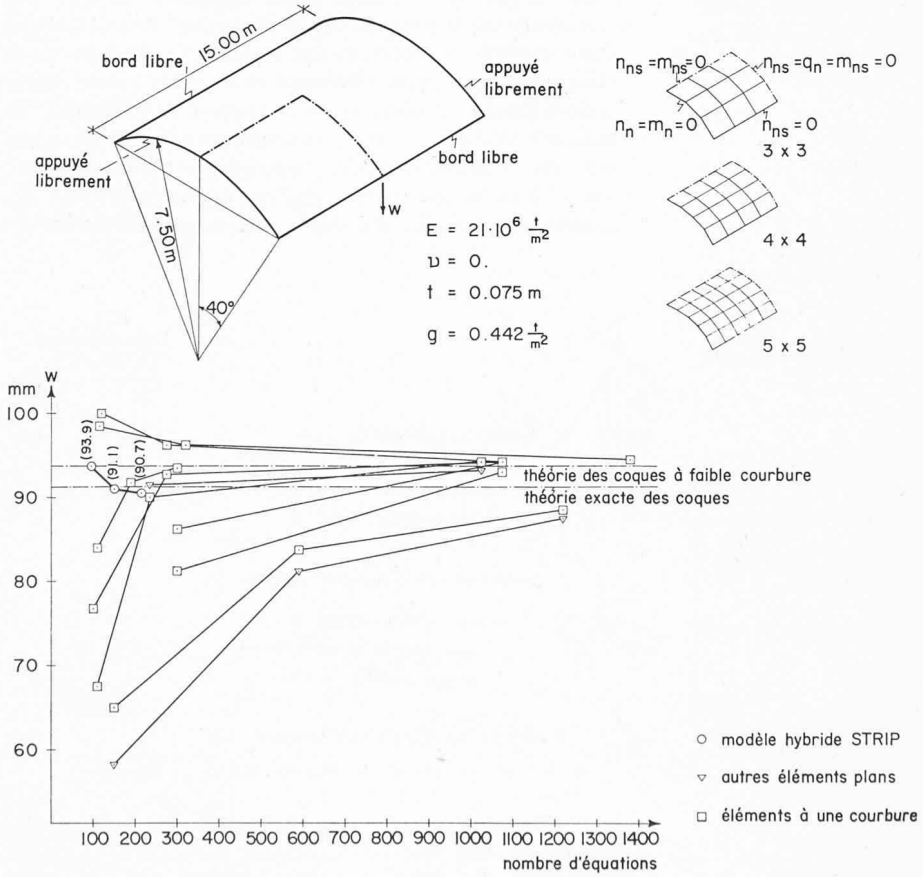


Fig. 9. — Coque cylindrique appuyée librement aux deux extrémités, soumise à son poids propre. Flèche au milieu d'un bord libre en fonction du nombre d'équations. Le modèle hybride à surface moyenne plane fournit, même pour de grossières divisions en éléments, des résultats bien meilleurs que les modèles de déplacement conforme considérés, présentant une surface moyenne plane ou courbe.

libre des éléments finis sont exprimées au moyen de développements en séries de Taylor par les déformations et leurs dérivées au point central, il résulte alors du passage à la limite l'équation différentielle de l'arc avec axe courbe et l'erreur commise par discrétisation s'annule.

Le fait de calculer des structures en coque à l'aide d'éléments finis plans présente l'avantage, outre la formulation simplifiée, d'éviter la difficulté qu'il y a à tenir compte des termes relatifs au comportement rigide, difficulté apparaissant dans les éléments dont la surface moyenne comporte une double courbure. En revanche, il s'ensuit une erreur supplémentaire de discrétisation due à l'écart compris entre le plan moyen des éléments finis et la surface moyenne de la coque. Pour le calcul des coques et membranes, STRIP utilise des éléments finis plans.

La figure 9 montre une toiture cylindrique, librement appuyée aux deux extrémités, pour laquelle nous avons calculé le cas de charge « poids propre ». En raison de la double symétrie, un quart du voile seulement doit être examiné. Les trois divisions en éléments introduites lors du calcul avec le modèle hybride sont également données sur la figure, ainsi que les conditions de bord statiques. De plus, dans cette figure, nous avons représenté la flèche verticale au milieu d'un bord libre en fonction du nombre d'équations avant l'introduction des conditions de bord géométriques. La valeur exacte de cette flèche, déterminée sur la base de la théorie des coques à faible courbure [36] et de la théorie complète des coques [37] est également reportée sur le graphique. De même, à titre de comparaison, nous avons reproduit les résultats obtenus à l'aide de différents éléments finis donnés dans la littérature ; la classification de ces éléments est effectuée selon la nature de leur surface moyenne, plane ou courbe [38, 39].

Le cylindre de la figure 10, appuyé librement et soumis à deux charges concentrées radiales en équilibre, a été analysé à l'aide de STRIP pour diverses divisions en éléments. L'analyse a été exécutée avec et sans formulation des conditions de bord statiques dans la fonction d'efforts intérieurs des éléments de bord. Les conditions de bord statiques ont été introduites comme cela a été démontré plus haut ; le long des deux côtés de l'élément fini voisins de la charge, nous avons utilisé une fonction normale d'efforts intérieurs. Par ce moyen, une introduction judicieuse de la charge est rendue possible. La valeur exacte de la flèche au droit de la charge est tirée de la référence [40]. Le même exemple a été analysé par Key et Beisinger [41] à l'aide de leur modèle de déplacement parfaitement conforme qui travaille avec une surface moyenne courbe, prend en considération le comportement rigide et admet une géométrie quelconque. Les deux graphiques de la figure 10 portent, en ordonnée, la flèche au droit de la charge concentrée et, en abscisse, soit la division en éléments soit le nombre d'équations. Il apparaît que les deux analyses avec le modèle hybride à surface moyenne plane sont plus favorables — à précision égale et en regard du temps de calcul, mesuré par le nombre d'équations — que l'analyse par le modèle de déplacement conforme à surface moyenne courbe. Si le temps de calcul était mesuré en prenant pour étalon le nombre d'opérations nécessaires à l'obtention de la solution du système d'équations — comme cela a été fait dans la figure 4 — cette tendance serait encore plus marquée. Une autre comparaison intéressante est contenue dans la référence [42]. En outre, il est à remarquer que l'introduction des conditions de bord statiques exerce une influence favorable sur la précision, ceci également pour une division en éléments plus fine. La division en éléments 8×8, conduisant à 486 équations donne, avec introduction des conditions de bord statiques, la valeur 0,0121 ; cette valeur n'est atteinte sans modification de la fonction d'efforts intérieurs que pour une division en éléments 20×20, conduisant à 2646 équations (ce cas n'est pas représenté à la fig. 10).

4. Description du programme

Dans ce chapitre, nous donnerons un aperçu technique des problèmes de la statique pouvant être résolus à l'aide du programme STRIP relatif aux structures en surface porteuse. Cet aperçu est suivi d'une description montrant de quelle manière l'ingénieur peut utiliser ce moyen de calcul ; nous étudierons plus particulièrement la préparation orientée des données et la représentation des résultats. Ces explications sont données en complément et comme illustration de la référence [4].

Types de construction : Des éléments tels que parois (états plans de contraintes et dilatations), plaques, membranes et coques peuvent être traités.

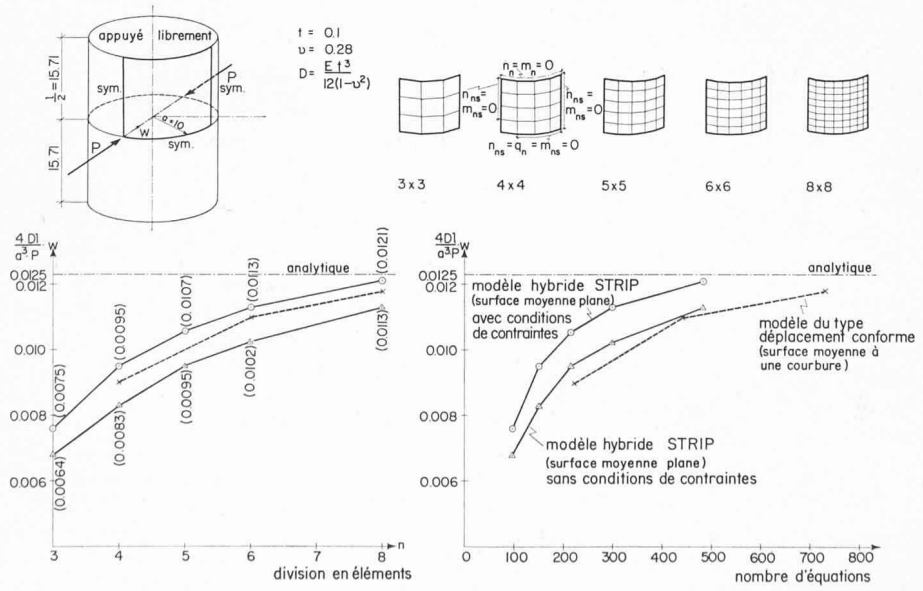


Fig. 10. — Flèche au droit d'une des charges radiales sollicitant un cylindre appuyé librement à ses deux sections d'extrémité. Les résultats donnés par le modèle hybride (surface moyenne plane) avec formulation des conditions d'efforts intérieurs de bord sont plus précis que ceux obtenus sans ces mêmes conditions ; cependant, ces derniers sont encore meilleurs que les résultats d'un modèle de déplacement conforme comportant une surface moyenne courbe.

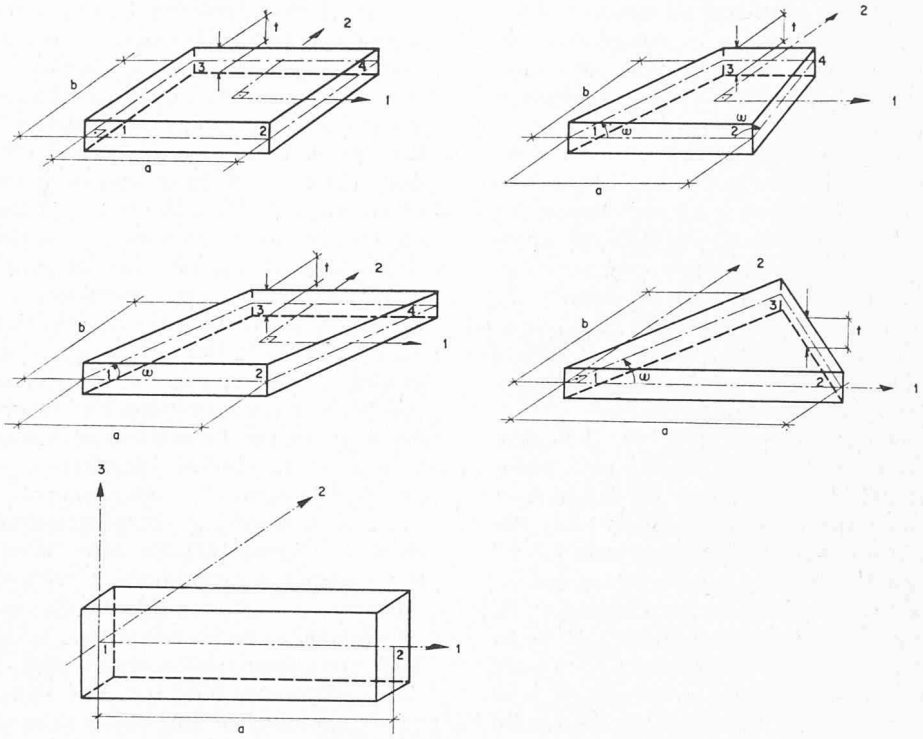


Fig. 11. — STRIP admet simultanément des éléments de surface en forme de rectangles, trapèzes isocèles, parallélogrammes, triangles quelconques ainsi que des éléments de poutres.

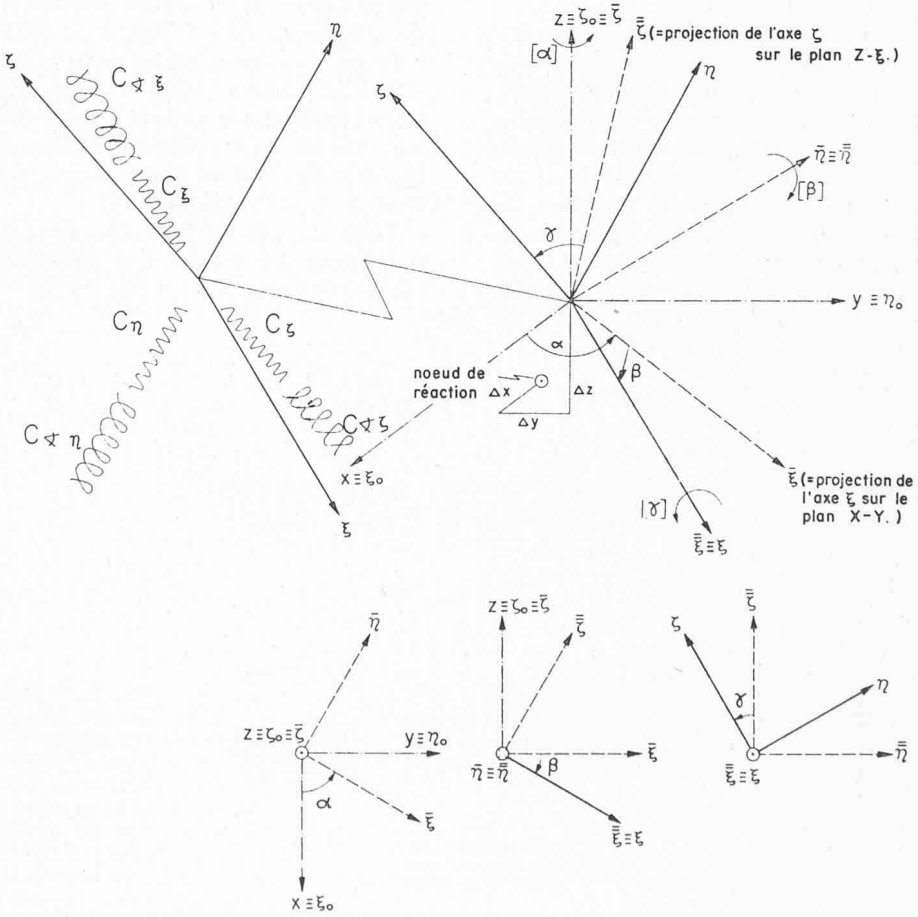


Fig. 12. — Réaction ponctuelle élastique comportant six constantes de ressort C_ξ à $C_{\sphericalangle\zeta}$ — orientée dans l'espace au moyen des trois angles α, β, γ — et reliée au point de réaction par les excentricités Δx, Δy, Δz.

5050 Géométrie du système complet — 5052 Introduction des données — stripsteps

Position du noeud 1)					Eléments structure porteuse plane 2), poutre 3), réaction ponct. 4), réaction lin. 5), joint 6), et articulation ponct. 7)											
Numéro du noeud	Noeud de référence	Coordonnées relatives			Numéro de l'élément	Réaction linéaire/joint entre éléments		Désignation de l'élément-type	Numéro du sommet	Excentricités			Angle d'orientation réaction ponct., poutre		
		x_{rel}	y_{rel}	z_{rel}						Δx	Δy	Δz	α^o	β^o	γ^o
⋮		mm cm m	mm cm m	mm cm m						mm cm m	mm cm m	mm cm m			
	11	16	26	36	46	51	56	61	66	71	6	16	26	36	
START															
10		4.30	2.14	6.25	1000			C	2						
					1100			C	1						
					1001			B	4						
					1101			B	3						
					100			A	3	0.63					
					200			A	1	0.63					
								PRROT		-0.63			0.	0.	0.
START															
11		8.03	2.14	6.25	100			A	4						
					101			A	3						
					200			A	2						
					201			A	1						
ENDE															
1		3.10			1										
REP	3														
15		20.43	2.14	6.25	104			A	4						
					204			A	2						
						104	RAND	SPFRE							
						204	RAND	SPFRE							
ENDE															
10			4.25		100	100									
REP	4														
⋮															

START 8)
ENDE 8)
REP 8)

RAND = 9) E L N R 8)
ENDE = 10)

Fig. 13. — Formulaire de donnée, en langage orienté, pour la description de la géométrie du système complet.

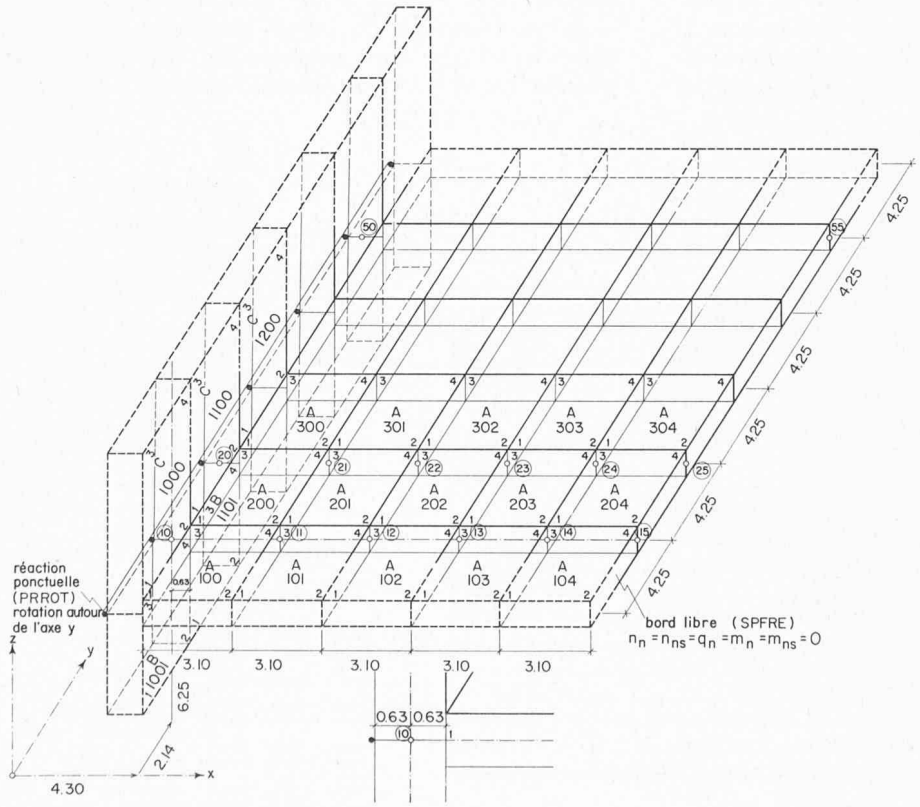


Fig. 14. — Structure dont la géométrie et les conditions d'appuis sont décrites sous forme condensée à la figure 13.

Géométrie et matériau : La forme de la surface moyenne et du bord peut être quelconque. Des évidements peuvent être pris en considération. L'épaisseur de la construction peut être variable. Des joints, présentant également des liaisons élastiques, peuvent être prévus dans des directions quelconques. Des poutres de bord et des poutres intermédiaires, comportant également des articulations (élastiques) peuvent être introduites. Un comportement orthotrope du matériau peut être envisagé ; les quatre constantes et les directions dans lesquelles elles sont définies peuvent changer à l'intérieur du système porteur. Des éléments finis en forme de rectangles, de trapèzes isocèles, de parallélogrammes, de triangles quelconques d'épaisseur variable ainsi que des poutres peuvent être combinés (fig. 11). Par ce moyen, une division du réseau bien adaptée au problème à résoudre peut être choisie. Les conditions d'appuis comprenant des appuis ponctuels et des appuis linéaires sont quelconques ; ces appuis

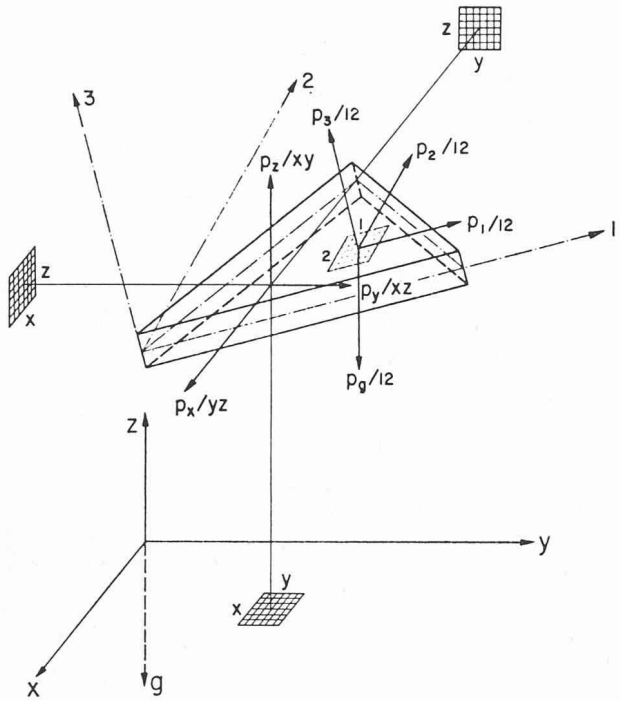


Fig. 15. — La description de la direction des composantes et des surfaces de référence des charges agissant sur les éléments peut être effectuée en se référant soit au système local de coordonnées 1, 2, 3 des éléments, soit au système global x, y, z, soit à la direction g.

peuvent également être élastiques. Des éléments finis, des poutres et des réactions peuvent être reliés excentriquement aux nœuds. Ainsi, des zones rigides sont introduites (voir également fig. 14). Dans la figure 12, à titre d'exemple, un mécanisme de réactions déterminé par six constantes de ressort (C_ξ à $C_{\measuredangle\xi}$) et orienté dans l'espace à l'aide des trois angles α,β,γ est relié au nœud-réaction avec des excentricités Δx, Δy et Δz. De plus, il est possible de spécifier des matrices de rigidité et des matrices « efforts intérieurs-déformation ».

Cas de charge : Des efforts et moments variables, concentrés aux nœuds, des charges réparties orientées de manière quelconque (voir également fig. 15), des variations de température (uniforme, gradient) et des déformations au droit des appuis peuvent agir sur la construction.

Combinaisons de charges : Il est possible de calculer des sommes algébriques et des valeurs limites des efforts intérieurs, ainsi que des réactions et des déformations au moyen des cas de charge isolés qui peuvent être multipliés par des facteurs et également définis alternativement les uns par rapport aux autres (fig. 16).

Résultats : Les résultats obtenus en des points préalablement choisis sont les efforts intérieurs et les efforts intérieurs principaux, les contraintes principales ainsi que leur orientation sur la surface moyenne et sur les fibres supérieure et inférieure, les déformations et enfin les réactions d'appuis. En ce qui concerne les efforts intérieurs aux nœuds (d'autres résultats peuvent être obtenus au centre et au milieu des côtés des éléments), il est possible d'obtenir soit des valeurs moyennes soit les résultats aux nœuds des éléments isolés (fig. 19). Sur demande, l'utilisateur peut obtenir les surfaces d'influence des efforts intérieurs et des réactions dues à une charge verticale, ainsi qu'à des efforts normaux et des moments fléchissants internes, ce qui est très utile pour la détermination de la précontrainte.

L'ingénieur a la possibilité de formuler ses problèmes dans son langage technique tout en restant éloigné le plus possible des instructions propres au computer. Celui-ci ne doit pas seulement exécuter le calcul effectif mais doit également décharger efficacement l'utilisateur dans la préparation des données et l'exploitation des résultats.

L'ingénieur décrit le problème à résoudre sur des formulaires de données en langage orienté, établis de telle manière qu'ils permettent de suivre les réflexions habituelles de la statique. Les mêmes formulaires sont utilisés pour tous les types de construction (fig. 13). Les têtes des tableaux, les figures et les remarques guident l'utilisateur ;

5100 Combinaisons de charges 1)

Combinaison de charge 2)		Cas de charge à combiner			
Désignation	Mode de combinaison 3)	Désignation du cas de charge 4)	Mode de charge	Multiplicateur	Alternance 5)
CH. TOTALE	16	PDS. PROPRE	36	41	51
		ISOLATION		1.9	
FERME	GRWMX	CHOC 1	NUTZ		ALTER
	GRWMY	CHOC2	NUTZ		ALTER
	INTER	CHOC3	NUTZ		ALTER
		PRESSION S	NUTZ	2.2	
OUVERT	GRWMX	CHOC4	NUTZ		ALTER
	GRWMY	CHOC5	NUTZ		ALTER
	INTER	PRESSION S	NUTZ	1.9	
		PRESSION I	NUTZ		
EN SERVICE	GRWMX	CH. TOTALE			
	GRWMY	FERME	NUTZ		ALTER
		OUVERT	NUTZ		ALTER

GRWNX GRWNY GRWNXY GRWN1 GRWN2 GRWN12
GRWMX GRWMY GRWMXY GRWM1 GRWM2 GRWM12
GRWT GRWM GRWQ GRWMB2 GRWMB3 GRWN
GRWQ2 GRWQ3 GRWDX GRWDY GRWDZ GRWR
GRWRXI GRWRET GRWRZE GRWRMX GRWRME GRWRMZ
INTER

STAND
NUTZ

ALTER

stripsteps

Introduction des données

1) 2) 4) 5) Voir au verso

3) Laissé en blanc: Addition algébrique des résultats des cas de charge pris isolément (mode de charge: STAND)

INTER: Résultats intermédiaires d'une combinaison de charge (sans sortie imprimée), laquelle est réutilisée en tant que "cas de charge" dans une combinaison de charge définie plus bas.

GRW...: (GRenzWertlinie) Ligne de la valeur limite, suivie de l'abréviation de l'effort intérieur, de la réaction ou de la déformation, conduit toujours à des valeurs maxima et minima, conjointement aux autres valeurs y relatives (au moins un mode de charge doit être désigné par NUTZ).

Type de construction:

SCHEIBE (disque)	GRWNX	GRWNY	GRWNXY	Efforts intérieurs
	GRWRXI	GRWRET		Réactions
	GRWR			
	GRWDX	GRWDY		Déformations
PLATTE (plaque)	GRWMX	GRWMY	GRWMXY	Efforts intérieurs Eléments de structure porteuse plane
	GRWRZE	GRWRMX	GRWRME	Réactions
	GRWR			
	GRWDZ			Déformations
	GRWT	GRWM	GRWQ	Efforts intérieurs Poutres
MEMBRAN (membrane)	GRWN1	GRWN2	GRWN12	Efforts intérieurs
	GRWRXI	GRWRET	GRWRZE	Réactions
	GRWR			
	GRWDX	GRWDY	GRWDZ	Déformations
SCHALE (coque)	GRWN1	GRWN2	GRWN12	Efforts intérieurs
	GRWM1	GRWM2	GRWM12	Eléments de structure porteuse plane
	GRWRXI	GRWRET	GRWZE	
	GRWRMX	GRWRME	GRWRMZ	Réactions
	GRWR			
	GRWDX	GRWDY	GRWDZ	Déformations
	GRWT	GRWMB2	GRWMB3	Efforts intérieurs
	GRWN	GRWQ2	GRWQ3	Poutres

Fig. 16. — Formulaire de donnée, en langage orienté, pour le choix des combinaisons des charges.

KONTROLLE DER GEOMETRIE (FORTS.)

ELEMENT NUMMER	TYP	FORM	VERBUNDEN MIT KNOTENNUMMERN ECKE 1	ECKE 2	ECKE 3	ECKE 4	EINGABE GROESSEN LAENGE	BREITE	WINKEL	BERECHNETE GROESSEN LAENGE	BREITE	WINKEL
774	T17	TRAP	282	283	292	293	.288	.499	87.499	.288	.499	87.497
775	T17	TRAP	283	284	293	294	.288	.499	87.499	.288	.499	87.540
776	T17	TRAP	284	285	294	295	.288	.499	87.499	.288	.499	87.507
777	T17	TRAP	285	286	295	296	.288	.499	87.499	.288	.500	87.491
778	T18	PARAL	287	288	297	298	.244	.202	64.334	.244	.282	64.334

FEHLER DIESES ELEMENT PASST NICHT IN DEN RAUM, DER IN DER KONSTRUKTION ZUR VERFUEGUNG STEHT
DIE DISTANZEN DES ZUR VERFUEGUNG STEHEHENDEN RAUMES SIND...
1-2 = .244 3-4 = .700 1-3 = .400 2-4 = .250 1-4 = .462 2-3 = .459

Fig. 17. — Contrôle de la géométrie et annonce d'erreur.

il n'est pas nécessaire d'apprendre un langage spécialisé de programmeur ou un langage orienté présentant une grammaire rigoureuse. Les expressions techniques sont reportées directement. Les valeurs à introduire, dont les unités sont laissées au libre choix de l'utilisateur, peuvent être disposées de manière quelconque à l'intérieur d'une colonne ; les points décimaux ne sont pas nécessaires pour les nombres entiers. A titre d'exemple, considérons le tableau de données intitulé « géométrie du système complet » (fig. 13). Les nœuds de la construction (fig. 14) sont inscrits les uns à la suite des autres avec leurs coordonnées, les éléments finis qui leur sont rattachés ainsi que d'éventuelles réactions ponctuelles et conditions de bord statiques.

Ainsi, au nœud 10, apparaissent six éléments 1000, 1001, 1100, 1101, 100 et 200 de trois types différents et une réaction ponctuelle. Cette dernière est reliée excentriquement, tout comme les éléments 100 et 200. Les types d'éléments A, B, C, de la réaction ponctuelle PRROT ainsi que de la condition d'efforts intérieurs de bord SPFRE introduite au nœud 15, sont définis dans d'autres tableaux. Puisque l'on est en présence d'une division régulière du réseau, la géométrie peut être décrite de manière simplifiée. Le long d'une ligne de nœuds semblables, il est suffisant d'en décrire un seul, dans ce cas, par exemple, le nœud 11 ; le début, respectivement la fin de cette ligne est indiqué par l'instruction START, respectivement ENDE. A la ligne suivante, on inscrit les valeurs de progression qui modifient — à chaque répétition — le numéro des nœuds (1), les coordonnées (3,10 ; 0 ; 0) et le numéro des éléments (1) de la ligne de nœuds semblables. A l'aide de l'instruction REP, ces valeurs de progression sont ajoutées aux valeurs de l'origine de la ligne des nœuds considérée et la description des nœuds ainsi obtenue est prise en considération dans l'exécution des calculs. Le chiffre (3) inscrit dans la seconde colonne prescrit le nombre de fois que l'opération doit être effectuée. Au moyen d'une double application de ce procédé, il est possible de décrire la géométrie de l'ensemble de la construction représentée en traits pleins à la figure 14 par les seules instructions données dans le tableau de la figure 13.

Pour éviter tout calcul manuel préalable à l'utilisateur, il existe des possibilités de description alternatives. A titre d'exemple, nous avons reproduit à la figure 15 les directions des composantes et les surfaces de référence des charges agissant sur les éléments.

Les formulaires de données sont remplis pour la géométrie, les constantes des matériaux, les charges ainsi que pour la sélection désirée des résultats. Celle-ci comprend, outre le format du papier, la langue des commentaires associés aux résultats, le nombre de décimales après la virgule ainsi que le plus petit nombre à imprimer, la formulation des combinaisons des cas de charges pour lesquels les résultats doivent être calculés, le genre de résultats — généralement des valeurs limites — ainsi que le choix des sections. De cette manière, une impression inutile

GEOMETRIE DES TOTALSYSTEMES (FORTS.)

KNOTEN NR	KOORDINATEN DES KNOTENS RELATIV ZUM URSPRUNG X	Y	Z	ELEMENTNUMMER	FUGE Zw. ELEMENT NUMMERN	TYP	KECKENR IN KNOTEN	EXZENTRIZITAET IN KNOTEN X	Y	Z	ORIENTIERUNGS WINKEL ALPHA	BETA	GAMMA
10	4.300	2.140	6.250	1000		C	2						
				1100		C	1						
				1001		B	4						
				1101		B	3						
				100		A	3	.630	.000	.000			
				200		A	1	.630	.000	.000			
						PRROT		-.630	.000	.000	0	0	0
11	8.030	2.140	6.250	100		A	4						
				101		A	3						
				200		A	2						
				201		A	1						
12	11.130	2.140	6.250	101		A	4						
				102		A	3						
				201		A	2						
				202		A	1						
13	14.230	2.140	6.250	102		A	4						
				103		A	3						
				202		A	2						
				203		A	1						
14	17.330	2.140	6.250	103		A	4						
				104		A	3						
				203		A	2						
				204		A	1						
15	20.430	2.140	6.250	104		A	4						
				204		A	2						
					104 RAND	SPFRE							
					204 RAND	SPFRE							
20	4.300	6.390	6.250	1100		C	2						
				1200		C	1						
				1101		B	4						
				1201		B	3						
				200		A	3	.630	.000	.000			
				300		A	1	.630	.000	.000			
						PRROT		-.630	.000	.000	0	0	0
21	8.030	6.390	6.250	200		A	4						
				201		A	3						
				300		A	2						
				301		A	1						

Fig. 18. — « Echoprint amplifié » de la géométrie de la construction représentée à la figure 14, qui a été décrite de manière condensée à la figure 13.

PLATTEN MOMENTE GRENZWERTLINIEN (ABSOLUTES KOORDINATENSYSTEM)

KNOTENNR.	ELEMENTNR.	EN SERVICE GRWMY MAX MX	MY	MXY	EN SERVICE GRWMY MIN MX	MY	MXY
1		.0933	.0366	-.0741	-.1494	-.0586	.1187
2		-.2657	.0065	-.2574	.4254	-.0104	.4122
3		-.0091	.0138	-.1966	.0146	-.0221	.3148
10	4	-.5377	.2101	.6794	.3358	-.1312	-.4243
	8	.1608	.2243	-.0058	-.2574	-.3591	.0093
12	5	.1392	.1855	.3696	-.0869	-.1158	-.2308
	6	.2138	.2386	.3570	-.1335	-.1490	-.2229
	9	.2194	.1938	.3479	-.1370	-.1210	-.2173
	10	.1276	.1767	.3656	-.0797	-.1104	-.2283
20		1.4068	.9208	.0278	-.8785	-.5750	-.0174
21		.0094	.0157	.0096	-.0151	-.0251	-.0154

Fig. 19. — Résultats. Les valeurs des enveloppes de l'effort intérieur m_y ainsi que celles correspondantes de m_x et m_{xy} sont imprimées pour les nœuds commandés par l'utilisateur.

Dans le programme, les données sont soumises à un contrôle sévère. Ce contrôle ne comprend pas seulement les erreurs formelles telles que, par exemple, deux points décimaux dans un nombre, mais également des incohérences physiques, par exemple lorsque, dans une plaque, une poutre de bord présentant une excentricité a été introduite perpendiculairement à la surface moyenne. Comme il est possible d'introduire des données surabondantes dans la description du problème, on veillera à ce qu'aucune contradiction n'apparaisse à l'intérieur de certaines limites. Un exemple de cette nature peut se présenter dans l'introduction des coordonnées des nœuds pour la géométrie du système total (fig. 14) et dans celle des dimensions des éléments bidimensionnels. Si une erreur est découverte dans le programme apparaissent également, en plus d'une annonce, les grandeurs données qui l'ont causée. Un exemple d'annonce d'erreur est donné à la figure 17 ; les

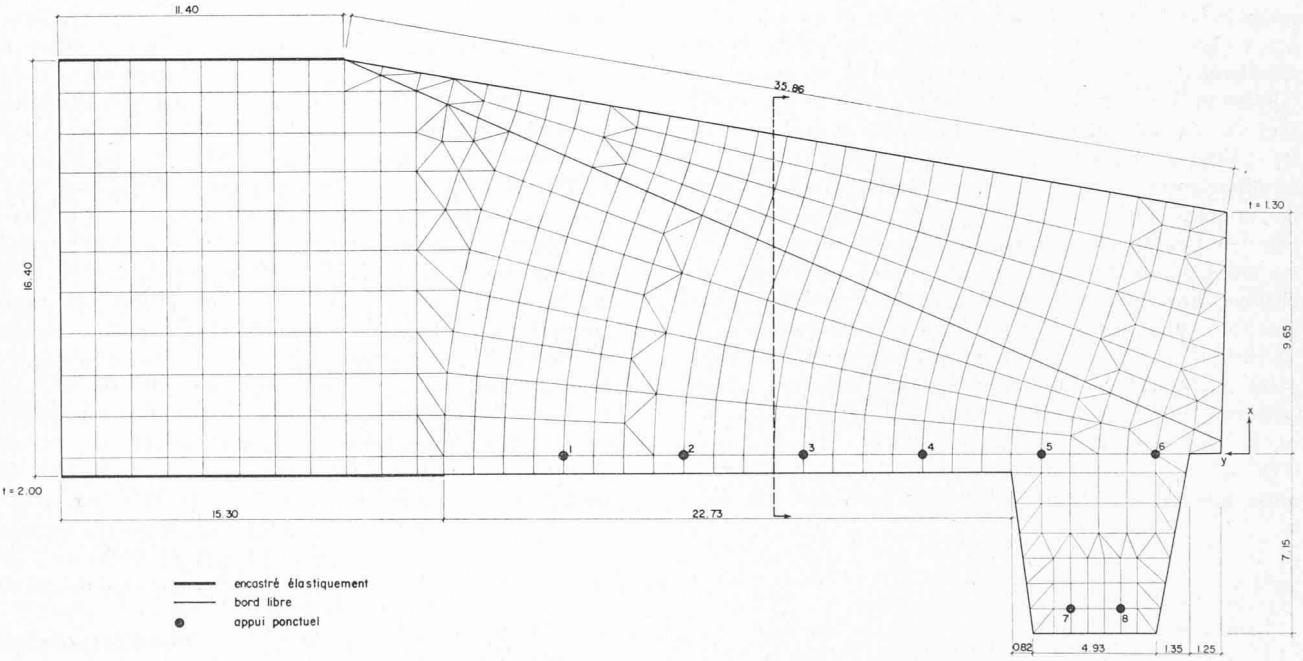


Fig. 20. — Plan, conditions d'appuis et division en éléments (rectangles, triangles et trapèzes isocèles) d'un pont-dalle de chemin de fer, présentant une épaisseur variable.

est évitée, si bien que l'ingénieur n'obtient que les résultats aussi poussés que possible qu'il a lui-même choisis et dont il a besoin pour traiter la suite de son problème.

Dans l'exemple de la figure 16, nous avons donné une sélection de résultats pour les combinaisons des charges intitulées CH. TOTALE et EN SERVICE. La combinaison CH. TOTALE consiste en la somme algébrique des cas de charges PDS. PROPRE et ISOLATION, ce dernier multiplié par le facteur 1,9. La combinaison EN SERVICE implique la détermination des valeurs limites dans lesquelles, par exemple, l'instruction GRWMY conduit à l'impression des valeurs de m_{ymax}, m_{ymin} et des valeurs de m_x et m_{xy} correspondantes. La combinaison CH. TOTALE apparaîtra comme la superposition des charges permanentes, alors que les cas de charge OUVERT et FERME seront pris en considération seulement si leur valeur extrême est la plus grande (type de charge NUTZ). En effet, en raison de l'instruction ALTER, une des deux combinaisons au plus peut se présenter. Les deux combinaisons internes de charges OUVERT et FERME sont également issues des valeurs limites.

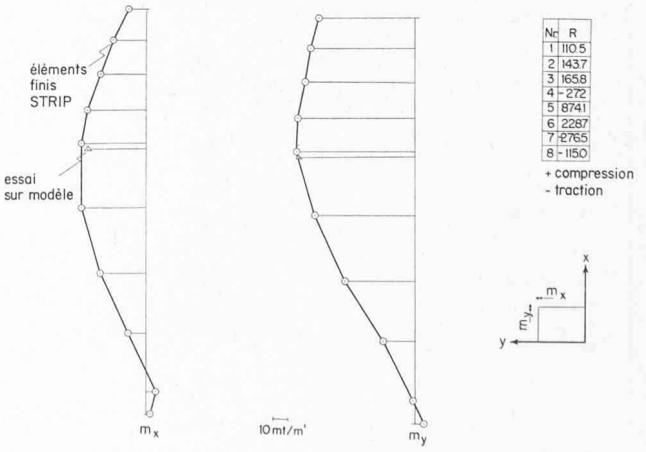


Fig. 21. — Cas de charge « poids propre ». Répartition des moments fléchissants dans la section du pont-dalle mise en évidence à la figure 20 et valeurs des réactions d'appuis. Les valeurs des moments de flexion sont en bon accord avec le résultat d'une mesure effectuée sur un modèle.

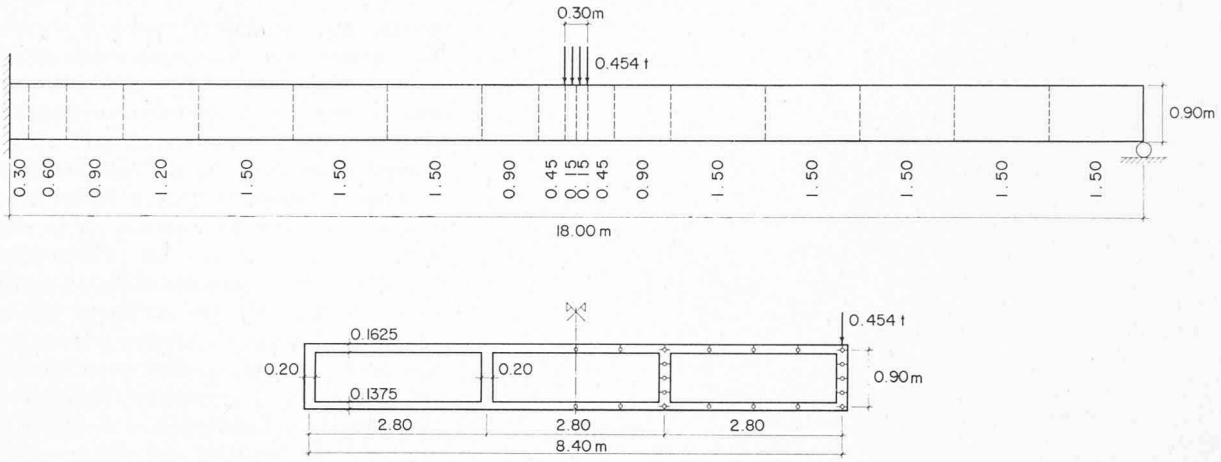


Fig. 22. — Pièce à contour fermé déformable comportant trois cellules, encastrée à gauche et appuyée librement à droite, soumise à une courte charge répartie excentrique, et division en éléments adoptée pour le calcul avec STRIP.

numéros 1, 2, 3, 4 des angles sont définis à la figure 11. Le reste des données est autant que possible également contrôlé. Dans un tel cas, le calcul proprement dit n'est pas exécuté.

Les résultats du calcul statique se composent de ce que l'on nomme « echoprint », des résultats intermédiaires, si ceux-ci sont désirés, et des résultats eux-mêmes. L'echoprint constitue la véritable donnée du calcul statique. Il est généralement directement issu des données, de sorte que les différentes possibilités de description alternatives sont réduites à une seule et, en particulier, les grandeurs données sous forme condensée sont restituées dans leur totalité.

A la figure 18, nous avons reproduit un extrait de l'echoprint de la géométrie du système total, qui a été décrite de manière condensée dans le tableau de la figure 13. Les résultats eux-mêmes, requis par l'ingénieur dans les formulaires de données, sont imprimés de manière parfaitement claire. La figure 19 montre les valeurs limites obtenues pour la combinaison des charges intitulées EN SERVICE, décrite à la figure 16. Au nœud 20, des valeurs moyennes ont été commandées alors qu'au nœud 12, les résultats dans les angles des éléments contigus à ce nœud ont été désirés. Une table des matières est également imprimée. L'echoprint, les résultats intermédiaires éventuels ainsi que les résultats proprement dits constituent un calcul statique fermé.

L'ingénieur doit continuellement prendre des décisions techniques lorsqu'il remplit les formulaires de données en langage orienté et peut définir la statique de son système porteur qu'il connaît parfaitement en vue des résultats à obtenir par la suite. Il exerce un contrôle constant sur l'analyse statique ; le système de programmes ne se charge que du calcul.

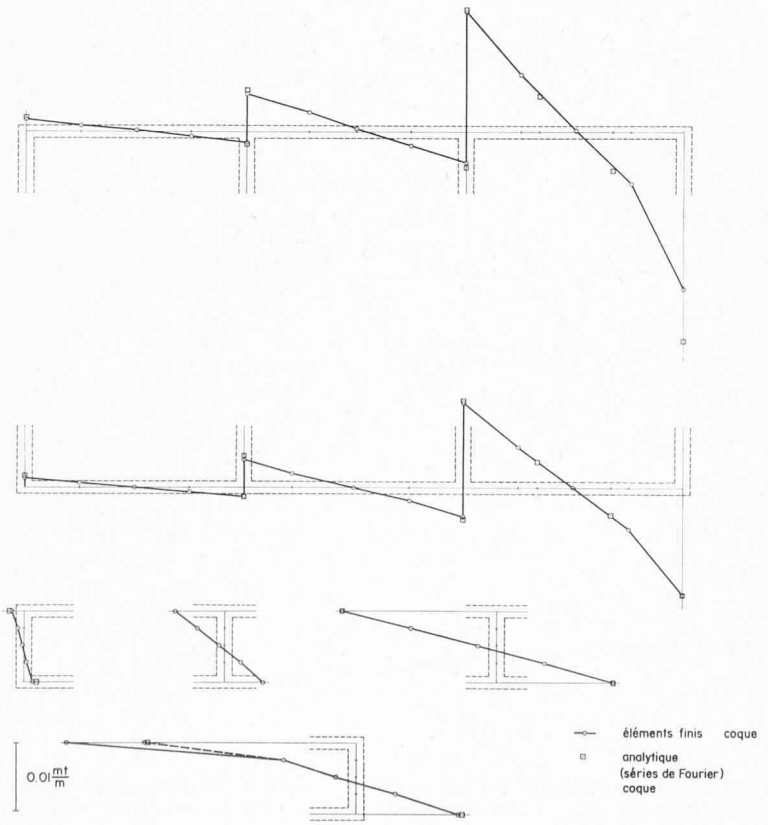


Fig. 23. — Répartition des moments transversaux dans la section située au milieu de la travée de la pièce. Comparaison des résultats obtenus à l'aide d'un calcul par éléments finis et d'un développement en séries de Fourier.

5. Exemples pratiques

Le pont-dalle de chemin de fer de la figure 20 (auteur du projet et essai sur modèle : bureau d'ingénieurs H. Hossdorf, Bâle) a été analysé à l'aide de STRIP. La dalle accuse une épaisseur constante dans sa partie approximativement trapézoïdale et une épaisseur variant linéairement dans le domaine triangulaire. Tout le contour de la plaque est en bord libre, à l'exception d'une portion assez courte encastrée élastiquement; on note également la présence d'appuis ponctuels. La division en éléments, qui prend en considération l'épaisseur variable du pont, comporte des rectangles, des triangles et des trapèzes isocèles. La répartition des moments fléchissants dus au poids propre — dans la section mise en évidence à la figure 20 — a été tracée à la figure 21. Elle est en bon accord avec la valeur donnée par un essai sur modèle. Cette dernière figure comporte également un tableau des réactions d'appuis.

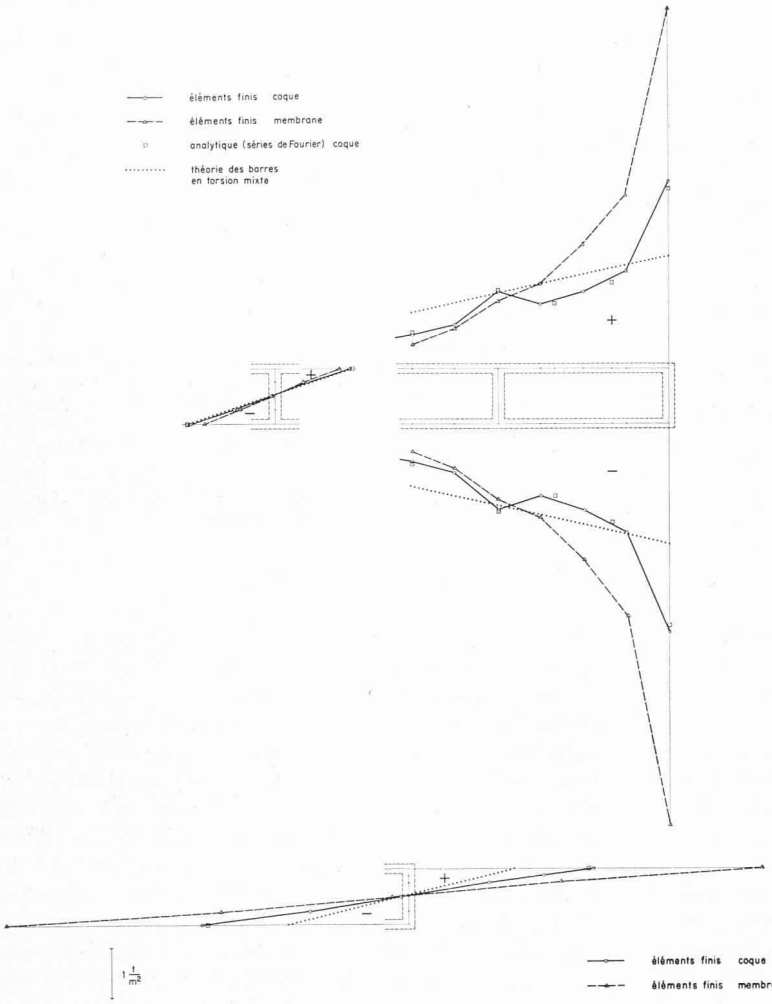


Fig. 24. — Contraintes normales dans la section d'encastrement de la pièce. La concordance des résultats du calcul par éléments finis prenant en considération l'effet de coque avec ceux du développement en séries de Fourier est bonne. Atitre de comparaison, nous avons également représenté les résultats obtenus à l'aide d'un calcul par éléments finis avec le seul effet de membrane, ainsi que ceux donnés par la théorie des poutres en torsion mixte.

Le second exemple pratique est consacré à une pièce à profil fermé déformable comportant trois cellules, encastrée à une extrémité et appuyée librement à l'autre (fig. 22). Une courte charge répartie agit au milieu de la travée sur l'une des poutres longitudinales extérieures. Il existe une solution particulière due à Scordelis [43], laquelle repose sur la base de la théorie complète des ossatures plissées (avec effet de parois et effet de plaques dans les deux directions). Dans cette solution, on s'est basé sur l'étude de Goldberg et Leve [44]. Quelque 99 termes de Fourier, dont 50 différents de zéro, ont été introduits. Cette structure a été calculée au moyen de STRIP en considérant les effets de coque ou les seuls effets de membrane. La division en éléments adoptée est représentée à la figure 22 ; dans le voisinage de l'encastrement et du lieu d'application de la charge, cette division a été choisie plus fine dans la direction longitudinale en prévision d'importants gradients de contraintes. La figure 23 montre la répartition des moments transversaux au milieu de la travée résultant du calcul avec effet de coque ; la concordance avec la solution analytique (séries de Fourier) est très bonne, sauf au point d'application de la charge. Pour chacune des analyses, nous avons tracé la répartition des contraintes normales agissant sur la surface moyenne dans la section d'encastrement (fig. 24) et dans la section située au milieu de la travée (fig. 25). On remarque que cette répartition n'est plus linéaire ; comme prévu, les poutres longitudinales provoquent des concentrations de contraintes (problème de la largeur de participation). Les valeurs obtenues par la méthode analytique sont très voisines de celles découlant de l'emploi de la méthode des éléments finis, avec l'effet de coque. Dans le but d'établir une comparaison, nous avons également reporté les résultats donnés par la théorie des barres, prenant en considération la torsion de Saint-Venant et la torsion non uniforme. Comme cela était prévisible, il apparaît que les valeurs données par cette théorie sont fort différentes. Contrairement au cas des sections à profil

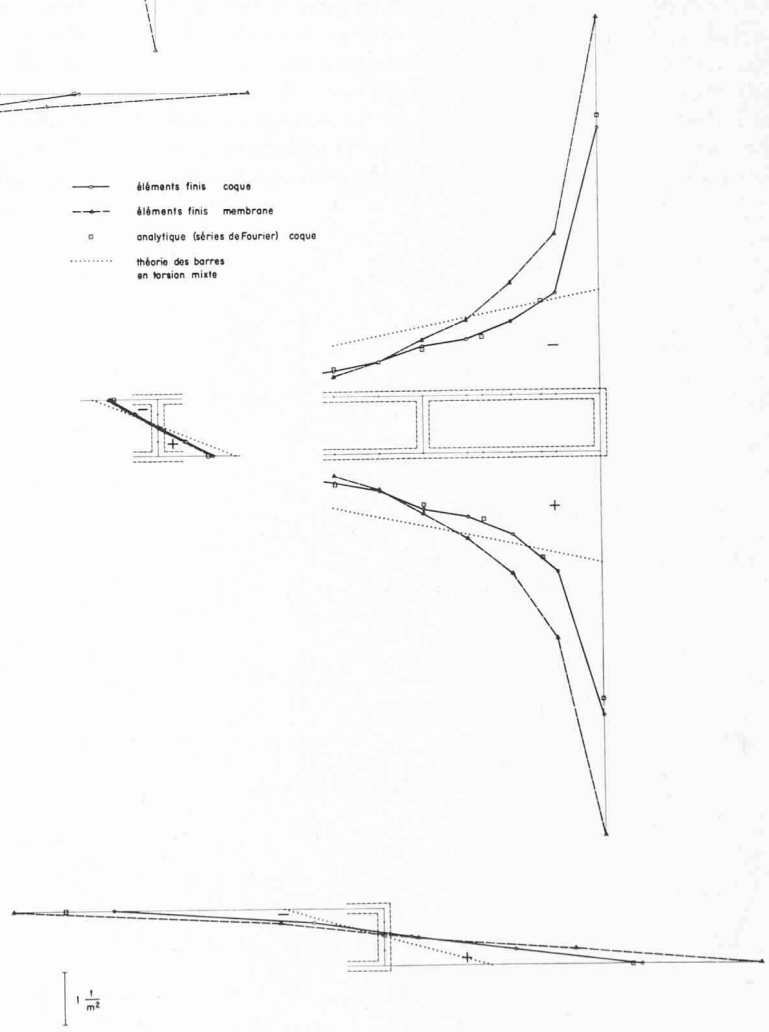


Fig. 25. — Contraintes normales dans la section située au milieu de la travée. La concordance des résultats du calcul par éléments finis prenant en considération l'effet de coque avec ceux du développement en séries de Fourier est bonne. A titre de comparaison, nous avons également représenté les résultats obtenus à l'aide d'un calcul par éléments finis avec le seul effet de membrane, ainsi que ceux donnés par la théorie des poutres en torsion mixte.

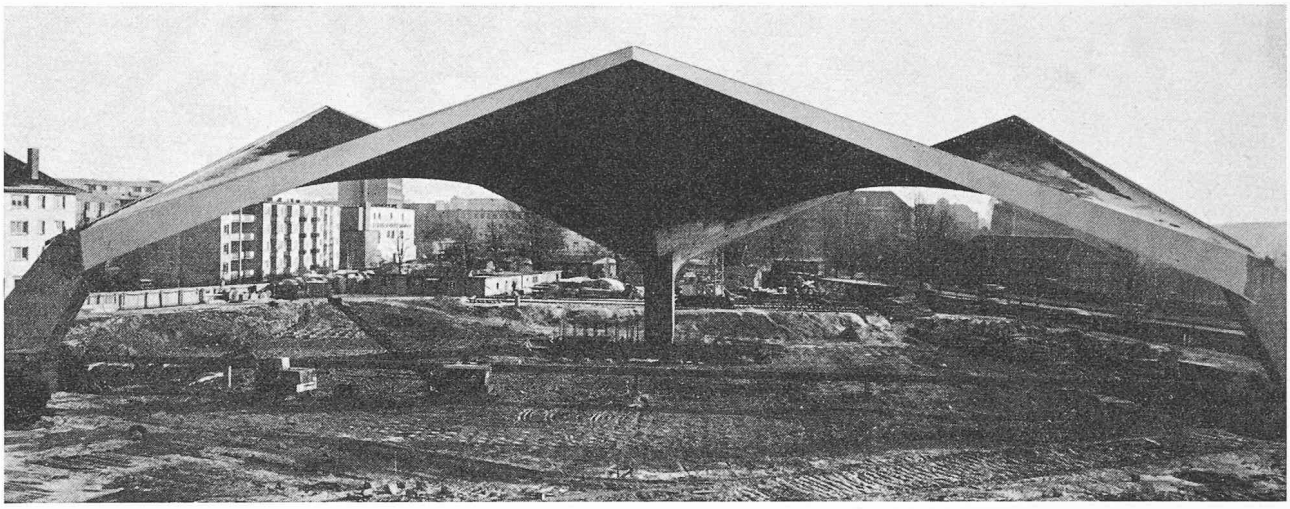


Fig. 26. — Couverture en coque hyperbolique à Hambourg, composée de deux paraboloïdes hyperboliques adossés l'un à l'autre et présentant des poutres de bord reposant sur trois appuis. La distance séparant les deux appuis extérieurs A et A′ (voir également la fig. 27) est égale à 95,72 m ; au premier plan, on distingue le point le plus haut D (cliché tiré de [45]).

ouvert (voir [4]), il n'est donc plus permis de négliger la déformation du contour et l'influence de la distorsion due aux contraintes tangentielles secondaires, comme cela est fait dans la théorie des barres.

A titre de dernier exemple, effectuons à l'aide de STRIP l'analyse de la couverture — un voile hyperbolique — de la piscine couverte Sechlingspforte à Hambourg (construction et statique : Leonhardt et Andrä, bureau d'ingénieurs-conseils, Stuttgart). Le projet et l'étude du comportement de la structure sont décrits de manière détaillée dans la référence [45]. La couverture est constituée de deux paraboloïdes hyperboliques adossés l'un à l'autre et appuyés en trois points seulement (voir fig. 26 et 27). Les poutres de bord ne sont pas supportées de manière continue, mais sont en porte-à-faux. Le tracé de leurs axes est situé sur la surface moyenne de la coque. Ces poutres de bord, de section triangulaire, présentent une transition continue avec le voile proprement dit (voir fig. 28). Par conséquent, elles sont gauches et comportent des dimensions variables (section pleine et tubulaire).

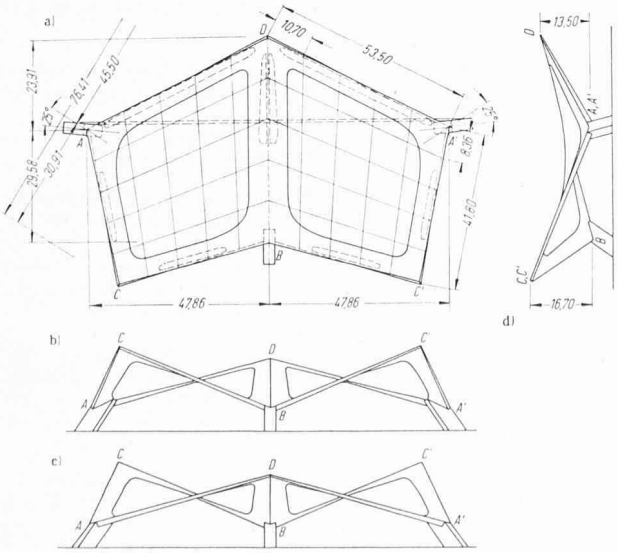


Fig. 27. — Vue d'ensemble de la coque hyperbolique. *a)* plan, *b)* élévation côté B, *c)* élévation côté D, *d)* élévation côté A, respectivement A′ (tiré de [45]).

En raison du fait que seuls des cas de charge symétriques relativement à l'arête BD ont été menés dans le calcul par éléments finis, l'analyse a pu être limitée à la moitié de la construction. Des charges quelconques pourraient être décomposées en des composantes symétrique et antimétrique à l'aide du principe de réduction des charges. La composante antimétrique pourrait être appliquée au même modèle de calcul (division en éléments), en remplaçant les conditions de symétrie le long de l'arête BD par des conditions d'antimétrie. La figure 28 montre la division en éléments choisie. Les poutres de bord ont également été discrétisées à l'aide d'éléments bidimensionnels. Au lieu de transition section pleine — section tubulaire, les nœuds des éléments finis des faces supérieure et inférieure du tronçon tubulaire ont été reliés excentriquement aux nœuds de la section pleine, lesquels sont disposés sur la surface moyenne de la coque proprement dite. Les éléments d'appuis, qui ne sont pas représentés à la figure 28, ont été introduits comme des éléments de barre. Le modèle discret adopté présente 754 nœuds et 792 éléments. Le système d'équations obtenu finalement après introduction des conditions de bord géométriques comprend 4457 inconnues; la demi-largeur de bande en comporte 245.

Un essai sur modèle à grande échelle a été effectué à l'Institut de statique sur modèles de l'Université de Stuttgart (directeur : prof. Dr R.K. Müller) [46].

Le modèle en matière synthétique, à l'échelle 1 : 26,67 (plus grande dimension = distance séparant les deux points les plus bas A et A′ (fig. 27) = 4 m), a servi, outre la détermination des efforts intérieurs nécessaires au dimensionnement final, à une analyse de l'effet esthétique de la coque.

Les résultats du calcul par éléments finis ont été confrontés à ceux de l'essai sur modèle pour le cas de charge poids propre. Dans la figure 29, respectivement la figure 30, nous avons reporté l'effort normal principal n_I dans la

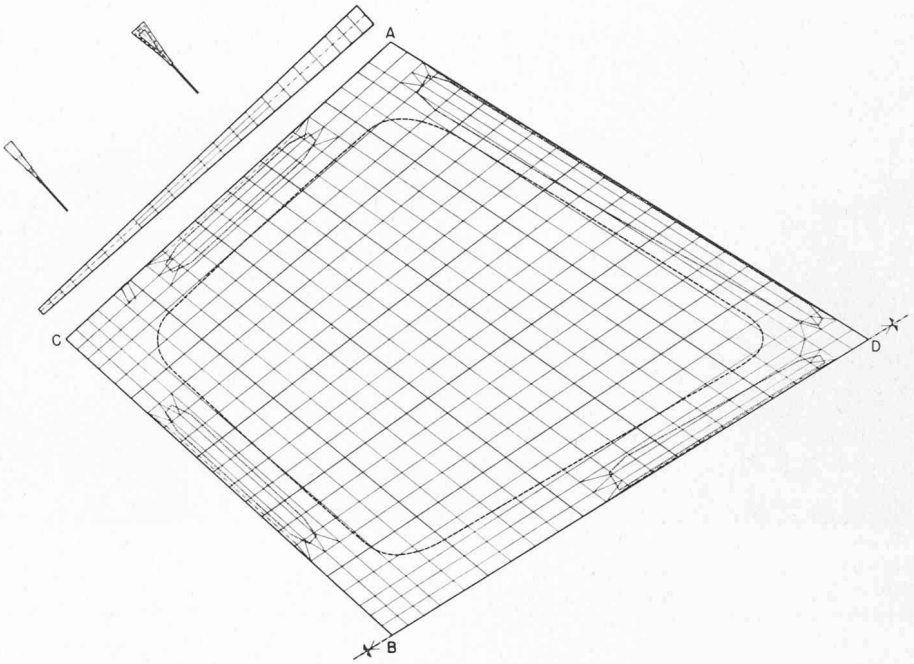


Fig. 28. — Division en éléments de la coque proprement dite et de la poutre de bord. Au lieu de transition section pleine — section tubulaire de la poutre de bord, les nœuds des éléments finis des faces supérieure et inférieure du tronçon tubulaire ont été reliés excentriquement aux nœuds de la section pleine, lesquels sont disposés sur la surface moyenne de la coque proprement dite.

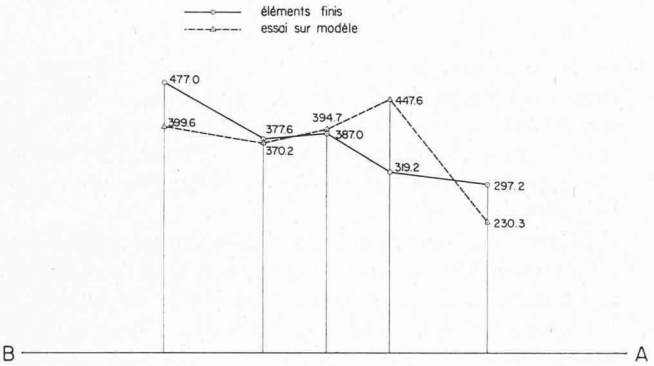


Fig. 29. — Comparaison des résultats obtenus à l'aide de l'analyse par éléments finis et un essai sur modèle. Valeurs de l'effort normal principal n_I [kg/cm] dans la coque elle-même, le long de la ligne BA, pour le cas de charge poids propre.

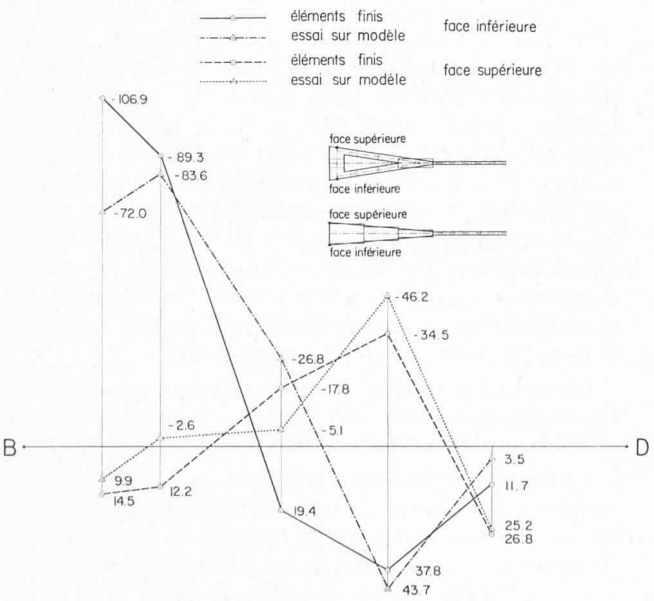


Fig. 30. — Comparaison des résultats obtenus à l'aide de l'analyse par éléments finis et un essai sur modèle. Valeurs des contraintes normales longitudinales [kg/cm²] le long de l'arête BD sur les faces supérieure et inférieure de la poutre de bord, pour le cas de charge poids propre.

coque elle-même le long de la ligne BA, respectivement la contrainte normale dans la direction longitudinale le long de l'arête BD sur les faces supérieure et inférieure de la poutre de bord. Les résultats des mesures ont été tirés de la figure 22, respectivement la figure 18, de l'article [46]. L'allure générale des résultats est la même. A certains endroits, la concordance est bonne. Ainsi, au milieu de chaque paraboloïde hyperbolique (intersection des deux diagonales AB et CD), l'effort normal principal du calcul par éléments finis, défini comme valeur moyenne des résultats au centre des éléments finis voisins (fig. 28), est égal à 387,0 kg/cm. La valeur mesurée s'élève, elle, à 394,7 kg/cm (voir fig. 29).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bengtsson et J. P. Wolf : *STRIP, Step-2 (constructions planes formées de barres)*, 1969. En langue allemande : éditions Digital S.A., Leonhardshalde 21, CH 8001 Zurich. En langue suédoise : éditions Nordisk ADB AB, Pyramidvägen 9, Solna 1, Suède.

[2] A. Bengtsson et J. P. Wolf : *STRIP, Step-3 (constructions spatiales formées de barres)*, 1969. Editions voir [1].

[3] A. Bengtsson et J. P. Wolf : *STRIP, Step-S (structures en surface porteuse)*, 1969. Editions voir [1].

[4] A. Bengtsson et J. P. Wolf : *Ein neues Berechnungshilfsmittel für Statiker*. « Neue Zürcher Zeitung », Zürich, Beilage Technik, 11. Mai 1970, Mittagsausgabe Nr. 213 (Fernausgabe Nr. 129) ou *STRIP : Un nouveau moyen de calcul pour staticiens*, « Bulletin technique de la Suisse romande », Lausanne, nº 20, 3 octobre 1970.

[5] J. P. Wolf : *Der Computer formt die statischen Methoden*. « Schweizerische Bauzeitung », Zürich, 87. Jahrgang, Heft 6, 6 février 1969, ou *L'ordinateur modèle la statique*. « Bulletin technique de la Suisse romande », Lausanne, nº 8, 19 avril 1969.

[6] T. H. H. Pian : *Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions*. AIAA-Journal, New York, July 1964.

[7] T. H. H. Pian : *Element stiffness matrices for boundary compatibility and for prescribed boundary stresses*. Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton, Ohio, Octobre 1965, AFFDL TR-66-80 (November 1966).

[8] R. T. SEVERN et P. R. TAYLOR : *The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed.* Proceedings, The Institution of Civil Engineers, London, Vol. 34, June 1966.

[9] R. DUNGAR et R. T. SEVERN : *Triangular finite elements of variable thickness and their application to plate and shell problems.* Journal of Strain Analysis, vol. 4, nº 1, 1969.

[10] T. H. H. PIAN et P. TONG : *Basis of finite element methods for solid continua.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 1, nº 1, 1969.

[11] P. TONG et T. H. H. PIAN : *A variational principle and the convergence of a finite element method based on assumed stress distribution.* International Journal of Solids and Structures, 1969, vol. 5, p. 463-472.

[12] T. H. H. PIAN et P. TONG : *Rationalization in deriving element stiffness matrix by assumed stress approach.* Proceedings of the second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton Ohio, October 1968, AFFDL - TR-68-150 (December 1969).

[13] T. H. H. PIAN : *Formulations of finite element methods for solid continua.* Japan - U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, August 25-30, 1969, Tokyo, Japan.

[14] P. TONG et T. H. H. PIAN : *Bounds on the influence coefficients by the assumed stress method.* International Journal of Solids and Structures, 1970, vol. 6, p. 1429-1432.

[15] B. F. DE VEUBEKE : *Displacement and equilibrium models in the finite element method.* Stress analysis, J. Wiley and Sons Ltd., London, 1965.

[16] G. SANDER : *Applications de la methode des éléments finis à la flexion de plaques.* Université de Liège, Faculté des Sciences appliquées, Collection de publications, nº 15, 1969.

[17] T. H. H. PIAN : *Derivation of element stiffness matrices.* AIAA-Journal, New York, March 1964.

[18] R. W. CLOUGH et J. L. TOCHER : *Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending.* Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton Ohio, October 1965, AFFDL TR-66-80 (November 1966).

[19] R. W. CLOUGH et C. A. FELIPPA : *A refined quadrilateral element for analysis of plate bending.* Proceedings of the second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton Ohio, October 1968, AFFDL-TR-68-150 (December 1969).

[20] G. P. BAZELEY et al. : *Triangular elements in plate bending-conforming and non-conforming solutions.* Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton Ohio, October 1965, AFFDL TR-66-80 (November 1966).

[21] R. J. MELOSH : *Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method.* AIAA Journal, New York, July 1963.

[22] R. J. MELOSH : *A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending.* Journal of the Aerospace Sciences, New York, January 1961.

[23] B. F. DE VEUBEKE : *A conforming finite element for plate bending.* International Journal of Solids and Structures, 1968, vol. 4, p. 95-108.

[24] F. K. BOGNER et al. : *The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas.* Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton Ohio, October 1965, AFFDL TR-66-80 (November 1966).

[25] K. BELL : *A refined triangular plate bending finite element.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 1, nº 1, 1969.

[26] J. H. ARGYRIS et al. : *The Tuba family of plate elements for the matrix displacement method.* The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, vol. 72, August 1968.

[27] W. BOSSHARD : *Ein neues, vollvertrâgliches endliches Element fûr Plattenbiegung.* Association internationale des Ponts et Charpentes, Mémoires 28-I, 1968.

[28] B. F. de VEUBEKE et G. SANDER : *An equilibrium model for plate bending.* International Journal of Solids and Structures, 1968, vol. 4, p. 447-468.

[29] L. R. HERRMANN : *Finite element bending analysis for plates.* Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 33, Nr. EM 5, October 1967.

[30] W. VISSER : *A refined mixed-type plate bending element.* AIAA-Journal, New York, Vol. 7, Nr. 9, September 1969.

[31] P. TONG : *New displacement hybrid finite element models for solid continua.* International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 2, nº 1.

[32] M. L. WILLIAMS : *Stress singularities resulting from various boundary conditions in singular corners of plates in extension.* Journal of Applied Mechanics, 1952.

[33] L. S. D. MORLEY : *Variational reduction of the clamped plate to two successive membrane problems with an application to uniformly loaded sectors.* Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 16, 1963.

[34] L. S. D. MORLEY : *Bending of a simply supported rhombic plate under uniform normal loading.* Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 15, 1962.

[35] J. E. WALZ et al. : *Accuracy and convergence of finite element approximations.* Proceedings of the second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton Ohio, October 1968, AFFDL TR-68-150 (December 1969).

[36] A. C. SCORDELIS et K. S. LO : *Computer analysis of cylindrical shells.* Journal of the American Concrete Institute, 61, p. 539-561 (1964).

[37] D. FORSBERG : *An evaluation of finite difference and finite element techniques for analysis of general shells.* IUTAM-Symposium on High-Speed Computing of Elastic Structures, Liège, Belgium, 1970.

[38] G. S. DHATT : *Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis.* Proceedings of the Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, American Society of Civil Engineers, Nashville (Tenn.), November 1969.

[39] G. R. COWPER et al. : *A shallow shell finite element of triangular shape.* International Journal of Solids and Structures, 1970, vol. 6, p. 1133-1156.

[40] V. Z. VALSOV : *General theory of shells and its applications in engineering.* NASA Technical Translation TTF-99 (April 1964).

[41] S. W. KEY et Z. E. BEISINGER : *The analysis of thin shells by the finite element method.* IUTAM-Symposium on High-Speed Computing of Elastic Structures, Liège, Belgium, 1970.

[42] J. P. WOLF : *Finite Elemente und Vorspannoptimierung als Beispiele für die auf elektronische Rechenanlagen ausgerichtete statische Methode.* Österreichische Ingenieur-Zeitschrift, Wien, Heft 2, 1970.

[43] A. C. SCORDELIS : *Analysis of continuous box girder bridges.* Department of Civil Engineering, Report Nr. SESM-67-25, November 1967.

[44] J. E. GOLDBERG et H. L. LEVE : *Theory of prismatic folded plate structures.* Association internationale des Ponts et Charpentes, Zurich, nº 87, 1957.

[45] F. LEONHARDT et J. SCHLAICH : *Das Hyparschalendach des Hallenbades Sechslingspforte.* Teil I : Entwurf und Tragverhalten, Beton- und Stahlbetonbau, Berlin, Heft 9, 1970.

[46] R.K. MULLER et R. KAYSER : *Das Hyparschalendach des Hallenbades Sechslingspforte.* Teil II : Modelluntersuchung, Beton- und Stahlbetonbau, Berlin, Heft 10, 1970.

Adresse de l'auteur :

John P. Wolf, Digital SA
Leonhardshalde 21, 8001 Zurich.