Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 97 (1971)

Heft: 14

Artikel: Sur le rôle de la théorie des déformations en hyperstatique des systèmes articulés

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-71236

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur le rôle de la théorie des déformations en hyperstatique des systèmes articulés[1]

par A. ANSERMET, ingénieur, professeur

Généralités

Le texte publié dans le *Bulletin technique* n° 22, 1970, devait être le dernier d'une série consacrée à un important problème : le calcul de structures articulées. Mais des solutions nouvelles surgissent, inspirées notamment par les deux remarquables cours de statique (voir [1], [2]) [2] dont il est fait mention dans le dit texte. On peut même se demander si la confrontation de deux solutions aussi différentes que celles développées dans ces cours est à envisager.

Un des buts poursuivis ici est de montrer que l'on peut appliquer dans la pratique une méthode s'inspirant des deux solutions. Citons la retentissante publication de K. Friedrich de 1943 ; cet auteur opère des coupures en faisant varier les coordonnées des nœuds ; en outre, il remplace les forces extérieures par des combinaisons de températures dans les barres et établit des équations valables pour le calcul de déformations (voir [3]).

Dans son cours, l'éminent professeur de Zurich forme successivement les équations d'élasticité et les matrices conjuguées, solution qualifiée de classique par certains auteurs. C'est un ouvrage considéré comme standard en Suisse et à l'étranger, ce qui lui a valu d'être traduit. Les publications de Mayor lui étaient connues, sauf la dernière, à certains égards la plus intéressante.[3]

La notion d'ellipsoïde de déformation des nœuds devait déjà être connue à Lausanne, mais, pour des raisons matérielles, ce cours de 1926 fut publié sous une forme très condensée.

Il convient de signaler qu'outre-Rhin on dit plutôt « Verschiebungsellipsoid » et à Zurich « Formänderungsellipsoid ».

Le mieux pour se familiariser avec cette notion d'importance non contestable est de considérer un cas concret. Celui choisi ci-après présente de l'intérêt en ce sens que, suivant le genre de solution, on obtient 15 équations d'élasticité, une matrice de rigidité à 15 éléments diagonaux ou 15 équations normales si le problème est traité comme extrémum lié, donc comportant 15 équations de condition en v, v_2, v_3 ...

La littérature hyperstatique, du moins celle destinée à l'enseignement supérieur, pourrait traiter de façon plus complète ces diverses faces du problème. Un Prix Mayor est créé à Lausanne pour encourager ces recherches.

Il faut ici rappeler certaines notations (sans indices) :

T	Efforts axiaux dans les barres ;
$v = mT$	Allongements ou raccourcissements de celles-ci (si on connaît les v on connaît les T) ;
p	Poids des barres (proportionnels à 1/m) ;
P	Poids des barres a posteriori (somme $p/P = n$) n inconnues ;
m	Modules des barres ;
Mr	Matrice de rigidité ;
Mi	Matrice inverse ou de flexibilité (Federungsmatrix) ;
Dx, Dy, Dz	Variations coordonnées des nœuds (Mayor) ;
dx, dy, dz	Variations coordonnées des nœuds après coupures ;
a, b, c ...	Coefficients des inconnues ;
f	Termes absolus des équations aux déformations.

Le rôle de l'électronique fut judicieusement traité dans la publication n° 104 EPUL (voir [4]), mais l'auteur n'a pas confronté les deux solutions. Il a donc paru opportun de faire des coupures pour le calcul de la coupole choisie comme cas concret.

En outre, dans la publication n° 104 le problème ne fut pas traité spatialement et les ellipses de déformation des nœuds pas calculées. Les lignes qui suivent portent sur une solution plus générale.

Fractionnement des structures

L'ampleur prise par certaines structures amène parfois des praticiens à opérer un fractionnement ; théoriquement, ce n'est pas toujours possible. La forme de la matrice de rigidité du système joue un rôle ; elle ne se prête pas toujours à un fractionnement, car le calcul des ellipsoïdes de déformation des nœuds ne s'y prêterait pas. Le problème relatif au fractionnement éventuel de structures est plus complexe.

Cas concret. Dans la pratique, on peut toujours calculer les ellipsoïdes de déformation des nœuds même si les inconnues sont celles dites hyperstatiques, mais il faut alors changer de variables et de nombreux praticiens choisiront les inconnues pour éviter un tel changement.

Considérons de nouveau la *structure (coupole) à 5 nœuds libres.*

Nœuds libres	x	y	z	Nœuds fixes	x	y	z	
1	−0,62	0	+1,3	6	−2,00	0	0	Unité
2	−0,19	+0,59	+1,3	7	−0,62	+1,90	0	de
3	+0,50	+0,365	+1,3	8	+1,62	+1,18	0	mesure
4	+0,50	−0,365	+1,3	9	+1,62	−1,18	0	arbi-
5	−0,19	−0,59	+1,3	10	−0,62	−1,90	0	traire

On déduit de ces valeurs les coefficients a, b, c des inconnues dx, dy, dz.

Quant aux termes absolus f, ils sont fournis par le système fondamental (Grundsystem).

En principe, on coupe des barres de poids faible.

Tableau des poids a priori

(inversement proportionnels aux modules des barres)

Nœuds	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0,7				1,15	1	0,8	0,8	1
2			0,7			1	1,15	1	0,8	0,8
3				0,7		0,8	1	1,15	1	0,8
4					0,7	0,8	0,8	1	1,15	1
5	0,7					1	0,8	0,8	1	1,15

Il y a donc 30 barres dont 15 surabondantes et 15 variations de coordonnées inconnues ; en éliminant celles-ci dans les 30 équations aux déformations, on obtient 15 équations, dites de condition, en v_1 v_2 v_3 ... v_{30}. C'est un extrémum lié. En général, on ne pratiquera pas de cette façon.

On forme successivement les matrices de rigidité et inverse, puis on détermine les poids des barres a posteriori qui interviennent par leurs valeurs relatives comme ceux a priori. Le choix des axes x, y, z est aisé ici.

[1] Texte rédigé en hommage à la chaire de statique de Zurich.
[2] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.
[3] Publication qui fut soumise à l'Académie des Sciences

Matrice inverse (calcul par Centre électronique EPFL)

0,51	0	0	+0,05	+0,08	0	...	Les termes absolus des équations aux déformations fournis par le système fondamental (Grundsystem) n'interviennent pas.
	0,44	0	+0,06	+0,09	0	...	
		0,66	0	0	0	...	
			0,44	−0,02	0	...	
				0,51	0	...	
					0,66	...	
nœud 1			nœud 2				

Les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde de déformation pour le nœud 1 sont proportionnelles à :

$$\sqrt{0{,}51} = 0{,}71 \quad \sqrt{0{,}44} = 0{,}66 \quad \sqrt{0{,}66} = 0{,}81$$

ce qui est admissible. La somme (0,51 + 0,44 + 0,66) est invariante quand l'orientation des axes x, y, z varie.

Poids a posteriori

	$1/p$		
5 barres p =	0,7	5×0,7 ×0,63 =	2,21
5 »	1,15	5×1,15×0,58 =	3,35
10 »	1	10×1 ×0,51 =	5,12
10 »	0,8	10×0,8 ×0,53 =	4,27
		Somme p/P =	14,95
		théoriquement	15

En moyenne : $p/P = 0{,}5$ quels que soient les p

Pour les barres 1-6, 1-7, 1-8 on a :

$$\sqrt{0{,}58} = 0{,}76 \quad \sqrt{0{,}51} = 0{,}71 \quad \sqrt{0{,}53} = 0{,}73 = \sqrt{1/P}$$

Ces trois valeurs sont proportionnelles aux distances du centre de l'ellipsoïde aux trois paires de plans tangents normaux aux barres. Les poids a posteriori présentent un intérêt manifeste ; ils sont amplifiés d'autant plus qu'il y a de barres surabondantes, d'où un avantage. Pour les systèmes statiquement déterminés $p = P$ bien entendu. Cette notion de poids a posteriori devient familière. Le cas d'un seul nœud libre est particulièrement intéressant ; il faut rendre le travail de déformation *non pas minimum, mais constant*. En faisant varier cette constante, on obtient des surfaces concentriques dont la nature est manifeste.

Certains praticiens attribuent trop tôt un rôle aux forces extérieures, c'est-à-dire aux termes absolus des équations aux déformations.

Détermination des éléments du problème indépendants des forces extérieures

1. Choix des axes de coordonnées et éventuellement des barres surabondantes à couper. Ce n'est pas toujours simple.
2. Détermination des poids, pour lesquels on a une certaine liberté ; on peut arbitrairement attribuer le poids $p = 1$ à une certaine barre. Ce sont les valeurs relatives (Verhältniszahlen) qui interviennent.
3. Formation des matrices de rigidité et inverse et des poids à postériori.

C'est le moment critique lorsque, pour un nœud, l'ellipsoïde de déformation est trop aplati ; il suffit de modifier les poids de certaines barres, mais parfois cela ne suffit pas et il faut modifier la structure. Avant d'inverser la matrice de rigidité, on constate parfois la forme défavorable de l'ellipsoïde.

Quant aux poids a posteriori, leur détermination permet d'effectuer un contrôle bienvenu.

On peut donc pousser dans une large mesure les calculs sans se préoccuper des forces extérieures. En ce qui concerne les efforts axiaux T, il suffit de déterminer les v puisque $v = mT$.

Cas où certains nœuds sont astreints à se déplacer sur des surfaces

Ce cas fut traité en particulier par B. Mayor ; en réalité, le problème est vaste : des équations de condition lient certaines inconnues. Plusieurs solutions furent envisagées et on se bornera à en développer ici une seule très succinctement.

Solution par calcul en deux phases (Zweistufige) qui est la plus connue. On fait d'abord abstraction des conditions, ce qui fournit des valeurs v' et non v. La seconde phase fournit des appoints v'' pour tenir compte des conditions : $v = v' + v''$ et on verra que $[vv] = [v'v'] + [v''v'']$ = minimum car $[v'v''] = 0$ ce qui justifie la solution.

Pour simplifier, admettons $p = 1$ pour toutes les barres et formons les dérivées de l'énergie : $[av'] = 0$, $[bv'] = 0$, $[cv'] = 0$ en considérant trois inconnues. Les valeurs dx, dy, dz obtenues ne sont plus définitives (voir [5]) ; la seconde phase donne lieu à des appoints (dx), (dy), (dz) qu'il faut ajouter aux dx, dy, dz. Ce sont ces dérivées de l'énergie, nulles, qui rendent aussi nulle la somme des $v'v''$. Ici, il ne suffit en général pas d'éliminer des inconnues.

Dans les équations de condition seules subsistent, après la première phase comme inconnues, les (dx), (dy), (dz), ce qui donne lieu à un extrémum lié en exprimant ces inconnues en fonction des v'' (voir [5], [6]).

Il résulte de ce qui précède que les forces extérieures ne jouent aucun rôle pour une étape importante des calculs, puisque les termes absolus f n'interviennent pas dans la formation des matrices de rigidité et inverses.

En conclusion, on peut dire que les solutions avec ou sans coupures des barres surabondantes des éminents professeurs de Zurich et Lausanne sont également importantes, surtout si on a recours à la théorie des déformations. On calculera les ellipsoïdes de déformation de certains nœuds que le praticien saura en général choisir. On peut aussi calculer les déformations d'autres éléments de la structure et surtout les poids des barres a posteriori.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MAYOR B. : *Cours statique graphique de 1926* (épuisé).

[2] STÜSSI F. : *Baustatik II* (Birkhauser, Bâle).

[3] FRIEDRICH K. : *Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet* (Zeitschr. f. Vermessungswesen 1943).

[4] DUPUIS G. : Publication EPUL nº 104 (Payot, Lausanne).

[5] ANSERMET A. : *Album centenaire EPUL*, 1953.

[6] BAESCHLIN C. F. : *Ausgleichungsrechnung* (cours ETH).

[7] ANSERMET A. : *Analogie entre les systèmes hyperstatiques et les réseaux télémétriques* (Schweiz. Zeitschr. f. Vermessung) nº 2, 1971.

[8] LINKWITZ K. : *Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme* (Stuttgart 1961, Dissertation.)

Adresse de l'auteur :
Auguste Ansermet, Les Glycines, 1814 La Tour-de-Peilz.