

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin technique de la Suisse romande
<b>Band:</b>	96 (1970)
<b>Heft:</b>	10
<b>Artikel:</b>	Nouveaux développements en hyperstatique des systèmes articulés spatiaux
<b>Autor:</b>	Ansermet, Auguste
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-70850">https://doi.org/10.5169/seals-70850</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Nouveaux développements en hyperstatique des systèmes articulés spatiaux

par Auguste ANSERMET, ing.-professeur

## Généralités

L'hyperstatique des systèmes articulés a pris, au cours de ces dernières années, un tel développement qu'il a paru opportun de grouper les résultats obtenus à ce jour. Le présent texte tient compte dans une large mesure des recherches faites, à Lausanne par le professeur Mayor, et à Zurich par le professeur Stüssi ; il convient aussi de faire mention d'importantes publications ayant paru dans les *Mémoires de l'Association internationale des Ponts et charpentes*, sans revenir sur certaines controverses touchant à des droits de priorité.

## La question des coupures

Quelques lignes seront consacrées à la question importante de la coupure de barres ; les deux éminents staticiens susmentionnés font l'un des coupures et l'autre pas. Les inconnues, il est vrai, ne sont pas les mêmes. Or, à l'époque, la Chaire de statique de Lausanne aurait pu faire des coupures ; elle préféra la solution remarquable qui fut reprise quarante ans plus tard dans la publication n° 104 de l'EPUL. Les inconnues sont les variations de coordonnées des noeuds, solution moderne. Mais l'auteur de la publication n° 104 eut la surprise de constater que le calcul par l'inversion des matrices de rigidité ne se prêtait pas bien pour déterminer les inconnues (Remarques, chiffre 3). Cela, les praticiens le savaient ; le but poursuivi par l'inversion est de déterminer les coefficients de poids des inconnues dont le rôle est connu. La publication n° 104 fut présentée à un groupe d'ingénieurs des Ponts et charpentes ; le conférencier a admis, semble-t-il, que la notion d'ellipse de déformation des noeuds était connue.

Il convient de remarquer que la notion fondamentale d'ellipsoïde de déformation est aussi appliquée aux systèmes statiquement déterminés en ayant recours à la théorie dite de l'équivalence (publication EPUL n° 80).

## Solutions avec coupures

Tout en reconnaissant les avantages du calcul sans coupures de la chaire de Lausanne 1926, il faut admettre, si le problème doit être poussé à fond, que la solution avec coupures présente de l'intérêt. On le constata lors du calcul de la coupole du Reichstag sous forme généralisée, le texte ayant été traduit et les calculs vérifiés à Zurich. Pour certains noeuds, il y avait des ellipsoïdes de déformation et pour d'autres des ellipses.

En général, on se borne à faire un tel calcul pour les noeuds présentant le plus d'intérêt.

Le mieux, pour le calcul de certaines structures, est de confronter les résultats obtenus *avec ou sans* coupures. Ce contrôle est précieux et ne donne lieu qu'à une légère augmentation des frais.

Avant de poursuivre, il convient d'énumérer les notations utilisées, en laissant les indices de côté.

<sup>1</sup> Ce texte, qui fait suite à celui paru le 13 décembre 1969 dans le *Bulletin technique* n° 25, a reçu le patronage de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et bénéficie de l'appui du *Fonds national de la recherche scientifique*.

$l, S$	Longueurs et sections transversales des barres
$E$	Coefficients d'élasticité
$Dx, Dy, Dz$	Variations coordonnées des noeuds (Mayor)
$dx, dy, dz$	Variations coordonnées des noeuds après coupures
$a, b, c \dots$	Coefficients de ces variations inconnues
$f$	Termes absolu des équations aux déformations (Mayor, $f = 0$ )
$p$	Poids des barres à priori (proportionnels à $ES : l$ )
$P$	Poids des barres à posteriori
$v$	Variations longueurs des barres (somme $p_{vv} = \text{minimum}$ )
$m$	Modules des barres (Mayor), inversement proportionnels aux $p$ )
$T$	Efforts axiaux dans les barres ( $v = mT$ )
$Mr, M_I$	Matrice rigidité du système et son inverse
$M_o$	Déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids
$M_o^2 \approx \frac{\text{Somme } p_{vv}}{\text{nombre barres surabondantes}}$	

On sait que cette formule ne peut pas être démontrée rigoureusement. Pour les systèmes statiquement déterminés on a bien entendu  $p = P$ . Admettons  $p = 1$  pour toutes les barres et, comme structure, un pylône à un sommet libre. Pour 3, 4, 5, 6 ... barres on a  $P = 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2 \dots$  L'ellipsoïde au sommet est sphérique si la matrice de rigidité se réduit à trois éléments diagonaux égaux (voir *Bulletin technique* 13.12.1969).

## Moyens de contrôle

On sait que les entreprises de constructions métalliques souhaitent un tel contrôle eu égard à leurs responsabilités. Un cas concret traité ci-après fait application d'un théorème connu en mathématiques appliquées.

*La somme des quotients des poids  $p$  à priori par les poids  $P$  à posteriori est égale au nombre des inconnues* (12 dans l'exemple ci-après).

Le calcul des poids à posteriori  $P$  présente de l'intérêt pour le staticien. Ces  $P$  sont les poids des binômes ( $-f + v$ ) ; voir cas concret ci-après.

Ce mode de contrôle n'est pas le seul.

## Cas de mauvaise détermination

Certains auteurs ont fait judicieusement remarquer que le déterminant principal des équations d'élasticité pouvait souvent atteindre des valeurs dangereusement petites ; l'influence des éléments diagonaux du déterminant n'est pas assez prépondérante.

Quand on choisit comme inconnues les variations de coordonnées des noeuds, il y a plus d'une manière de tourner la difficulté ; en effet, dans la publication EPUL n° 80 est développé un mode de calcul connu, dont le mérite revient au mathématicien Jacobi. Au dénominateur, lors du calcul des inconnues, on a une somme de termes ; chacun de ceux-ci est un déterminant au carré, ce qui exclut le cas de mauvaise détermination dans une large mesure.

## Choix des poids et d'un mode de calcul

On sait que les staticiens ont de la chance : la détermination des poids  $p$  des barres ne donne pas lieu à des controverses ; en outre, lors de la formation des matrices

de rigidité, on constate si certains poids ne furent pas judicieusement choisis. Il est loisible de les modifier.

Le choix d'une solution est un problème complexe ; on peut :

1. Faire application de la représentation plane (Mayor).
2. Appliquer la théorie de l'équivalence dans certains cas.
3. Assimiler le problème à un calcul d'extrémum lié (peu fréquent).
4. Appliquer la solution avec coupures de F. Stüssi.
5. Appliquer la solution magistrale de Mayor.
6. Faire des coupures (voir cas concret ci-après), avec variations des coordonnées des nœuds.

Les staticiens sont donc comblés, ce qui présente des avantages mais aussi des inconvénients. Cette dernière solution donne lieu à un nombre d'équations plus élevé que celui des inconnues ; on sait que c'est, mathématiquement, un problème-fleuve. Certains praticiens cherchent à éviter cette éventualité. Mayor tourna la difficulté avec habileté.

#### *L'emploi de calculatrices électroniques*

Ici les staticiens ont moins d'avantages ; si l'on fait abstraction de l'inversion des matrices de rigidité, on ne peut pas dire que le calcul électronique soit particulièrement efficace. Sur les diverses solutions énumérées, il y en a une surtout qui se prête au calcul électronique, et encore partiellement. Le travail de programmation est parfois considérable. Le calcul des termes absolus des équations aux déformations est en général très laborieux, et là l'électronique n'est pas d'un grand secours ; il en est de même pour la détermination d'autres éléments essentiels (ellipsoïdes de déformation, poids à posteriori, etc.).

Mais surtout des staticiens peuvent se trouver dans des régions éloignées sans calculatrice ; ils doivent se tirer d'affaire. Une solution générale comporte des conditions liant les inconnues, par exemple si certains nœuds doivent se déplacer sur des surfaces données (équations 4-V de Mayor) ; ce cas fut traité dans le *Bulletin technique* du 14 juin 1969. L'électronique joue peu de rôle ; il en est de même pour le calcul de  $M_o$ , élément dont l'importance sera reconnue toujours davantage.

#### *Cas concret*

Le choix a porté sur une coupole simple à 22 barres, dont 10 surabondantes ; il y a donc 12 inconnues. La solution de Mayor étant très connue, il a paru opportun de faire des coupures.

Nœuds libres	x	y	z
1	+ 1	0	1
2	0	- 1	1
3	- 1	0	1
4	0	+ 1	1
Nœuds fixes			
5	+ 2	0	0
6	0	- 2	0
7	- 2	0	0
8	0	+ 2	0

Unité de mesure arbitraire.

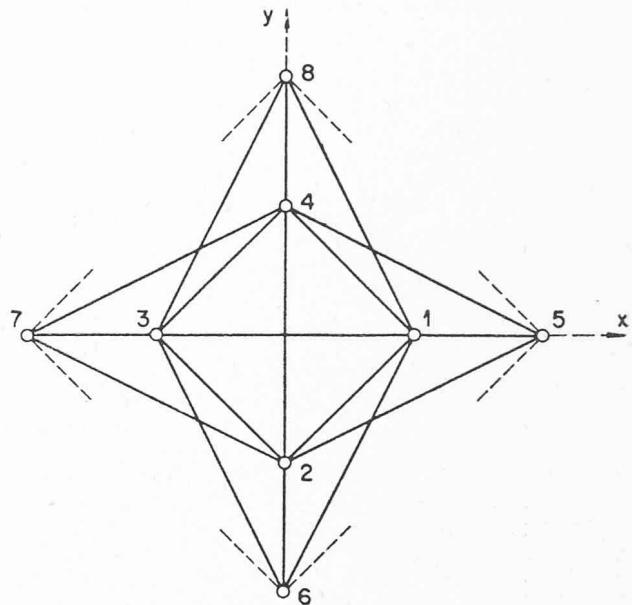


Fig. 1.

Inconnues :

$$\begin{aligned} dx_1, dy_1, dz_1 \\ \dots \\ dx_4, dy_4, dz_4 \end{aligned}$$

Longueurs des barres :

$$\begin{aligned} 1-5 &= 1,414 \\ 1-6 &= 2,450 \\ 1-7 &= 3,162 \\ 1-8 &= 2,450 \\ \text{etc.} & \end{aligned}$$

En éliminant les 12 inconnues dans les 22 équations, on obtient 10 équations en  $v_1, v_2, v_3 \dots$ . Le problème prend le caractère d'un extrémum lié. On peut procéder autrement, surtout si le nombre de barres surabondantes est petit. L'électronique n'intervient guère.

On coupera par exemple les 4 contre-diagonales et 6 autres barres.

*Poids  $p_i$  des barres ( $i = 1, 2 \dots 22$ )*

Nœuds	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,80	0,70		1,27	1,00	1,00	1,00	
2		0,80	0,70	1,00	1,27	1,00	1,00	
3			0,80	1,00	1,00	1,27	1,00	
4	0,80			1,00	1,00	1,00	1,27	

Equation pour la barre  $(x, y, z)-(x', y', z')$  :

$$v = a(dx - dx') + b(dy - dy') + c(dz - dz') + f$$

(poids  $p$ )  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

Equations normales (dérivées de l'énergie) :

$$[pav] = 0, [pbv] = 0, [pcv] = 0 \dots$$

La matrice inverse fournit les coefficients de poids des inconnues.

*Matrice de rigidité*

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} [paa] & [pab] & [pac] & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [pbb] & [pbc] & [pbd] & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [pcc] & [pcd] & [pce] & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [pdd] & [pde] & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right]$$

Les termes absolus  $f$  sont fournis par le calcul du système fondamental (Grundsystem), lequel est arbitraire.

0,339	0	0	+	0,079	+	0,025	0	+	0,083	0	0	+	0,079	-	0,025	0
	0,535	0	+	0,102	+	0,079	0	0	-	0,008	0	-	0,102	+	0,079	0
		0,935	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			0,535	0	0	+	0,079	-	0,102	0	-	0,008	0	0	0	
				0,339	0	-	0,025	+	0,079	0	0	0	+	0,08	0	
					0,935	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
						0,339	0	0	+	0,079	+	0,025	0	0	0	
							Symétrique	0,535	0	+	0,102	+	0,079	0	0	
								0,935	0	0	0	0	0	0	0	
									0,535	0	0	0	0	0	0	
										0,339	0	0	0	0	0	
											0,935	0	0	0	0	

Fig. 2.

### *Matrice inverse*

$$\begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} & \dots \\ Q_{yy} & Q_{yz} & \dots \\ Q_{zz} & \dots \\ Q'^{xx} & Q'^{xy} & Q'^{xz} & \dots \\ Q'^{yy} & Q'^{yz} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Les  $Q_{xy}$ ,  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$  sont les non-quadratiques.

*Tableau des coefficients  $a, b, c \dots$  et poids  $p$*

Barres	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>p</i>	
1-5	- 0,707	0,00	+ 0,707	1,27	calcul semi- graphique
1-6	+ 0,408	+ 0,815	+ 0,408	1,00	
1-7	+ 0,949	0,00	+ 0,316	1,00	
1-8	+ 0,408	- 0,815	+ 0,408	1,00	
	etc.		etc.		

Les équations aux coefficients de poids comprennent 12 groupes de 12 équations avec les termes absolus. Il n'a pas paru nécessaire de donner les éléments de la matrice de rigidité.

Pour la matrice inverse, le Centre de calcul électronique EPUL obtint les chiffres de la figure 2.

Les poids  $\rho$  furent calculés pour rendre nuls ou à peu près les coefficients non quadratiques  $\partial_{xyy}, \partial_{xzz}, \partial_{yyz}$ .

On a maintenant tous les éléments pour calculer les ellipsoïdes de déformation (à Zurich : Formänderungsell<sup>d</sup>, outre-Rhin : Verschiebungsell<sup>d</sup>) ; il faudrait encore  $M_o$ . Les staticiens doivent se familiariser avec cette notion.

Par la méthode aux forces il y aurait 10 inconnues seulement ; grâce aux calculatrices modernes cet élément d'appréciation joue peu de rôle.

Quant aux poids à posteriori  $P$ , dont le calcul est parfois laborieux, ils donnent lieu au contrôle final ci-après :

	<i>p</i>	<i>p : P</i>
Arêtes supérieures (1-2, 2-3, 3-4, 4-1) . . . . .	0,8	$0,472 \times 4 = 1,89$
Diagonales face supérieure (1-3, 2-4)	0,7	$0,358 \times 2 = 0,716$
Arêtes (1-5, 2-6, 3-7, 4-8) . . . .	1,27	$0,810 \times 4 = 3,24$
Diagonales faces latérales (1-6, 2-5, . . .) . . . . .	1,0	$0,572 \times 8 = 4,576$
Barres (1-7, 2-8, 3-5, 4-6) . . . .	1,0	$0,398 \times 4 = 1,59$

Somme  $p : P = 12,01$

(calcul fait à la règle) (12 inconnues)

Les  $P$  sont les poids des  $(-f + v)$ .

Une fois de plus, les poids faibles sont amplifiés dans une plus forte mesure que les autres ; mais il y a des exceptions.

Quant aux longueurs des axes principaux des ellipsoïdes de déformation, elles sont proportionnelles à :

$$\sqrt{0,339} = 0,58 \quad \sqrt{0,535} = 0,73 \quad \sqrt{0,935} = 0,97$$

On évitera les ellipsoïdes de forme très défavorable.

En conclusion, on peut dire que la méthode dite aux forces, quoique simpliste, est parfois applicable ; on forme la matrice dite conjuguée (F. Stüssi).

La méthode B. Mayor, par la variation des coordonnées des nœuds, devient prépondérante ; mais sa variante, comportant des coupures de barres, traitée ci-dessus, présente aussi certains avantages. L'élément fondamental est la matrice de rigidité (Steifigkeitsmatrix). Et il ne faut pas sous-estimer les avantages résultant d'un double calcul : avec puis sans coupures des barres surabondantes. Le problème est alors poussé à fond tandis que des erreurs éventuelles de calcul sont évitées. Le surcroît de travail est justifié.

## BIBLIOGRAPHIE

- MAYOR, B. : *Statique graphique spatiale* (Payot, Lausanne, 1926).  
 DUPUIS, G. : Publication EPUL n° 104.  
 STÜSSI, F. : *Baustatik II* (Birkhäuser, Bâle).  
 ANSERMET, A. : *Berechnung von Fachwerkuppeln* (traduction chaire de statique, Zurich).  
*Mémoires Association internationale des Ponts et charpentes.*  
 Publications de MM. NARUOKA et LI (1962).

#### Adresse de l'auteur :

Adresse de l'auteur :  
Auguste Ansermet, Case postale 106, 1814 La Tour-de-Peilz.