

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 95 (1969)
Heft: 8

Artikel: L'ordinateur modèle la statique
Autor: Wolf, John P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-70228>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPF (Ecole poly-
technique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; M. Mozer, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; M. Chevalier, ing.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; M. Cosan-
dey, ing.; J. Favre, arch.; A. Métraux, ing.; A. Rivoire,
arch.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

RÉDACTION

F. Vermeille, rédacteur en chef; E. Schnitzler, ingénieur, et
M. Bevilacqua, architecte, rédacteurs
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 46.—	Etranger	Fr. 50.—
Sociétaires	»	» 38.—	»	» 46.—
Prix du numéro	»	» 2.30	»	» 2.50

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »
N° 10-5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au
numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie
La Concorde, Terreaux 29, 1000 Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 495.—
1/2 »	» 260.—
1/4 »	» 132.—
1/8 »	» 68.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.

Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26, 1000 Lausanne et succursales



SOMMAIRE

L'ordinateur modèle la statique, par John P. Wolf, ing. diplômé EPF, Zurich.
Bibliographie. — Documentation générale. — Documentation du bâtiment.
Informations diverses.

L'ORDINATEUR MODÈLE LA STATIQUE¹

par JOHN P. WOLF, ing. diplômé EPF, Zurich

Lorsque, au début des années 1950, les premiers calculs statiques furent effectués à l'aide de calculatrices électroniques, on s'inspira des méthodes manuelles connues alors telles que, par exemple, la méthode de Cross, la méthode des foyers et, dans le cas où le nombre des grandeurs hyperstatiques pouvait être encore facilement maîtrisé, la méthode des forces. Certains de ces procédés mélangent fortement l'établissement des équations fondamentales qui décrivent le comportement physique avec leur mode de résolution, le plus souvent itératif pour éviter la résolution à la main d'un important système d'équations; l'ordinateur, lui, est parfaitement à même de résoudre directement de grands systèmes d'équations. D'autres méthodes manuelles établissent directement des résultats intermédiaires « significatifs » (par exemple les répartitions des efforts intérieurs produites par les grandeurs hyperstatiques de valeur unitaire); introduire tous ces résultats intermédiaires directement dans un programme général de calcul électronique peut être compliqué. Il est plus avantageux de calculer ces divers résultats intermédiaires dans l'ordinateur à partir des relations fondamentales elles-mêmes (par exemple les répartitions des efforts intérieurs

mentionnées plus haut peuvent être obtenues au moyen de simples opérations matricielles à l'aide de la matrice dite d'équilibre).

Avec le temps, on en vient donc à développer des méthodes mieux adaptées aux possibilités des machines électroniques, c'est-à-dire à créer une statique des barres spécialement conçue pour l'ordinateur. Les relations physiques sont formulées de façon générale, indépendamment de la façon dont elles seront employées dans le processus de résolution: d'abord les conditions d'équilibre des forces et deuxièmement les équations effort-déformation (celles-ci étant obtenues par élimination des déformations spécifiques dans les relations effort-déformation spécifique et déformation spécifique-déformation) de façon absolument analogue à la théorie générale de l'élasticité.

La solution proprement dite est recherchée du point de vue mathématique à partir des relations de base, en faisant appel avantageusement au calcul matriciel.

¹ Exposé présenté lors des Journées d'études sur des problèmes actuels intéressant les ingénieurs, organisées à Zurich les 18 et 19 octobre 1968 par le Groupe professionnel des ingénieurs des ponts et charpentes de la SIA; le texte allemand a paru dans le numéro 6 de la *Schweizerische Bauzeitung* du 6 février 1969.

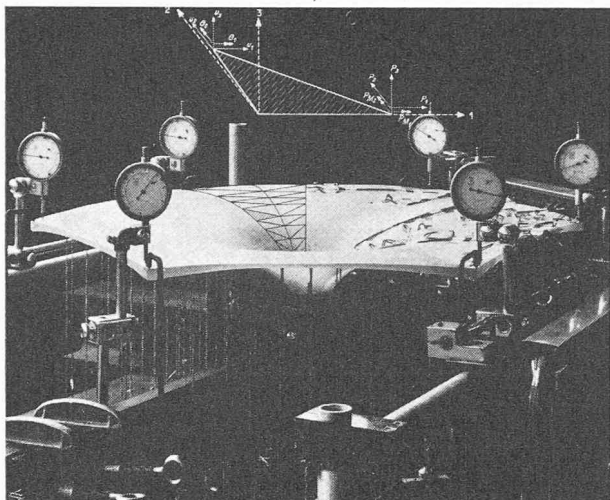


Fig. 1. — Coque d'Eurogas : division en éléments.

Si l'on exprime dans le premier groupe de relations le « plus grand nombre possible » de forces au moyen des grandeurs restantes (hyperstatiques) et que l'on fait les substitutions rendues possibles dans le deuxième groupe avec, en plus, l'élimination de toutes les déformations, on aboutit à un système d'équations avec les grandeurs hyperstatiques comme inconnues (méthode des forces). Pour obtenir la méthode des déformations, les forces sont exprimées au moyen des déformations dans le deuxième groupe de relations et sont introduites dans le premier groupe qui ne présente alors plus que des déformations comme inconnues. Dans les deux méthodes, des procédés purement mathématiques peuvent être employés pour la résolution des équations. On obtient les autres inconnues par des substitutions faites dans des résultats intermédiaires. Il est intéressant de constater que les systèmes d'équations que l'on obtient finalement, et par conséquent leurs solutions aussi, sont identiques à ceux que l'on obtient par des méthodes manuelles.

Cette statique des barres conçue pour l'ordinateur est toutefois d'une grande importance : outre le fait que cette méthode est adaptée au calcul électronique, elle permet une séparation nette entre les relations physiques (clairement exprimées) et le processus mathématique de résolution proprement dit ; elle peut aussi, par exemple, être appliquée aux problèmes non linéaires de la statique des barres et aux voiles.

Ainsi étaient créées les bases pour le développement de nouvelles méthodes rendant possible la résolution de problèmes qui ne pouvaient jusqu'à présent absolument pas être traités par le calcul ou seulement de

façon très approximative. La mise au point de ces méthodes et chacune de leurs parties sont très fortement influencées par les possibilités de l'ordinateur (la méthode mathématique numérique par conséquent aussi) ; elles diffèrent des procédés de calculs basés sur des méthodes mathématiques presque classiques (séries de Fourier, méthode des différences, partiellement aussi) dans lesquels on n'a recours à l'ordinateur que pour exécuter une importante somme de calculs, établis depuis longtemps et maîtrisés autrefois différemment, peut-être seulement de façon approximative (ces méthodes sont du reste très précieuses dans les cas où elles peuvent être appliquées).

Dans la suite de cet exposé, nous allons illustrer par des exemples deux de ces nouvelles méthodes qui sont employées dans le système de programme statique STRIP (voir bibliographie en fin d'exposé) qui vient d'être mis au point : la méthode dite des éléments finis pour l'analyse des voiles, dalles et disques, et l'optimisation de l'effort et de la position des câbles d'une construction précontrainte, à titre d'exemple d'un problème de dimensionnement.

Méthode des éléments finis (analyse des voiles, dalles et disques).

Pour analyser par les méthodes usuelles le voile représenté à la figure 1 (Eurogas à Genève, auteur du projet : bureau d'ingénieurs *Heinz Hossdorf*, Bâle), il faudrait essayer d'établir les équations différentielles, ce qui, du fait de l'épaisseur variable et de la forme compliquée de la surface moyenne, est très difficile même en employant un ordinateur.

Ces équations différentielles devraient être ensuite résolues numériquement (par exemple par des expressions de séries ou de différences convenablement choisies) et, pour obtenir les efforts dans les sections, il faudrait procéder par approximations à des dérivations et intégrations compliquées. Cette voie ne semble pas être très prometteuse.

Avec la méthode des éléments finis que nous allons considérer de deux points de vue, celui des mathématiques et celui de la statique des constructions, l'analyse, rendue possible, devient un travail de routine. Considérée du point de vue mathématique, l'équation différentielle représente déjà un résultat intermédiaire ; elle est dérivée par l'emploi du calcul des variations d'un principe d'énergie minimum de la statique. Les expressions que l'on trouve dans ce principe sont plus simples que celles obtenues dans les équations différentielles. Pour cette raison, il est recommandable d'introduire les approximations numériques déjà au niveau des expres-

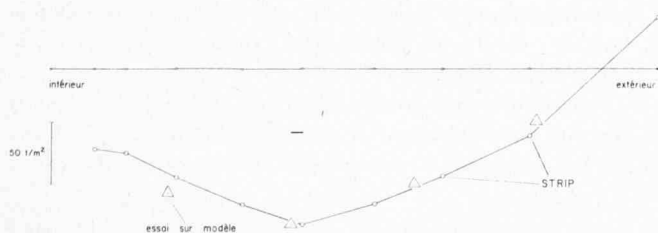


Fig. 2 a. — Coque d'Eurogas : comparaison des contraintes du calcul des éléments finis STRIP avec un essai sur modèle.

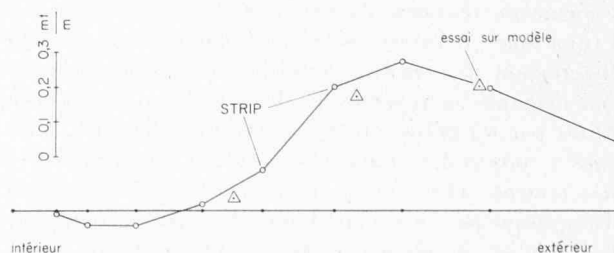


Fig. 2 b. — Coque d'Eurogas : comparaison des moments du calcul des éléments finis STRIP avec un essai sur modèle.

sions d'énergie¹ et d'appliquer seulement ensuite le principe du travail minimum. L'approximation numérique, exprimée selon la méthode en termes de déformation et/ou en termes de contraintes, est choisie pour chaque domaine de surface moyenne (par exemple triangles, voir figure 1) et les énergies peuvent être en même temps exprimées simplement au moyen des déformations qui ont été également introduites et des forces généralisées des nœuds.

Ceci peut également être interprété du point de vue de la statique des constructions. La coque est divisée en éléments, les déformations de chaque éléments sont exprimées au moyen des déformations et des forces généralisées (matrice de rigidité) et les éléments ainsi obtenus (comme les éléments isolés de poutre dans la statique des barres) sont rattachés à l'emplacement des nœuds à l'ensemble de la construction en exprimant les conditions d'équilibre. On peut facilement tenir compte de l'épaisseur variable et de la forme compliquée de la surface moyenne.

La coque de la figure 1, chargée par son poids propre et par des charges ponctuelles verticales d'égale intensité appliquées aux coins, a été calculée avec STRIP par la méthode des éléments finis. Grâce à la symétrie, il suffit de considérer un secteur seulement ; la division en éléments qui a été utilisée est également indiquée à la figure 1. A titre d'exemple de résultats, il a été représenté la distribution de la contrainte σ_1 à la surface moyenne (vecteur tourné vers le centre de la coque (fig. 2a) et du moment de flexion M_2 (vecteur moment tourné vers le centre de la coque) (fig. 2b) dans la section qui est déterminée par la ligne de plus grande pente, en commençant à un coin et en continuant vers l'intérieur de la coque. Les valeurs obtenues dans un essai sur modèle entrepris au laboratoire Hosdorf ont été également reportées. La concordance est bonne ; il faut remarquer à ce sujet que de très gros éléments (fig. 1) ont été admis à la base des calculs (une série seulement de nœuds à l'intérieur de la coque), une approximation grossière a donc été faite. Le temps de calcul sur un ordinateur UN 1108 a été d'un peu moins d'une minute ; dans le système final d'équations apparaissent 96 inconnues (avec STRIP ont déjà été résolus avec succès des problèmes d'éléments finis conduisant à des systèmes d'équations à deux mille inconnues).

Comme deuxième exemple de calcul d'éléments finis, nous citerons la coque de révolution d'épaisseur variable, de Riyadh (auteur du projet : *Vattenbyggnadsbyran*, Stockholm), qui est composée de segments cylindriques-coniques et paraboliques avec des anneaux de raidissement (fig. 3).

Du fait de la symétrie des charges, il n'est pas nécessaire d'effectuer une division en éléments dans le sens de la rotation ; la division dans le sens des génératrices est indiquée à la figure 4. La figure 5 donne les résultats du calcul pour les déformations pour les cas de charges donnés ; la figure 6 ceux des moments de flexion M_1 (vecteur moment perpendiculaire au méridien). Une

¹ En outre, il s'ensuit que le système final d'équations est défini positif, qu'il est donc par exemple aussi symétrique et que la solution numérique obtenue est, selon le type d'approximation faite, soit « trop raide » soit « trop souple ». De telles affirmations ne peuvent être faites lorsque l'on emploie la première méthode décrite plus haut.

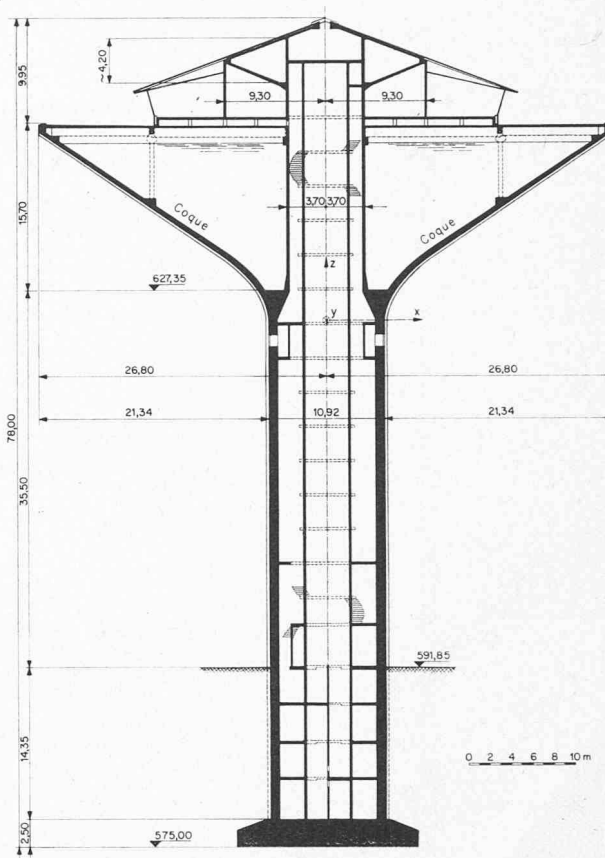


Fig. 3. — Réservoir d'eau de Riyadh : coupe verticale.

comparaison des résultats avec la solution théorique dans la zone à courbure parabolique de la coque (nœuds numéros 214, 10, 12, etc., jusqu'à 24) pour un moment et une force horizontale agissant sur le bord montre qu'avec la répartition choisie d'éléments l'écart dans tous les nœuds ne dépasse pas 1 % ; si l'on diminue de moitié le nombre des éléments, l'erreur reste dans l'ensemble du domaine inférieure à 3 %. Le temps total de calcul (contrôle des données, établissement des matrices initiales, opérations matricielles, résolution du système d'équation, combinaison des cas de charge pour obtenir les valeurs extrêmes, qui n'ont pas été représentées sur les figures 5 et 6 par souci de clarté) se monte à six minutes (UN 1108).

Les disques et les dalles peuvent être également calculés au moyen du programme STRIP pour structures en forme de coque et voile. Pour l'étude du disque représenté à la figure 7 (auteur du projet : bureau d'ingénieurs *Aschwanden et Speck*, anciennement M. R. Ros, Zurich), des éléments finis en forme de trapèze et de triangle ont été employés ; les efforts intérieurs le long de l'axe de symétrie 1 produits par une pression intérieure unitaire sont donnés à la figure 8. Pour la dalle biaise à appuis ponctuels de la figure 9 (pont ferroviaire à deux voies ; auteur du projet : bureau d'ingénieurs *Altorfer, Cogliatti et Schellenberg*, Zurich), on a choisi près des appuis des éléments (en forme de parallélogramme) de plus petites dimensions qu'en travée. Avec un raccordement excentrique des éléments (analogue à celui de la figure 4) dans la zone de l'anneau de raidissement (nœuds 310 et 212), on aurait pu aussi

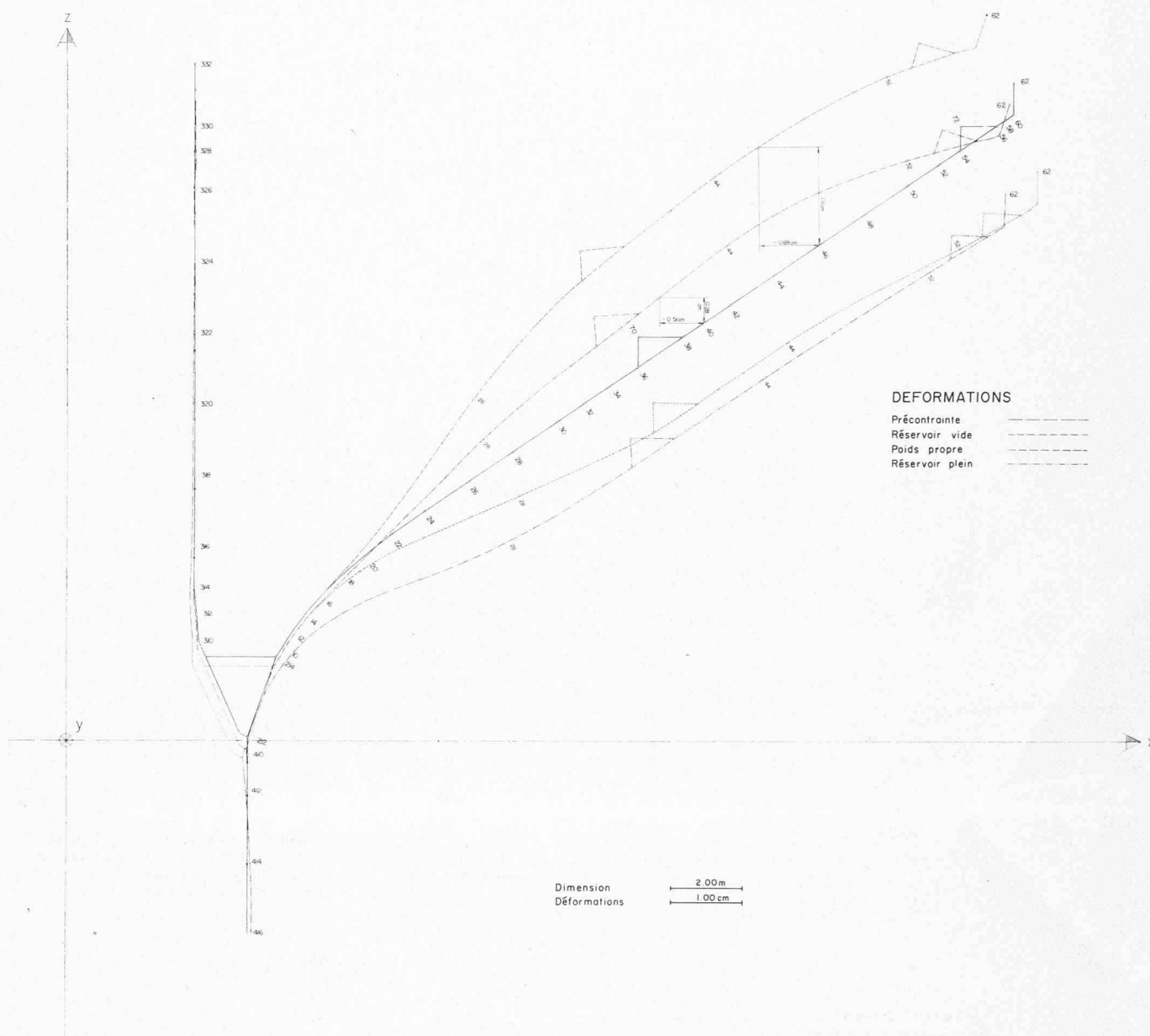


Fig. 5. — Réservoir d'eau de Riyadh : déformations pour les cas de charges indiqués.

calculées les courbes enveloppe des contraintes extrêmes à la fibre supérieure et inférieure de la poutre (fig. 11).

Sont recherchées la valeur de la force de précontrainte et la position du câble continu pour lesquelles la force de précontrainte reste la plus faible possible (consommation minimum d'acier).

En outre, les trois groupes suivants de conditions doivent être respectés :

- La contrainte dans l'état de service, aussi bien à la fibre supérieure qu'inférieure, doit rester comprise entre les valeurs admissibles données.
(Dans cet exemple, $\sigma_{\min} = -800 \text{ t/m}^2$,
 $\sigma_{\max} = 0 \text{ t/m}^2$ adm.)

$$\sigma_{\max} = 0 \text{ t/m}^2 \text{ adm.}$$

- Le câble doit rester à l'intérieur d'un fuseau déterminé par des raisons d'ordre principalement constructif (fig. 12) (certitude d'avoir une couverture suffisante de béton, possibilité d'ancrer le câble,

etc., prise en compte également du comportement à l'effort tranchant et à la rupture)¹.

- Le rayon de courbure du câble doit rester supérieur au rayon de courbure minimum admissible (dans cet exemple, $R_{\min} = 4 \text{ m.}$)

Ce problème est résolu à l'aide d'un programme linéaire :

Les excentricités du câble (aux points situés à chaque huitième des portées) et la force de précontrainte (plus exactement, son inverse) sont introduites comme inconnues. La fonction optimale exprime que la force de

¹ Dans les cas importants en pratique, on peut aussi tenir compte de la sécurité à la rupture par flexion : il faut que la résistance théorique à la rupture de la section puisse être représentée approximativement par le produit de la force de précontrainte et une fonction linéaire de l'excentricité, ce qui, par exemple, est réalisé pour les sections rectangulaires dans les conditions normales (écoulement non limité de l'acier). On peut faire intervenir le moment statiquement indéterminé de la précontrainte multiplié par un coefficient de sécurité représentant une fraction du moment à supporter.

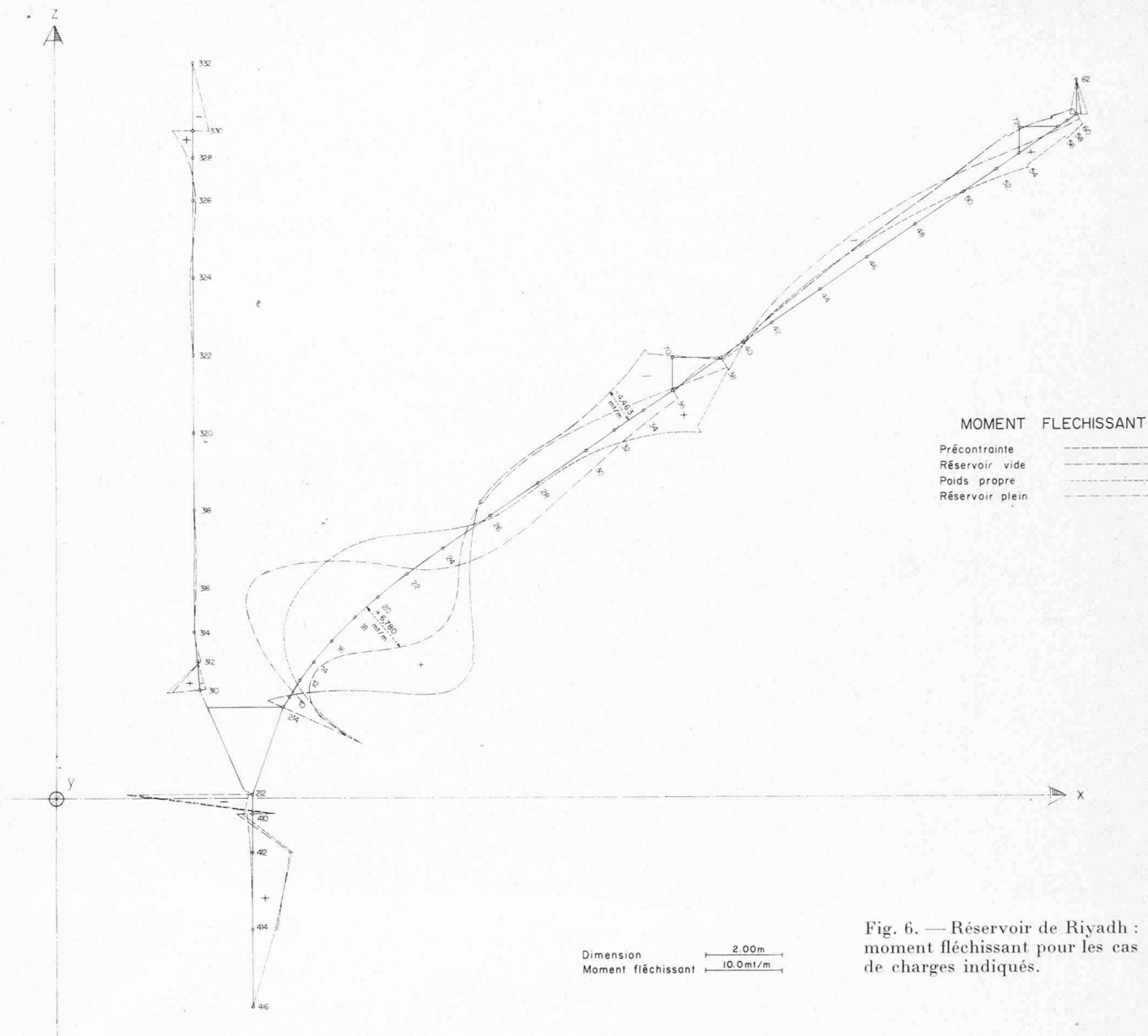


Fig. 6. — Réservoir de Riyadh : moment fléchissant pour les cas de charges indiqués.

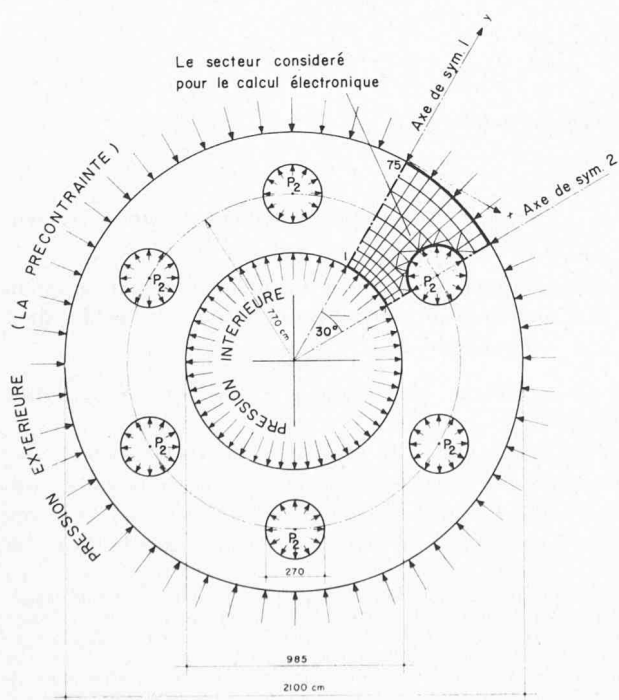


Fig. 7. — Disque de réacteur : division en éléments.

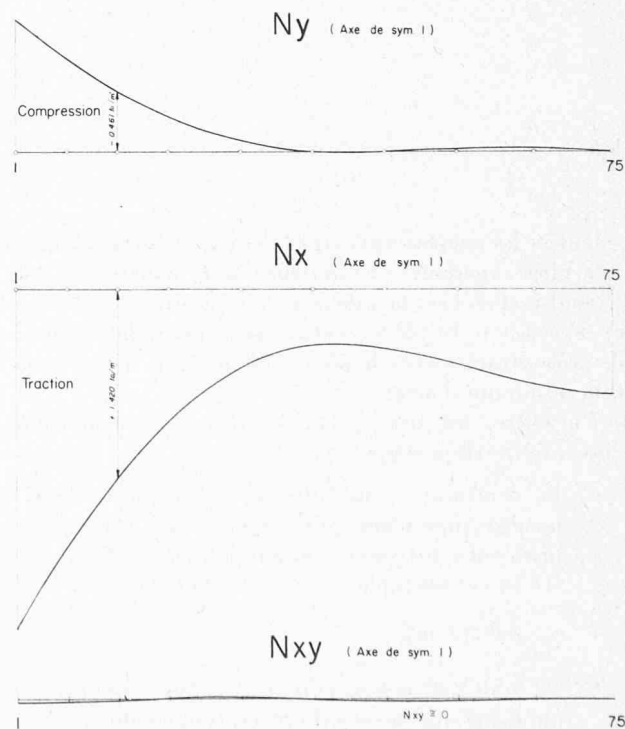


Fig. 8. — Disque de réacteur : efforts intérieurs produits par une pression intérieure unitaire.

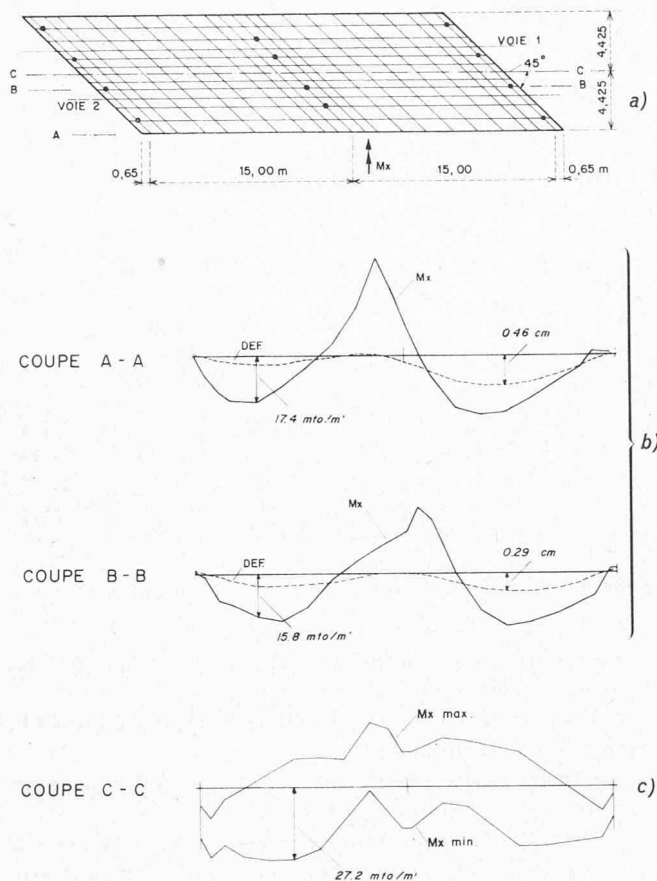


Fig. 9. — Dalle biaisée à appuis ponctuels.

- Plan et division en éléments.
- Moments longitudinaux M_x et flèches pour le cas de charge du poids propre. $g = 1,75 \frac{t}{m^2}$
- Valeurs extrêmes du moment longitudinal M_x .

précontrainte doit être minimum (son inverse maximum). Les conditions imposées conduisent en chacune des sections (chaque huitième de portée) aux inégalités suivantes :

- Quatre inégalités de contraintes (un examen superficiel de ces inégalités pourrait amener à conclure qu'elles sont quadratiques et qu'elles ne peuvent donc pas être traitées avec un programme linéaire (moment = produit de la force de précontrainte et l'excentricité). Toutefois, si l'on divise les inégalités par la force de précontrainte, elles deviennent linéaires, pour autant que l'on ait introduit l'inverse de la force de précontrainte comme inconnue). On tient compte des grandeurs statiquement indéterminées produites par la précontrainte.
- Deux inégalités constructives (qui peuvent être ramenées à une seule par une nouvelle définition des variables).
- Deux inégalités relatives au rayon de courbure minimum.

Le résultat est représenté à la figure 12. A la force de précontrainte minimum $V_{\min} = 1103 \text{ t}$ correspond un câblage raisonnable.

Deux variantes de dimensionnement ont été également dessinées à la figure 12. Premièrement, on a déter-

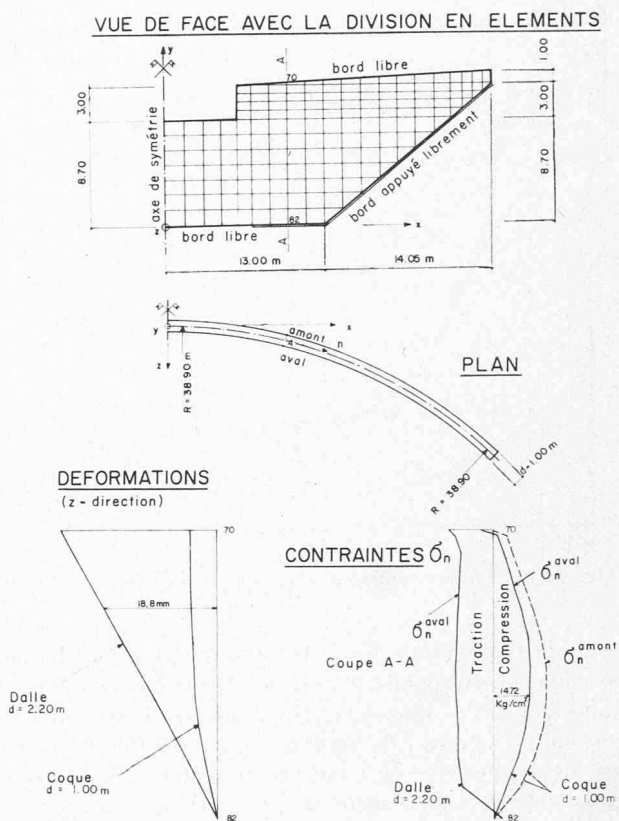


Fig. 10. — Barrage sur une rivière de montagne.

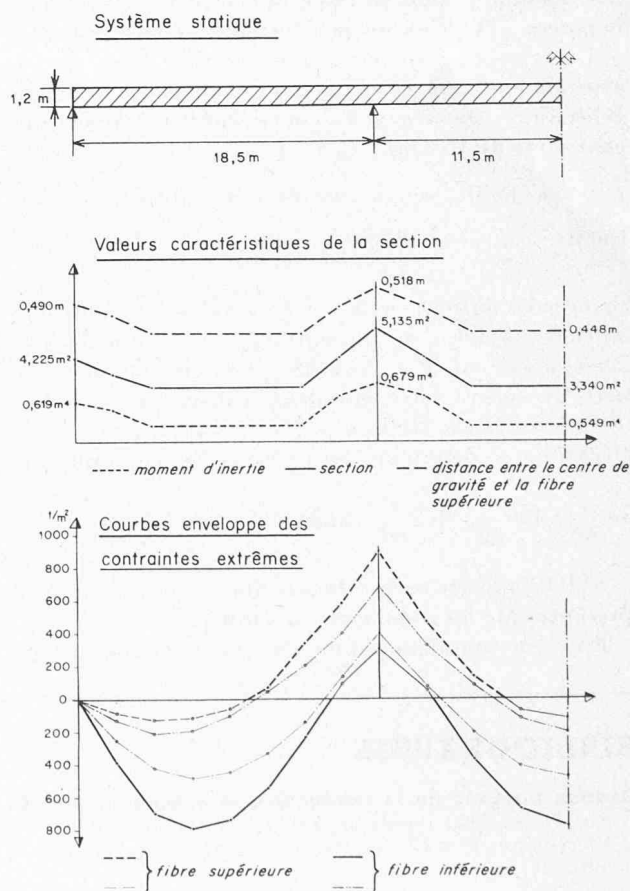


Fig. 11. — Pont symétrique à trois travées : valeurs caractéristiques de la section et les courbes enveloppes des contraintes extrêmes.

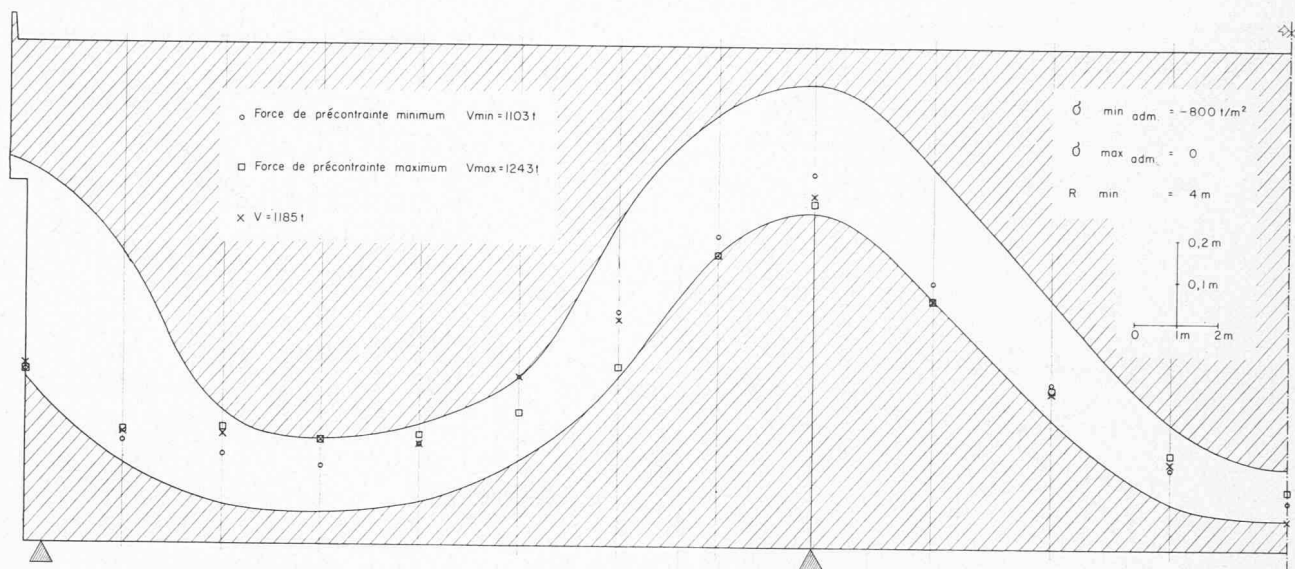


Fig. 12. — Pont symétrique à trois travées : fuseau déterminé par des raisons constructives ; résultat des trois optimisations.

miné la plus grande force de précontrainte possible et le câblage correspondant en respectant les mêmes conditions que celles imposées plus haut (seule la fonction optimale change). On obtient $V_{\max} = 1243$ t. Le câble est situé plus près de l'axe neutre, comme on pouvait s'y attendre. Deuxièmement, en partant d'un nombre entier de câbles (5×237 t = 1185 t), on a déterminé un câblage tel qu'une réserve de contrainte dans toutes les sections et pour tous les états possibles de contrainte soit maximum, tout en respectant les autres conditions imposées. (La force de précontrainte donnée est dans ce cas remplacée comme inconnue dans les inégalités de contrainte et dans la fonction optimale par la marge de contrainte). On obtient comme résultat une réserve de contrainte de 16 t/m^2 .

Si on choisit comme valeurs admissibles de la contrainte $\sigma_{\max}^{\text{adm}} = -1200 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$ et $\sigma_{\max}^{\text{adm}} = +100 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$ sans

changer les autres conditions, les résultats suivants sont obtenus : la force de précontrainte minimum $V_{\min} = 798$ t, maximum $V_{\max} = 1738$ t. Pour les nombres entiers de câbles entre ces deux valeurs, 4×237 t = 948 t, 5×237 t = 1185 t, 6×237 t = 1422 t, 7×237 t = 1659 t on a déterminé les réserves de contrainte de

$70 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$, $116 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$, $162 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$ s'abaissant jusqu'à $49 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$.

STRIP apporte encore dans le dimensionnement de la précontrainte les possibilités suivantes :

Prise en considération de plusieurs combinaisons de

charge avec des contraintes admissibles différentes les unes des autres.

Prise en considération de façon approximative du frottement et du fluage.

Utilisation de plusieurs groupes de câbles pouvant avoir des prix unitaires différents.

Détermination du nombre entier le plus économique de câbles d'un certain groupe (ce nombre devant être compris entre un nombre maximum et un nombre minimum donné) et détermination du câblage tel que la réserve de contrainte dans chaque section et pour tous les états de contrainte possibles soit maximum.

De tels dimensionnements exécutés avec un programme linéaire conduisent à des solutions satisfaisantes. En général, l'ingénieur projeteur apportera quelques légères modifications et fera avec la force de précontrainte et le câblage donné une analyse normale en tenant compte de façon plus exacte des frottements et du fluage, ce qui peut être également fait par STRIP.

BIBLIOGRAPHIE

STRIP (STRuctural Integrated Programs), développé en commun par Digital AG, à Zurich, et Nordisk ADB AB, à Stockholm.

ÅKE BENGTSSON et JOHN P. WOLF : *Manuels STRIP à l'usage de la clientèle* : STEP 2 (constructions réticulaires planes), STEP 3 (constructions réticulaires spatiales), STEP S (structures en forme de coque et voile, dalles et disques).

— *Théorie STRIP* (avec plus ample bibliographie) ouvrages édités par Digital AG, Zurich.

Adresse de l'auteur :

John P. Wolf, ingénieur diplômé EPF, Digital AG, Leonhardshalde 21, 8001 Zurich.

BIBLIOGRAPHIE

Gestion intégrée de la production et ordonnancement, par M. Crolais, ingénieur AM. Paris, Dunod, 1968. — Un volume 16×25 cm, vi + 491 pages, figures. Prix : relié, 86 F.

Le développement de la recherche opérationnelle et de l'informatique rend aujourd'hui possible l'utilisation pratique, par les entreprises industrielles, de nouvelles méthodes scientifiques de gestion, permettant l'appro-

che rationnelle et efficace d'une optimisation économique. Il devient désormais réaliste de tenir compte de l'imbrication complexe des phénomènes et de leurs interactions au sein de l'entreprise. Cesser d'en compartimenter la gestion commence à n'être plus un rêve ; la science nouvelle qui se préoccupe de ce problème s'appelle l'intégration de gestion.

Ainsi, « gérer » consiste à découvrir le meilleur équilibre instantané entre des nécessités, le plus souvent contradictoires, d'ordres financiers, commerciaux, tech-