Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 95 (1969)

Heft: 7: Foire de Bâle, 12-22 avril 1969

Artikel: Portiques à poteaux d'inertie variable articulés en pied: méthode de calcul et tableau

Autor: Racoillet, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-70226

95e année Lausanne, 5 avril 1969 N° 7

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

SOMMAIRE

PORTIQUES À POTEAUX D'INERTIE VARIABLE ARTICULÉS EN PIED MÉTHODE DE CALCUL ET TABLEAU

par C. RACOILLET, directeur technique du bureau SETIB

Introduction

Nous nous proposons d'exposer une méthode d'un emploi simple et rapide pour le calcul des portiques à poteaux d'inertie variable articulés en pied.

Remarquons que cette hypothèse de l'articulation en pied est en pratique peu restrictive, car les formes architecturales courantes de poteaux à inertie variable impliquent des sections réduites à la base, peu susceptibles d'absorber des moments d'encastrement importants.

Une seconde hypothèse restrictive consiste à supposer une variation linéaire de la hauteur de la section transversale des poteaux, la largeur de cette section restant constante, ce qui est généralement le cas pour des raisons de simplicité constructive des coffrages.

Ces portiques se rencontrent fréquemment dans les bâtiments industriels de grande portée, dans les salles de gymnastique, dans les locaux vastes sans points d'appui intermédiaires. Ils sont généralement soumis à des efforts importants qui rendent nécessaires des calculs précis. La méthode ci-dessous exposée permet de faire ces calculs très rapidement.

Principe de la méthode

La méthode consiste à calculer une inertie moyenne équivalente pour se ramener au cas d'un portique à poteaux d'inertie constante qui est justiciable des formules de Kleinlogel.

Cette inertie moyenne est d'un calcul immédiat grâce à des tableaux établis une fois pour toutes.

Précisons que la méthode a été mise au point pour des cas de charges symétriques appliquées à la traverse.

Elle n'est donc pas parfaitement rigoureuse du point de vue théorique pour des charges transversales sur les poteaux (effet du vent, par exemple) ou pour des charges dissymétriques sur la traverse.

Soit le portique défini par la figure 1, de portée l et de hauteur h mesurées par rapport aux fibres moyennes.

Les poteaux, d'épaisseur constante b, ont une hauteur de section variable de a à leur base à $a + d$ à leur sommet.

Nous calculons l'inertie moyenne équivalente J en écrivant que, sous l'effet d'un couple quelconque ^{M}B appliqué au nœud B du poteau, la rotation en ce point

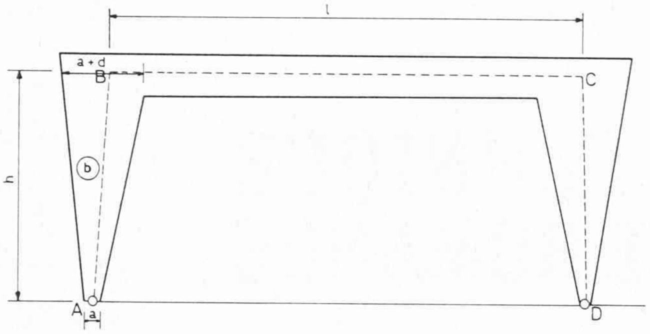

Fig. 1.

est la même pour le poteau d'inertie variable $I(x)$ que pour le poteau d'inertie constante J. (figure 2)

A partir des équations de Bresse, on peut écrire :

— pour le poteau à inertie variable :

$$w_B = \frac{1}{h}\int_o^h \frac{M(x)x}{EI(x)}\,dx.$$

Du fait de l'articulation en A, $M(x) = \frac{M_B}{h}\,x$

$$\text{d'où} \quad w_B = \frac{M_B}{Eh^2}\int_o^h \frac{x^2}{I\,(x)}\,dx\,;$$

— pour le poteau à inertie constante J :

$$w_B = \frac{M_B}{EJh^2}\int_o^h x^2\,dx$$

$$w_B = \frac{M_Bh}{3EJ}$$

$$\text{d'où} \quad J = \frac{h^3}{3\displaystyle\int_o^h \frac{x^2}{I(x)}\,dx.}$$

En faisant intervenir le paramètre $\rho = \frac{d}{a}$, $I(x)$ s'écrit

$$I(x) = \frac{ba^3}{12}\left(1 + \rho\,\frac{x}{h}\right)^3$$

$$\int_o^h \frac{x^2dx}{I(x)} = \frac{1}{\frac{ba^3}{12}}\int_o^h \frac{x^2}{\left(1+\rho\frac{x}{h}\right)^3}\,dx.$$

Procédons au changement de variable défini par :

$$1 + \rho\,\frac{x}{h} = X$$

$$\text{soit} \qquad x = (X - 1)\,\frac{h}{\rho}$$

$$dx = \frac{h}{\rho}\,dX$$

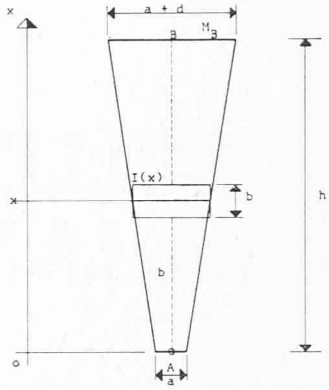

Fig. 2.

$$\int_o^h \frac{x^2}{\left(1+\frac{x}{h}\right)^3}\,dx = \frac{h^3}{\rho^3}\int_1^{1+\rho} \frac{(X-1)^2}{X^3}\,dX$$

$$= \frac{h^3}{\rho^3}\int_1^{1+\rho}\left(\frac{1}{X} - \frac{2}{X^2} + \frac{1}{X^3}\right)dX$$

$$= \frac{h^3}{\rho^3}\left[LX + \frac{2}{X} - \frac{1}{2X^2}\right]_1^{1+\rho}$$

$$= \frac{h^3}{\rho^3}\left[LX + \frac{4X-1}{2X^2}\right]_1^{1+\rho}$$

$$= \frac{h^3}{\rho^3}\left[L\,(1+\rho) + \frac{4(1+\rho)-1}{2(1+\rho)^2} - 1{,}5\right]$$

$$= \frac{h^3}{\rho^3}\left[L\,(1+\rho) - 1{,}5 + \frac{3+4\,\rho}{2(1+\rho)^2}\right]$$

$$\text{d'où : } J = \frac{ba^3}{12}\,\frac{h^3}{\frac{3\,h^3}{\rho^3}\left[L(1+\rho) - 1{,}5 + \frac{3+4\rho}{2(1+\rho)^2}\right]}$$

$$J = \frac{ba^3}{12}\,\frac{\rho^3}{3\left[L(1+\rho) - 1{,}5 + \frac{3+4\,\rho}{2(1+\rho)^2}\right]}$$

$$\boxed{J = \frac{ba^3}{12}\,\varphi\,(\rho)}$$

$\frac{ba^3}{12}$ représente l'inertie de la section de base du poteau, au droit de l'articulation ;

$\varphi(\rho)$ est la fonction

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^3}{3\left[L(1+\rho) - 1{,}5 + \frac{3+4\,\rho}{2(1+\rho)^2}\right]}$$

ρ désignant le paramètre $\frac{d}{a}$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la fonction $\varphi(\rho)$ pour des valeurs de ρ allant jusqu'à $\rho = 10$.

La figure 3 montre la courbe représentative des variations de la fonction $\varphi(\rho)$. Elle permet le contrôle immédiat des valeurs déterminées par interpolation entre des résultats du tableau.

Conduite pratique des calculs :

1) Calcul du paramètre $\frac{d}{a} = \rho_1$.

2) Recherche de la valeur $\varphi_1(\rho_1)$ dans le tableau.

3) Calcul de l'inertie moyenne équivalente du poteau

$$J_1 = \frac{ba^3}{12} \varphi_1 (\rho_1).$$

4) Calcul des valeurs fixes de Kleinlogel

$$\begin{cases} k = \dfrac{J_2}{J_1} \cdot \dfrac{h}{l} & J_1 \text{ désignant l'inertie de la traverse} \\ N = 2k + 3 \end{cases}$$

5) Calcul des moments, réactions et poussées suivant les formules de Kleinlogel et d'après les cas de charge.

Exemple numérique

Portiques selon figure 4, supportant une toiture (dalle B.A. 12 cm). — Entre axes portiques 4,10 m.

1) $\rho_1 = \frac{d}{a} = \frac{90 - 30}{30} = 2.$

2) $\varphi_1(\rho_1) = \varphi(2) = 12{,}72.$

3) $J_1 = \frac{25 \times \overline{30}^3}{12} \times 12{,}72 \qquad J_1 = 715\,300 \text{ cm}^4.$

4) Largeur utile de la dalle $b = b_0 + 20d$
(norme 162 — article 11)
$b = 2{,}65$ m (Figure 4 *b*.)
$J_2 = 2\,945\,000 \text{ cm}^4$
$k = 1{,}72$
$N = 6{,}44$

5) Cas de charge répartie :
4,10 m^2/m^1 de dalle :

poids propre (épr. 12)	300 kg/m^2
étanchéité-protection	100 kg/m^2
neige	100 kg/m^2
	500 kg/m^2

$4{,}10 \times 500$	2050 kg/m^1
poids traverse (25×73) .	450 kg/m^1
agrès appareils (salle de gymnastique)	100 kg/m^1
$q =$	2600 kg/m^1

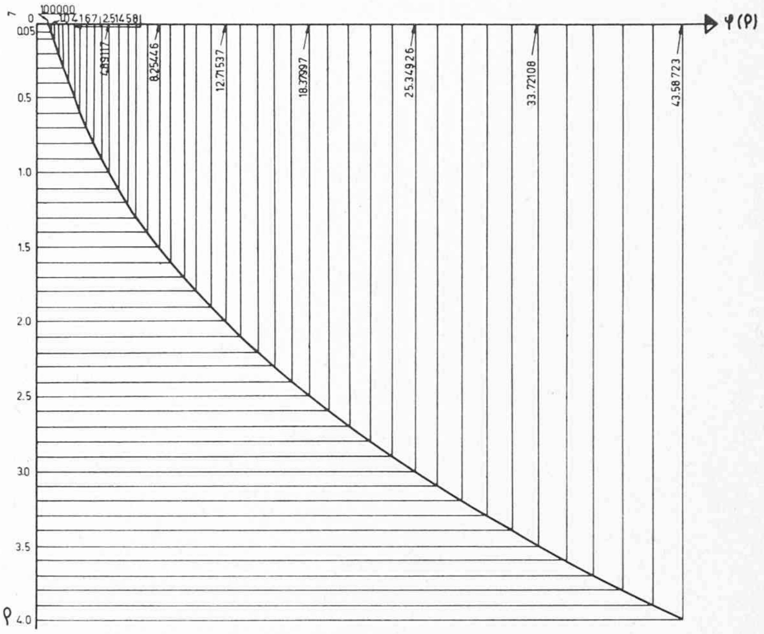

Fig. 3 *a*. — Courbe représentative des variations de la fonction $\varphi(\rho)$ $0 < \rho < 4$.

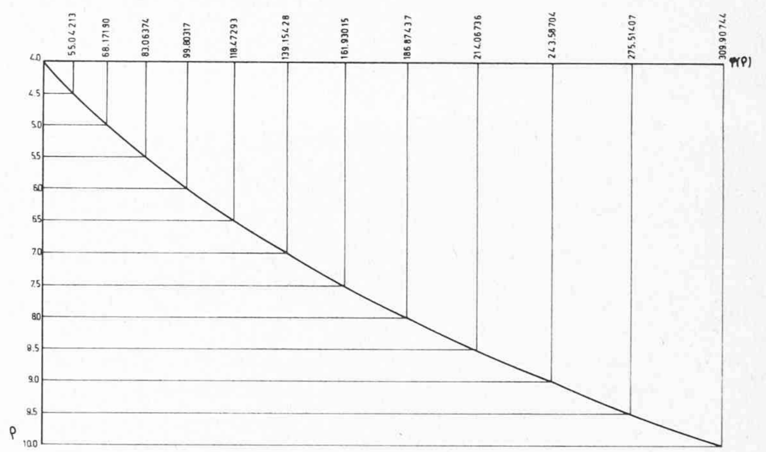

Fig. 3 *b*. — Courbe représentative des variations de la fonction $\varphi(\rho)$ $4 < \rho < 10$.

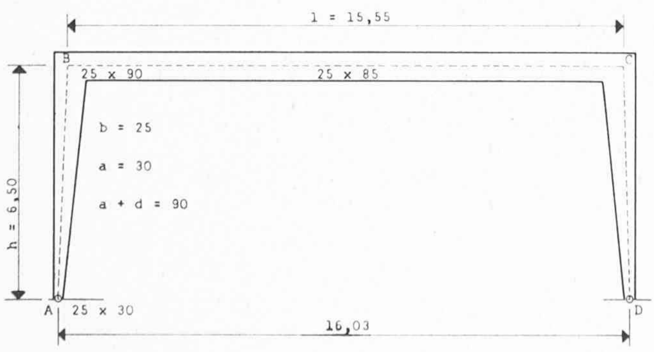

Fig. 4.

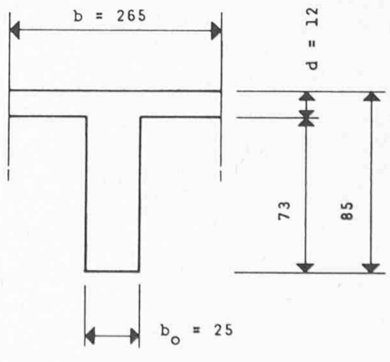

Fig. 4 *b*.

Moment d'encastrement traverse-poteaux :

$$M_B = M_C = -\frac{ql^2}{4N}$$

$$\underline{M_B = M_C = -24\,500 \text{ kgm}}$$

Poussée maximum en pied des poteaux :

$$H_A = H_D = -\frac{M_B}{h}$$

$$\underline{H_A = H_D = 3800 \text{ kg}}$$

Moment positif maximum dans la travée :

$$M = \frac{ql^2}{8} + M_B$$

$$\underline{M = 53\,500 \text{ kgm}}$$

Courbe des moments : voir figure 5.

Esquisse d'une généralisation

Reprenons la formule générale

$$J = \frac{h^3}{3\displaystyle\int_o^h \frac{x^2}{I(x)}\,dx.}$$

L'inertie moyenne équivalente J pourra se calculer pour différents cas de lois de variation d'inertie des poteaux en fonction d'un paramètre σ convenablement choisi de cas en cas et à condition que l'expression $\displaystyle\int_o^h \frac{x^2}{I(x)}\,dx$ soit intégrable.

J pourra alors s'exprimer sous la forme

$$J = \frac{ba^3}{12}\,\Phi(\sigma),$$

$\dfrac{ba^3}{12}$ désignant l'inertie de la section de base du poteau au droit de l'articulation
et $\Phi(\sigma)$ une fonction du paramètre choisi.

Les valeurs de la fonction $\Phi(\sigma)$ pourront figurer dans un tableau ou sur une courbe représentative.

Exemple

Poteaux avec une hauteur de section constante et une largeur variant linéairement (figures 6).

$$I(x) = b(x)\,\frac{a^3}{12}$$

En posant $\sigma = \dfrac{e}{b}$ $\qquad b(x) = b\left(1 + \sigma\,\dfrac{x}{h}\right)$

$$J = \frac{ba^3}{12}\;\frac{h^3}{3\displaystyle\int_o^h \frac{x^2}{1+\sigma\frac{x}{h}}\,dx.}$$

Procédons au changement de variable défini par :

$$1 + \sigma\,\frac{x}{h} = X$$

soit $\quad x = (X-1)\,\dfrac{h}{\sigma}$

$$dx = \frac{h}{\sigma}\,dX$$

$$\int_o^h \frac{x^2}{1+\sigma\frac{x}{h}}\,dx = \frac{h^3}{\sigma^3}\int_1^{1+\sigma} \frac{(X-1)^2}{X}\,dX$$

$$= \frac{h^3}{\sigma^3}\int_1^{1+\sigma}\left(X - 2 + \frac{1}{X}\right)dX$$

$$= \frac{h^3}{\sigma^3}\left[LX + \frac{X^2 - 4X}{2}\right]_1^{1+\sigma}$$

$$= \frac{h^3}{\sigma^3}\left[L(1+\sigma) + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma\right]$$

d'où $J = \dfrac{ba^3}{12}\;\dfrac{\sigma^3}{3\left[L(1+\sigma) + \dfrac{\sigma^2}{2} - \sigma\right]}$

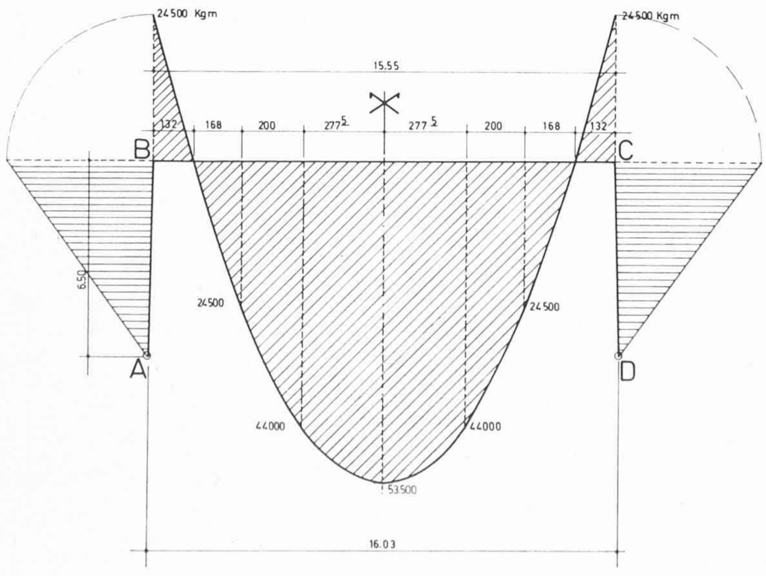

Fig. 5.

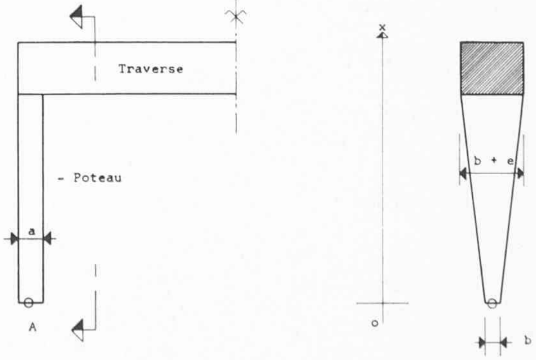

Fig. 6.

Tableau des valeurs de la fonction $\varphi(\rho)$

ρ	$\varphi(\rho)$	ρ	$\varphi(\rho)$	ρ	$\varphi(\rho)$	ρ	$\varphi(\rho)$
0,00	1,00000						
0,05	1,04167	3,1	26,90856	6,1	103,38088	9,1	249,77908
0,1	1,23457	3,2	28,52393	6,2	107,03530	9,2	256,06735
0,2	1,51515	3,3	30,19814	6,3	110,76868	9,3	262,45008
0,3	1,81452	3,4	31,92955	6,4	114,58044	9,4	268,93318
0,4	2,14621	3,5	33,72108	6,5	118,47293	9,5	275,51407
0,5	2,51458	3,6	35,57182	6,6	122,44710	9,6	282,19084
0,6	2,91616	3,7	37,48243	6,7	126,49910	9,7	288,96963
0,7	3,35485	3,8	39,45525	6,8	130,63612	9,8	295,84952
0,8	3,82918	3,9	41,49023	6,9	134,85425	9,9	302,82855
0,9	4,34084	4,0	43,58723	7,0	139,15428	10,0	309,90744
1,0	4,89117						
1,1	5,48210	4,1	45,74878	7,1	143,54048		
1,2	6,11205	4,2	47,97482	7,2	148,00857		
1,3	6,73988	4,3	50,26426	7,3	152,56287		
1,4	7,49788	4,4	52,62072	7,4	157,20249		
1,5	8,25446	4,5	55,04213	7,5	161,93015		
1,6	9,05514	4,6	57,53127	7,6	166,74112		
1,7	9,90125	4,7	60,08797	7,7	171,64185		
1,8	10,79280	4,8	62,71414	7,8	176,62941		
1,9	11,73020	4,9	65,40743	7,9	181,70658		
2,0	12,71537	5,0	68,17190	8,0	186,87427		
2,1	13,74872	5,1	71,00737	8,1	192,13132		
2,2	14,83091	5,2	73,91357	8,2	197,47855		
2,3	15,96279	5,3	76,89134	8,3	202,91677		
2,4	17,14605	5,4	79,94152	8,4	208,44684		
2,5	18,37997	5,5	83,06374	8,5	214,06736		
2,6	19,66589	5,6	86,26261	8,6	219,78362		
2,7	21,00528	5,7	89,53399	8,7	225,59430		
2,8	22,39840	5,8	92,88128	8,8	231,49556		
2,9	23,84626	5,9	96,46282	8,9	237,49524		
3,0	25,34926	6,0	99,80317	9,0	243,58704		

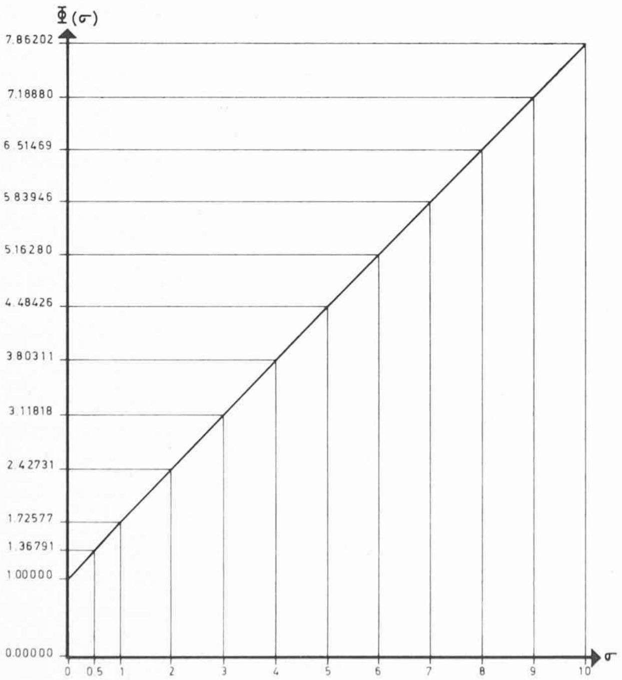

Fig. 7. — Courbe représentative des variations de la fonction $\Phi(\sigma)$.

TABLEAU DES VALEURS DE LA FONCTION $\Phi(\sigma)$

σ	$\Phi(\sigma)$
0,0	1,00000
0,1	1,07527
0,2	1,14943
0,5	1,36791
1	1,72577
2	2,42731
3	3,11818
4	3,80311
5	4,48426
6	5,16280
7	5,83946
8	6,51469
9	7,18880
10	7,86202

$$J = \frac{ba^3}{12}\,\Phi(\sigma)$$

$$\text{avec } \Phi(\sigma) = \frac{\sigma^3}{3\left[L(1+\sigma) + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma\right]}$$

Le tableau ci-dessus donne quelques valeurs de la fonction $\Phi(\sigma)$.

La figure 7 représente la courbe représentative des variations de cette fonction.