

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 94 (1968)
Heft: 6

Artikel: À propos de la notion d'ellipsoïde de déformation en hyperstatique
Autor: Ansermet, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-69629>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPF (Ecole poly-
technique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Groscurin, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; M. Chevalier, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; M. Cosandey, ing.; J. Favre, arch.; A. Rivoire, arch.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

RÉDACTION

D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua, architecte
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 46.—	Etranger	Fr. 50.—
Sociétaires	»	» 38.—	»	» 46.—
Prix du numéro	»	» 2.30	»	» 2.50

Chèques postaux : « Bulletin technique de la Suisse romande »
N° 10 - 5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à : Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, 1003 Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 450.—
1/2 »	» 235.—
1/4 »	» 120.—
1/8 »	» 62.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26, 1000 Lausanne et succursales



SOMMAIRE

A propos de la notion d'ellipsoïde de déformation en hyperstatique, par A. Ansermet, ing.-professeur.
Méthodes modernes de calcul des débits et des réserves des nappes d'eau souterraines (suite et fin), par M. E. Recordon, ing.
Divers. — Bibliographie — Les congrès.
Documentation générale — Documentation du bâtiment — Informations diverses.

À PROPOS DE LA NOTION D'ELLIPSOÏDE DE DÉFORMATION EN HYPERSTATIQUE

par A. ANSERMET, ing.-professeur¹

Le calcul des ellipsoïdes de déformation est susceptible de faire réaliser de grands progrès en hyperstatique comme ce fut le cas dans les réseaux électrotélématiques en ce qui concerne les ellipsoïdes d'erreur. Dans ces réseaux les praticiens, en considérant la forme de ces surfaces, constatent que certains nœuds sont mal déterminés ; ils sont alors amenés à apporter des modifications de structure ou à améliorer certains poids qui sont à la base des calculs.

En hyperstatique, il y a un peu de retard quant à l'application de nouvelles théories relatives aux déformations des structures ; et pourtant en 1915 déjà, à Lausanne, chaire de statique, on fit table rase de la méthode assez simpliste, dite « aux équations d'élasticité ». B. Mayor, en une page et demie, développa une méthode générale basée sur la variation des coordonnées des nœuds. Celle-ci permet beaucoup mieux d'aboutir à la notion d'ellipsoïde de déformation comme on le verra ci-après.

Poids des barres : Dans les réseaux électrotélématiques, la détermination des poids donne lieu à de sérieuses divergences ; les staticiens ont cette chance d'échapper à de telles controverses. Les poids sont proportionnels aux coefficients d'élasticité E , aux sections transversales S et aux inverses des longueurs l des barres. Ces poids p se présentent, sous une forme un peu camouflée, dans la fonction connue qui exprime le travail de déformation, ce que certains praticiens n'ont pas remarqué.

Equation aux déformations : Depuis quelques années, on en vient à la solution préconisée par Mayor ; la rédaction des Mémoires de l'Association internationale des Ponts et charpentes (AIPC), qui ne connaissait pas encore le cours de statique de Lausanne de 1926, mit ses colonnes à la disposition des professeurs Naruoka et Li.

¹ Publication patronnée par la chaire de constructions métalliques de l'EPUL. Elle fait suite à celle du 2 décembre relative aux coupoles.

A ce sujet, la chaire de statique de Zurich s'exprimait comme suit :

« Dans le cas des treillis spatiaux, à nœuds articulés, on retombe donc directement sur les équations que vous utilisez (ainsi que M. Li). »

Il était fait allusion au calcul STRESS ; en réalité, il faut distinguer deux formes :

$$(1) \quad a_i Dx + b_i Dy + c_i Dz = m_i T_i = \nu_i \quad (\text{solution sans coupures})$$

$$(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1) \\ i = 1, 2, 3 \dots$$

Equation valable pour un seul nœud libre ; une variante est la suivante :

$$(2) \quad a_i dx + b_i dy + c_i dz = \nu_i - f_i \quad (\text{Poids } p_i) \quad (\text{solution avec coupures})$$

Pratiquement, les coefficients sont les mêmes ; les équations (2) sont une variante de la solution (1) de Mayor ; les ν_i sont les variations des longueurs des barres exprimées en fonction des variations de coordonnées du nœud, les m_i les modules des barres, proportionnels aux inverses des poids p_i , T_i les efforts axiaux. Ce sont les T_i^2 qui interviennent pour le calcul du travail de déformation A à rendre minimum ou constant.

Travail de déformation A : On voit tout de suite qu'il est proportionnel à l'expression du lieu : $A = \text{constante}$. Les termes absous f_i , qui ne sont pas nécessairement tous différents de zéro, expriment que l'état initial n'est pas le même à la base des équations (1) et (2). Dans le voisinage immédiat du point qui répond à la condition $A = \text{minimum}$, on a des ellipsoïdes (A constant). Pour un groupe de nœuds, ce raisonnement n'est plus valable. Mais pour un seul nœud, les dérivées partielles de l'énergie sont les trois dérivées qu'il faut former pour déterminer le centre de l'ellipsoïde en se basant sur l'équation (2) ; on pouvait le présumer.

Exemple numérique : Pylône à 6 barres ; sommet libre nœud 1.

i	barres	a_i	b_i	c_i	p_i	P_i
1	1-2	+ 0,740	+ 0,345	+ 0,577	1,8	3,3
2	1-3	- 0,071	- 0,813	+ 0,577	1,8	3,3
3	1-4	- 0,669	+ 0,469	+ 0,577	1,8	3,3
4	1-5	+ 0,142	+ 0,804	+ 0,577	1,5	3,3
5	1-6	+ 0,625	- 0,525	+ 0,577	1,5	3,3
6	1-7	- 0,767	- 0,279	+ 0,577	1,5	3,3

Les a_i , b_i , c_i n'ont pas de dimensions.

Pour les poids à priori p_i et à posteriori P_i , ces dimensions sont données par l'expression $\frac{ES}{l}$.

Dans le voisinage du minimum, on a : $A = \text{constante}$ pour des points situés sur des sphères concentriques ; le problème est très simple. En effet, les coefficients des termes quadratiques sont :

$$[paa] = [pbb] = [pcc] = 3,3$$

et pour les non-quadratiques : $[pab] = [pac] = [pbc] = 0$

On en déduit les coefficients aux poids des inconnues.

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = 1/3,3 \quad Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

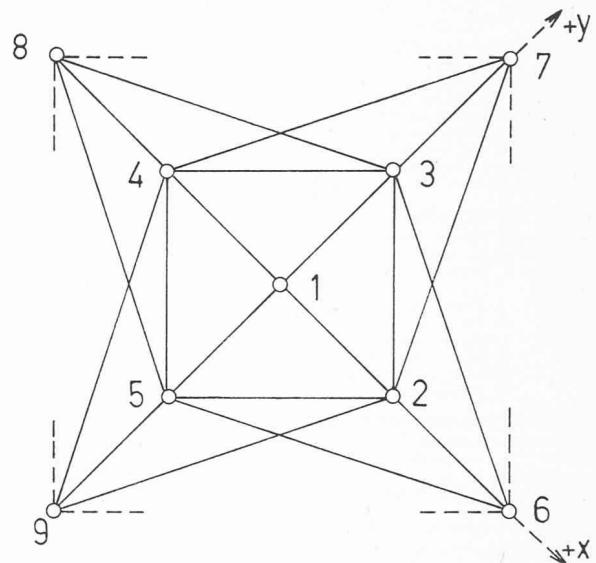
$$[p : P]_1^6 = 3 \times \frac{1,8}{3,3} + 3 \times \frac{1,5}{3,3} = 3 \quad (3 \text{ inconnues}).$$

Solution B. Mayor : Il y a trois équations d'équilibre au nœud libre et six équations aux déformations ; les neuf inconnues sont les six efforts axiaux dans les barres et les trois variations de coordonnées en 1. Il y aurait encore à déterminer la déformation quadratique moyenne m relative à l'unité de poids : $m^2 \cong [p\nu\nu] : 3$.

Ici seulement les f_i interviennent pour le calcul des ν . Cet élément m fournit l'ellipsoïde dit moyen.

Pour une paire de nœuds libres on peut réaliser la forme sphérique ; au-delà, les calculs deviennent vite inextricables.

Cas d'un pylône à 22 barres : (voir figure).



22 barres y compris 2-4 et 3-5.

Il y a 5 nœuds libres, dont le sommet 1, et 4 nœuds fixes 6, 7, 8, 9. L'unité de mesure étant arbitraire, les coordonnées sont :

Nœuds	x	y	z
1	0	0	+ 8
2	+ 3	0	+ 4
3	0	+ 3	+ 4
4	- 3	0	+ 4
5	0	- 3	+ 4
6	+ 6	0	0
7	0	+ 6	0
8	- 6	0	0
9	0	- 6	0

Les 8 diagonales ont la même longueur 7,81. Quant aux poids, ils sont tous égaux ($p_i = 1$), sauf pour les barres 2-4 et 3-5 ($p_i = 0,8$). Les poids interviennent par leurs valeurs relatives.

Solution Mayor : Elle comporte 15 équations d'équilibre et 22 aux déformations pour déterminer 22 efforts axiaux dans les barres et 15 variations de coordonnées. Il y a plus d'une manière d'effectuer le calcul car les termes absous sont au nombre de 15 au maximum. On peut concevoir le cas où il y a un seul terme absolu, par exemple si on a une seule force F extérieure, parallèle à un des axes de coordonnées, deux des composantes de F étant nulles, la troisième étant égale à F .

Les équations aux déformations ont la forme, pour la barre gh :

$$(3) \quad a_{gh} (Dx_g - Dx_h) + b_{gh} (Dy_g - Dy_h) + c_{gh} (Dz_g - Dz_h) = m_{gh} T_{gh} = \nu_{gh}.$$

Matrice aux coefficients des équations normales (à inverser)

0,72	0	0	-0,36	0	+0,48	0	0	-0,36	0	-0,48	0	0	0
0,72	0	0	0	0	0	-0,36	+0,48	0	0	0	0	-0,36	-0,48
2,56	+0,48	0	-0,64	0	+0,48	-0,64	-0,48	0	-0,64	0	-0,48	-0,64	0
nœud 1		2,81	-0,57	-0,50	+0,50	0	-0,80	0	0	0	0	0	0
		2,18	0	+0,50	-0,50	0	0	0	0	-0,50	-0,50	0	0
			1,80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
nœud 2				2,18	0	0	-0,50	0	0	0	-0,80	0	0
					2,81	-0,57	-0,50	-0,50	0	0	0	0	0
						1,80	0	0	0	0	0	0	0
nœud 3						2,81	0	+0,57	-0,50	+0,50	0	0	0
							2,18	0	+0,50	-0,50	0	0	0
nœud 4							1,80	0	0	0	0	0	0
								2,18	0	0	0	0	0
nœud 5								2,81	+0,57				1,80

C'est la forme qui fut reprise, bien après Mayor, notamment dans les Mémoires AIPC (professeur Li) et qui, en principe, est à la base du calcul STRESS. Mais B. Mayor est le premier qui évita les coupures à un moment où la solution par les équations d'élasticité était qualifiée de classique ; encore une fois, cette dernière est moins générale surtout quant au calcul des déformations.

Solutions avec coupures : Ici, on peut pousser assez avant les calculs sans faire intervenir les forces extérieures ; c'est comme pour les réseaux électrotélématériques où les praticiens calculent provisoirement des ellipsoïdes d'erreur, avant d'avoir effectué les mesures. Le nombre des équations aux déformations sera ici égal à 22 et celui des équations normales, donc des dérivées de l'énergie égal à 15. Par exemple, pour la diagonale 2-7 :

$$+0,384 dx_2 - 0,768 dy_2 + 0,512 dz_2 = v_{27} - f_{27}.$$

Pour le moment, les termes absolus f ne jouent pas de rôle.

On détermine la matrice aux coefficients des équations normales ou dérivées de l'énergie :

$$(4) [pav] = 0 \quad [pbv] = 0 \quad [pcv] = 0 \quad \text{forme dite implicite.}$$

Les éléments diagonaux sont les coefficients quadratiques, ce qui est manifeste. La matrice est symétrique et son inversion, par voie électronique, dure environ 1 minute. On obtient alors la matrice aux coefficients de poids des inconnues Q_{xx} , Q_{xy} , Q_{yy} ...

Ce sont les éléments pour le calcul des ellipsoïdes de déformation. En statique, cette notion de poids des barres sera vite familière ; pour les poids à posteriori, c'est plus subtil.

Le calcul devient maintenant un problème moins de statique que de mathématiques pures. Il faut distinguer deux formes : la ponctuelle et la tangentielle (voir (3)) ; le centre de la surface qui répond à la condition du minimum est par hypothèse connu. Dans le premier cas, on a une forme quadratique ternaire dont les coefficients sont : $[paa]$, $[pab]$, $[pac]$... $[pcc]$. Il suffit de considérer le déterminant :

$$(5) \begin{vmatrix} [paa] - k & [pab] & [pac] \\ [pba] & [pbb] - k & [pbc] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] - k \end{vmatrix} = 0$$

Les carrés des longueurs des axes principaux sont proportionnels aux inverses des racines k_1 , k_2 , k_3 .

Dans la forme tangentielle, c'est la surface podaire de l'ellipsoïde par rapport à son centre qui intervient ; le déterminant devient :

$$(6) \begin{vmatrix} Q_{xx} - k' & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} - k' & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} - k' \end{vmatrix} = 0$$

Les racines k'_1 , k'_2 , k'_3 sont proportionnelles aux carrés des longueurs des axes principaux.

Les éléments sont fournis par la matrice inverse de celle ci-dessus (Calcul par le centre électronique de l'EPUL). En regard au but poursuivi, on peut concevoir un calcul graphique des racines. L'examen de la matrice à inverser, en ce qui concerne les éléments diagonaux, montre déjà que l'ellipsoïde du nœud 1 sera moins favorable que les autres. Les longueurs des axes principaux sont proportionnelles à :

$$\begin{aligned} 1,57 : 1,57 : 0,80 & \text{ (nœud 1)} \\ 0,73 : 0,78 : 0,89 & \text{ (nœuds 2, 3, 4, 5)} \end{aligned}$$

Il faut modifier la structure si, pour le nœud 1, on veut un ellipsoïde moins aplati ; une modification des poids aurait peu d'influence dans le cas particulier, en ce qui concerne la forme de la surface.

Solution K. Friedrich : Ainsi qu'on le sait, outre-Rhin surtout, on a remarqué la corrélation existante entre l'hyperstatique des systèmes articulés et les réseaux télémétriques (« Die Analogie zwischen den Stabfachwerken und Streckennetzen wurde bald erkannt », dit-on couramment). Or, l'évolution des méthodes de calcul pour les réseaux fut rapide, cohérente ; au début surtout, on établissait une équation pour chaque côté surabondant. Bientôt cependant, on base les calculs sur les variations de coordonnées des nœuds ; de son côté B. Mayor, de façon indépendante, reconnaissait les avantages de cette solution surtout pour le calcul des déformations, mais sur la base des équations (3).

K. Friedrich, il y a vingt-cinq ans déjà, raisonna de la façon suivante : il considéra un nœud libre, sommet d'un pylône à 4 barres et admis comme poids la valeur

$$p_i = \frac{E_i S_i}{l_i} = \frac{\text{constante}}{l_i}$$

comme on le fait souvent dans les réseaux.

Désignons par P_o la position initiale du nœud comme le fit B. Mayor et P la position finale sous l'action des forces extérieures :

$$\bar{P}_o P^2 = Dx^2 + Dy^2 + Dz^2.$$

K. Friedrich considéra un état intermédiaire P' :

$$\bar{P}' P^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

A cet effet, il coupa une barre et fit varier la température dans les trois autres ; théoriquement, il pouvait éviter une coupure, mais en faisant varier la température dans la quatrième barre d'une façon qui n'était plus arbitraire comme les trois autres. K. Friedrich abou-tissait aux mêmes équations que celles dites aux erreurs dans les réseaux ; il retombait sur un problème qui, depuis longtemps, est traité à fond. Des cas avec 40 équations normales et plus sont devenus courants et le calcul d'ellipsoïdes d'erreur est un jeu.

Toutefois, à première vue, la solution Mayor sans coupures est préférable ; en réalité, c'est moins simple.

En résumé, on peut dire qu'en hyperstatique des systèmes articulés les méthodes évoluent rapidement ; la solution sans coupures due en premier lieu à B. Mayor paraît gagner du terrain. Les remarquables publications ayant paru dans les Mémoires AIPC le prouvent, ainsi

que les recherches faites par la chaire de statique de Zurich (calcul STRESS).

En ce qui concerne les ellipsoïdes de déformation, il s'agit d'une notion qui deviendra vite familière ; des formes très défavorables pour ces surfaces seront évitées. Ce problème, dans son ensemble, est susceptible encore de bien des développements.

LITTÉRATURE

1. MAYOR, B. : *Cours de statique* (Lausanne, 1926).
 2. FRIEDRICH, K. : *Die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet* (Zeitschr. für Vermessungswesen, 1943).
 3. ANSERMET, A. : *Théorie de l'équivalence appliquée aux calculs d'ellipsoïdes d'erreur* (Schw. Zeitschr. für Vermessung, 1960, n° 3).
 4. ANSERMET, A. : *Théorie des déformations des treillis* (Zürich, 1965).

Publication subsidiée par le Fonds national de recherche.

MÉTHODES MODERNES DE CALCUL DES DÉBITS ET DES RÉSERVES DES NAPPES D'EAU SOUTERRAINES *(Suite et fin)*¹

par M. E. RECORDON, ingénieur, privat-docent à la Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel, chargé de cours à l'EPUL

III. Application des théories de Dupuit et de Theis au cas de l'essai de pompage de Cressier

A. *L'essai de pompage de Cressier*

En 1931, la commune de Cressier a construit un premier puits de captage à une centaine de mètres de la gare, côté plaine (fig. 8).

En 1960, les besoins en eau ayant augmenté, la commune étudia la possibilité d'exploiter la nappe souterraine dans une deuxième station plus à l'ouest, en construisant un nouveau puits de captage. Elle confia à M. le professeur Burger la tâche de diriger les recherches géologiques. Les travaux de forage et d'établissement du puits d'essai et des puits d'observation, ou piézomètres, furent confiés à l'entreprise Grundwasserbauten AG., de Berne. Les essais de pompage furent également suivis par M. Irmin Lévy, ingénieur à Delémont, qui étudiait le réseau d'alimentation en eau pour la commune.

L'emplacement qui paraissait géologiquement favorable est situé au sud de la localité de Cressier, à proximité immédiate des voies ferrées ; il se trouve sensiblement à égales distances, 500 m environ, de la Vieille Thielle et du pied du coteau bordant la plaine, et entre deux ruisseaux, à 400 m environ du Mortruz et à 280 m du Ruhaut. La surface du terrain est en très faible pente en direction de la plaine (fig. 9).

Au point de vue géologique, la nature des sols a été reconnue à l'aide de deux forages et de prospections électriques.

La carte des résistivités électriques (fig. 10) montre que l'on est en présence probablement d'un cône de déjection d'un ancien torrent descendant du Jura. La forme incurvée des courbes d'équirésistivité montre aussi que le puits d'essai est situé sensiblement au centre de ce cône. On peut admettre qu'une certaine alimentation de la nappe se fait par le nord-ouest, dessous la voie ferrée. Ce qui est confirmé d'ailleurs par le fait que la surface de la nappe souterraine marque une pente générale d'environ 1°/oo en direction de la plaine. La nappe, en l'absence de pompage, s'écoule vers la plaine à une vitesse de l'ordre de 10^{-6} m/sec.

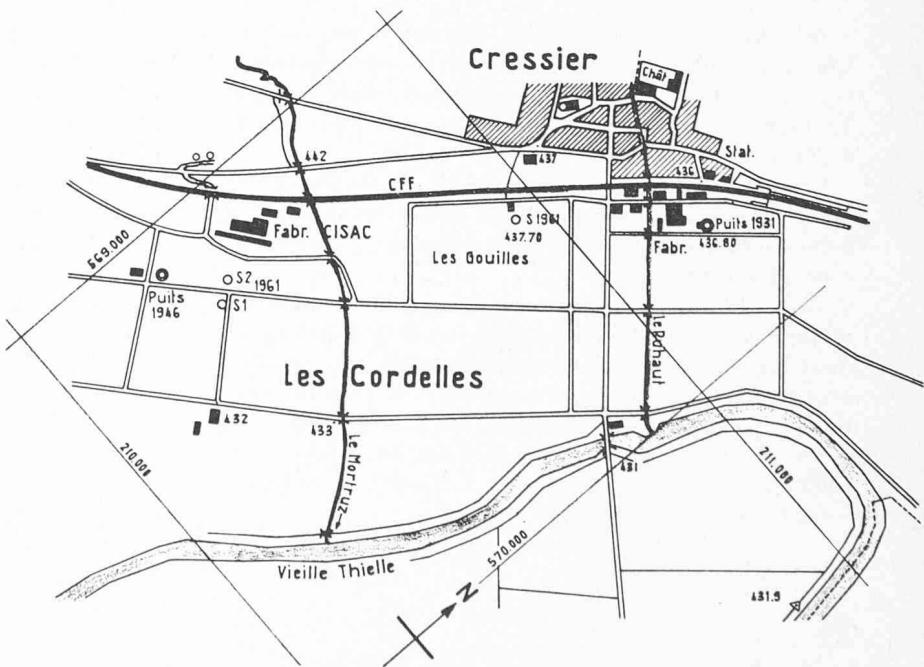


Fig. 8. — Plan de situation de Cressier.

¹ Voir *Bulletin technique* N° 5 du 9 mars 1968.