Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 94 (1968)
Heft: 13

Artikel: Sur le choix d'un mode de calcul en hyperstatique spatiale

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-69643

94e année Lausanne, 29 juin 1968 N° 13

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

SOMMAIRE

SUR LE CHOIX D'UN MODE DE CALCUL EN HYPERSTATIQUE SPATIALE

par A. ANSERMET, ing.-professeur [1], La Tour-de-Peilz

Au cours de ces dernières années, l'hyperstatique des systèmes articulés a subi des développements que l'on peut qualifier de spectaculaires ; certains modes de calcul, considérés comme classiques, ne présenteront bientôt plus guère qu'un intérêt historique.

De nombreux praticiens se heurtent à des difficultés quand il faut choisir une solution ; vaut-il mieux couper ou ne pas couper les barres surabondantes ? Un des buts envisagés ci-après est de fournir quelques arguments en faveur de l'une ou l'autre solution. Le choix des inconnues est moins malaisé ; de plus en plus on donne la préférence aux variations de coordonnées des nœuds et à la théorie des déformations (Verformungsgrössenverfahren). Le professeur Mayor fut le premier à s'engager dans cette voie ; à cette époque, Lausanne pouvait être considérée comme une Mecque dans le domaine de l'hyperstatique spatiale. La représentation plane de systèmes gauches n'a rien perdu de son actualité. D'autre part, la notion d'ellipsoïde de déformation était certainement connue des professeurs Mayor et Maurice Paschoud.

Outre-Rhin, ce problème fit aussi l'objet de recherches fructueuses ; le calcul par les variations de coordonnées des nœuds avait déjà fait ses preuves en électrotélémétrie ; K. Friedrich attribua les mêmes poids aux côtés d'un réseau télémétrique et aux barres d'un système, et fit varier la température dans les barres non coupées. Il aboutit à des équations aux déformations analogues à celles de Mayor, mais avec, en plus, des termes absolus. Théoriquement les coefficients des inconnues ne sont pas les mêmes, car l'éminent professeur lausannois ne fait pas de coupures ; en pratique, on ne fera pas de discrimination. Par contre, on obtient d'autres valeurs pour les inconnues selon qu'on opère des coupures ou pas.

On peut regretter que Mayor n'ait pas exposé pourquoi il renonçait à une méthode dite classique ; mais, vis-à-vis d'interlocuteurs, membres de la section de mécanique de l'Académie, il aura sans doute estimé

[1] Publication subsidiée par la Société académique et le Fonds national et patronnée par la direction de l'EPUL. Ce texte fait suite à celui paru le 23 mars 1968.

que c'était inopportun. La méthode sans coupures paraissait être si simple. La formation de dérivées n'est pas nécessaire. Il convient cependant d'apporter une précision : si on veut pousser à fond le calcul des déformations y compris celui des poids des barres à posteriori, qui est parfois laborieux, la solution par coupures peut présenter des avantages mais qui ne compensent guère ceux réalisés sans coupures.

A la base de la théorie, il est essentiel de remarquer que les forces dites de remplacement pour les barres coupées sont *arbitraires* :

$$0^T, \ \pm 1^T, \ \pm 2^T \ \ldots ;$$

en général on peut admettre une valeur nulle. Le cas concret traité ci-après le montrera. Ces forces de remplacement, arbitraires, sont sans influence sur les matrices aux coefficients des équations normales (dérivées partielles de l'énergie) et sur les matrices inverses qui sont à la base du calcul des déformations ; seuls les termes absolus sont modifiés.

La possibilité d'effectuer en quelques secondes l'inversion de ces matrices symétriques est l'élément capital qui a joué un rôle en hyperstatique moderne comme précédemment en électrotélémétrie ; à cet effet le centre de calcul électronique de l'EPUL apporta sa collaboration.

Calcul Stress

En complément des éléments fournis dans le *Bulletin technique* du 2 décembre dernier, il convient de préciser ce qui suit :

« La machine, sur la base des coordonnées des nœuds, de la topologie du système, des sections des barres et des conditions aux appuis, fournit directement les efforts axiaux et les déplacements des nœuds.

» Durée des calculs : 71 secondes. »

(Chaire de statique de Zurich.)

A la base du calcul STRESS est la solution que l'on pourrait désigner sous l'appellation : Mayor-Mémoires AIPC (Association internationale ponts et charpentes).

Dans son texte destiné à l'Académie, Mayor a converti ses équations en vue de la représentation plane ; les nœuds sont matérialisés par des plaques mobiles ; dans le cours de statique de l'EPUL 1926 cette conversion est traitée à fond. Les droits de priorité de l'éminent professeur lausannois furent parfois méconnus par des auteurs dont la bonne foi était manifeste. Avant de poursuivre, énumérons quelques notations (indices à ajouter) :

A	Travail de déformation (Energieaufwand)
T	Efforts axiaux dans les barres
E	Coefficients d'élasticité
ν	Variations de longueurs des barres ($\nu = mT$)
a, b, c	Coefficients des inconnues dans les équations aux déformations
f	Termes absolus de ces équations
p	Poids des barres (proportionnels à $1/m$)
P	Poids des barres à posteriori (somme des p/P = nombre d'inconnues)
Dx, Dy, Dz	Variations coordonnées des nœuds (sans coupures)
dx, dy, dz	Variations coordonnées des nœuds (avec coupures)
m	Modules des barres (Federungen)
m_e	Déformation quadratique moyenne pour l'unité de poids

Il en résulte que la condition bien connue du minimum revêt trois formes :

$$\text{Somme des } (mT^2) \text{ ou des } (mT)^2 \frac{1}{m} \text{ ou des } (\nu^2 p).$$

Le principe des moindres carrés se présente sous une forme manifeste, bien mieux encore que lors du calcul des réseaux électrotélémétriques.

Application : calcul d'une coupole
(Exemple de caractère didactique)

Les éléments de la structure sont ceux du tableau ci-dessous (unité de mesure arbitraire) :

	Nœuds	x	y	z
4 nœuds libres	1	+ 1	0	+ 1
	2	0	— 1	+ 1
	3	— 1	0	+ 1
	4	0	+ 1	+ 1
	5	+ 2	0	0
	6	0	— 2	0
	7	— 2	0	0
	8	0	+ 2	0

Il y a 22 barres, dont 10 surabondantes. Une figure n'est pas nécessaire, car tous les éléments sont fournis par les tableaux des coordonnées et des coefficients.

Le plus malaisé est de savoir si on fait ou non des coupures.

Tableau des coefficients des équations aux déformations et des poids

Barres	dx_1	dy_1	dz_1	dx_2	dy_2	dz_2	dx_3	dy_3	dz_3	dx_4	dy_4	dz_4	p_i	Barres
1-2	+ 0,707	+ 0,707		— 0,707	— 0,707								0,80	1-2
2-3				+ 0,707	— 0,707		— 0,707	+ 0,707					0,80	2-3
3-4							— 0,707	— 0,707		+ 0,707	+ 0,707		0,80	3-4
4-1	+ 0,707	— 0,707								— 0,707	+ 0,707		0,80	4-1
1-3	+ 1,00						— 1,00						0,70	1-3
2-4					— 1,00						+ 1,00		0,70	2-4
1-5	— 0,707	0,00	+ 0,707										1,27	1-5
1-6	+ 0,41	+ 0,815	+ 0,41										1,00	1 6
1-7	+ 0,949	0,00	+ 0,316										1,00	1-7
1-8	+ 0,41	— 0,815	+ 0,41										1,00	1-8
2-5				— 0,815	— 0,41	+ 0,41							1,00	2-5
2-6				0,00	+ 0,707	+ 0,707							1,27	2-6
2-7				+ 0,815	— 0,41	+ 0,41							1,00	2-7
2-8				0,00	— 0,949	+ 0,316							1,00	2-8
3-5							— 0,949	0,00	+ 0,316				1,00	3-5
3-6							— 0,41	+ 0,815	+ 0,41				1,00	3-6
3-7							+ 0,707	0,00	+ 0,707				1,27	3-7
3-8							— 0,41	— 0,815	+ 0,41				1,00	3-8
4-5										— 0,815	+ 0,41	+ 0,41	1,00	4-5
4-6										0,00	+ 0,949	+ 0,315	1,00	4-6
4-7										+ 0,815	+ 0,41	+ 0,41	1,00	4-7
4-8										0,00	— 0,707	+ 0,707	1,27	4-8

Matrice symétrique des coefficients des équations normales (résolution par calcul électronique)

Dérivées de l'énergie

3,37	0,00	0,00	— 0,40	— 0,40	0,00	— 0,70	0,00	0,00	+ 0,40	+ 0,40	0,00
	2,14	0,00	— 0,40	— 0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 0,40	— 0,40	0,00
		1,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
			2,14	0,00	0,00	— 0,40	+ 0,40	0,00	00,0	0,00	0,00
				3,37	0,00	+ 0,40	— 0,40	0,00	0,00	— 0,70	0,00
					1,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
						3,37	0,00	0,00	— 0,40	— 0,40	0,00
							2,14	0,00	— 0,40	— 0,40	0,00
								1,07	0,00	0,00	0,00
									2,14	0,00	0,00
										3,37	0,00
											1,07

Coefficients :
$[paa]$, $[pbb]$ ...
$[pab]$, $[pac]$ ...
Termes absolus :
$[paf]$, $[pbf]$ ...

Déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids :

(1) $m_o^2 \cong [pvv] : 10$. Provisoirement on pose parfois : $m_o^2 = 1$

Matrice symétrique aux coefficients de poids (inverse de la précédente)

(Calcul par le centre de calcul électronique de l'EPUL)

0,339	0	0	+ 0,079	+ 0,025	0	+ 0,083	0	0	+ 0,079	— 0,025	0
	0,535	0	+ 0,102	+ 0,079	0	0	— 0,008	0	— 0,102	+ 0,079	0
		0,935	0	0	0	0	0	0	0	0	0
nœud 1			0,535	0	0	+ 0,079	— 0,102	0	— 0,008	0	0
				0,339	0	— 0,025	+ 0,079	0	0	+ 0,008	0
					0,935	0	0	0	0	0	0
				nœud 2		0,339	0	0	+ 0,079	+ 0,025	0
							0,535	0	+ 0,102	+ 0,079	0
								0,935	0	0	0
							nœud 3		0,535	0	0
										0,339	0
											0,935
									nœud 4		

Valeurs indépendantes des f_i :

$$\sqrt{0{,}339} = 0{,}582$$
$$\sqrt{0{,}535} = 0{,}731$$
$$\sqrt{0{,}935} = 0{,}967$$

Grâce au choix des axes de coordonnées, on obtient les demi-axes principaux des quatre ellipsoïdes de déformation (pour $m_o^2 = 1$) soit 0,582, 0,731, 0,967 ; la somme (0,339 + 0,535 + 0,935 = 1,809) est un invariant. Le grand axe est vertical et le petit dirigé suivant la diagonale 1-3. Le calcul devient définitif quand m_o^2 est connu (dimensions fournies par l'équation (1)). Mais jusque-là les termes absolus f_i ne jouent pas de rôle.

Poids des barres à posteriori P_i

On sait que la somme $[p_i : P_i]$ est égale au nombre des inconnues, ce qui caractérise la méthode des moindres carrés. Ces P_i sont les poids des binômes $(-f_i + v_i)$.

On trouve :

	p_i	$p_i : P_i$	
Arêtes supérieures (1-2, 2-3, 3-4, 4-1)	0,8	0,472×4=1,89	
Diagonales face supérieure (1-3, 2-4)	0,7	0,358×2=0,716	Ici les poids les plus faibles sont amplifiés plus fortement que les autres
Arêtes 1-5, 2-6, 3-7, 4-8	1,27	0,81 ×4=3,24	
Diagonales faces latérales (1-6, 2-5, 2-7, 3-6, 3-8, 4-7, 4-5, 8-1)	1,00	0,572×8=4,576	
Barres 1-7, 2-8, 3-5, 4-6	1,00	0,398×4=1,59	
		$[p_i : P_i]$ = 12,01	(nombre d'inconnues).

Par exemple, pour la diagonale 1-3 :

$$1 : P_5 = 0{,}339 + 0{,}339 - 2 \times 0{,}083 = 0{,}512 ;$$
$$p_5 : P_5 = 0{,}70 \times 0{,}512 = 0{,}358.$$

Ces calculs constituent un précieux contrôle.

Enumérons succinctement les six solutions présentant le plus d'intérêt :

1re solution : C'est celle développée dans les tableaux et matrices ci-joints. On opère 10 coupures et il y a 12 inconnues (variations de coordonnées). Le système dit principal ou fondamental est calculé en représentation plane d'après Mayor, ce qui fournit les termes absolus des 22 équations aux déformations. Il y a 12 équations normales (dérivées de l'énergie). La formation de 12 équations d'équilibre n'est pas nécessaire.

2e solution : Par le calcul STRESS. On sait que la Chaire de statique et constructions métalliques de Zurich a eu l'amabilité de recalculer la coupole à 15 barres surabondantes contenue dans la publication nº 95 de l'EPUL. A la base de cette solution, il y a la méthode Mayor-Mémoires AIPC. Ce fut une performance.

3e solution : C'est celle de Mayor avec *représentation plane* (voir [1]). Il faut déterminer quatre valeurs inconnues pour les rotations des quatre plaques mobiles et huit valeurs pour les coordonnées des centres de rotation. Les équations d'équilibre sont au nombre de 12 et celles aux déformations au nombre de 22.

4e solution : Le calcul revêt la forme d'un extrêmum lié ; chaque barre surabondante donne lieu à une équation linéaire en v_1, v_2, v_3 ... Dans le cas particulier, il y aura 10 équations normales, les inconnues étant les coefficients corrélatifs. Cette solution, de même que la prochaine, se prête moins bien au calcul des ellipsoïdes de déformation. Il faudrait ensuite exprimer les v en fonction des variations de coordonnées.

5e solution : Elle est dite aux équations d'élasticité ; c'était autrefois la plus connue, mais pas la meilleure dès que le nombre des barres surabondantes va en augmentant et si le calcul doit porter sur les déformations.

6e solution : Des chercheurs, notamment à l'EPUL, envisagent d'appliquer la statistique mathématique ; quand on mesure des déformations, la statistique, en liaison avec la méthode des moindres carrés, fournit une solution (voir Publication nº 98, EPUL). Ici il s'agit de calculs, mais la possibilité de pouvoir appliquer la statistique constituerait un réel progrès. En fait, c'est aboutir en principe à la solution de K. Friedrich.

En *conclusion*, on constate que l'hyperstatique spatiale des systèmes articulés est un problème complexe qui évolue rapidement ; le calcul par les déformations devient incontestablement prépondérant. L'ellipsoïde de déformation constitue un élément essentiel, car il n'est pas indifférent que cette surface soit presque sphérique, très aplatie ou très allongée. Judicieusement la Chaire de statique de Zurich a fait remarquer que ces surfaces permettent de juger du caractère des matrices.

LITTÉRATURE

[1] MAYOR, B. : *Statique graphique des systèmes spatiaux* (Lausanne, 1926) (cours de statique EPUL).

[2] ANSERMET, A. : *Neue Methode zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkkuppeln* (traduction Chaire de statique, Zurich) (publication subsidiée par le Fonds national).

LA NOUVELLE CASERNE DES TROUPES DU GÉNIE À BREMGARTEN (AG)

1. Situation et conception d'ensemble *

Cette caserne est située au nord-ouest de Bremgarten, dans un coude de la Reuss et à l'ouest de celle-ci, sur un terrain constitué par une ancienne gravière.

Les bâtiments sont étagés sur la pente et autour d'un grand espace libre, lui-même disposé en terrasses successives et espaces verts. Cet espace central est dégagé à l'est avec vue sur la rivière et la ville par-dessus les garages enterrés.

La disposition des bâtiments, relativement volumineux, permet une remarquable intégration dans le site qui respecte le paysage.

L'accès à l'ensemble se fait par la route militaire au nord.

Les bâtiments se répartissent de la manière suivante :

a) Maisons des compagnies.
b) Réfectoire.
c) Enseignement théorique.
d) Commandement et logement officiers.
e) Garde et véhicules à moteur.

2. Description générale

A. *Maisons des compagnies*

Elles hébergent en tout 584 sous-officiers et soldats.

Au nombre de quatre, elles sont disposées en gradins et décalées en plan pour s'adapter à la pente. Chaque maison est elle-même composée d'une partie chambres et d'un corps perpendiculaire sur pilotis formant préau couvert en relation directe avec une petite place ; chaque maison forme un organisme autonome avec son préau. Cette séparation et la faible hauteur des bâtiments, avec chacun sa circulation propre, visent à faciliter le service.

Chaque maison comprend, au rez, les chambres pour 26 sous-officiers et un bureau. Les 1er et 2e étages contiennent chacun 6 chambres pour 10 soldats. Le corps de bâtiment à demi-niveau comprend les salles d'eau, W.-C., douches, vestiaires. Au sous-sol sont situés les dépôts et les abris.

B. *Réfectoire*

Ce bâtiment sur un seul niveau comprend deux réfectoires pour 120 hommes chacun, avec entrées séparées et s'ouvrant sur un hall avec buffet de cantine central.

Au milieu du bâtiment, on trouve encore la salle à manger pour 104 sous-officiers.

L'ensemble a été conçu pour pouvoir servir 600 repas dans un laps de temps très court.

C. *Salles de cours*

Les locaux de cours comprennent, au rez, une salle de projection de 220 places et quatre salles de 32 places.

Au rez inférieur sont aménagées trois salles d'exercice à l'air libre pour le maniement des mines, explosifs et les exercices du génie, ainsi qu'un atelier et un local de transformateurs.

D. *Locaux de commandement et logement des officiers* (Zentrum)

Les locaux suivants sont groupés autour d'une cour centrale proche des voies d'accès :

— groupe de commandement, bureaux (commandant de place et chancellerie) et local de poste au rez ; chambres d'officiers au 1er étage ;
— infirmerie et annexes, pharmacies et 9 chambres pour les malades ;
— administration de la caserne, central téléphonique, magasins, lingerie et étendage ;

* Le projet de cette construction a fait l'objet d'un concours suisse en 1959. Il avait été organisé par la Direction des constructions fédérales, avec la collaboration du Service du génie et des fortifications. Le 1er prix avait été attribué aux architectes Guyer, Pauli, et Volland, à Zurich. L'exécution a été réalisée par l'association Rud. et Esther Guyer et Manuel Pauli, par suite du décès du troisième participant.
Les évidentes qualités architecturales de cette réalisation, tant dans l'esprit que dénote la conception constructive et fonctionnelle que dans la préoccupation d'intégration dans le site, nous ont incité à la présenter à nos lecteurs. *Réd.*