Sur le calcul d'une coupole hyperstatique au point de vue des déformations

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **93 (1967)**

Heft 24

PDF erstellt am: **03.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-69096

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1. En ce qui concerne la mesure du flux moyen :
   Lorsque le taux de comptage est relativement élevé (niveau de puissance nominale du réacteur), la constante de temps de l'appareillage de mesure est satisfaisante et il n'y a pas lieu de prendre des mesures particulières pour l'utiliser dans une chaîne de réglage.
   Au contraire, pour les taux de comptage bas (niveau de démarrage du réacteur), la constante de temps de plusieurs secondes peut devenir gênante, ou même dangereuse lors de son utilisation dans une chaîne de réglage automatique.
2. Pour la mesure de la *période*, nous constatons que pour les faibles taux de comptage, c'est le temps de réponse des intégrateurs logarithmiques qui est prépondérant, tandis qu'aux taux élevés, c'est celui des périodemètres qui l'emporte.

On en déduit que les systèmes de mesure exposés ci-dessus peuvent être utilisés dans le réglage automatique d'un réacteur de puissance, lors du démarrage ou de l'arrêt, lorsque la période est maintenue supérieure à quelque 50 secondes. Ils seront également utiles dans le réglage des réacteurs de faible puissance en fonctionnement normal.

Par contre, dans le cas d'anomalies de fonctionnement du réacteur, et d'une façon plus générale en ce qui concerne les équipements de sécurité et d'alarme, leur information perd la plus grande partie de son intérêt, le temps de réponse devenant prohibitif.

SUR LE CALCUL D'UNE COUPOLE HYPERSTATIQUE AU POINT DE VUE DES DÉFORMATIONS

par A. ANSERMET [1], ing.-prof.

Rappel de notions générales et usuelles

Le calcul d'une structure hyperstatique articulée est un problème encore fort controversé ; cela tient en partie à la diversité des solutions à adopter. Il n'est pas toujours facile de faire un choix et, dans les lignes qui suivent, il n'est pas question de prendre position de façon positive en faveur de l'une ou l'autre des solutions.

En effet, presque simultanément, à Zurich et Lausanne, un même système articulé spatial à 15 barres surabondantes fut calculé au point de vue des déformations, par des voies ~~complètement~~ différentes ; à Zurich, chaire de statique appliquée et de constructions métalliques, le calcul fut effectué en 71 secondes. A Lausanne (publication EPUL nº 95), la durée du travail était à peu près du même ordre de grandeur quant aux opérations menées à chef par voie électronique, ainsi qu'on le verra ci-après. Les résultats obtenus à Zurich et Lausanne concordent de façon réjouissante.

Comme solution encore moderne, il faut citer celle contenue dans le cours de statique de l'EPUL (EIL) de 1926 ; les caractéristiques sont les suivantes : on ne fait *pas de coupures* et le nombre des équations concorde avec celui des inconnues, ce qui est séduisant ; B. Mayor a établi des équations d'équilibre, linéaires, dont les termes absolus ne sont pas tous différents de zéro, des équations aux liaisons, linéaires, sans termes absolus et surtout, ce qui était nouveau, des équations aux déformations. Ces dernières jouent un rôle capital : elles sont aussi linéaires et sans termes absolus. Les variations de coordonnées des nœuds, qui figurent dans les membres de gauche, sont les déplacements subis sous l'action des forces extérieures. Cette publication de 1926 est trop connue pour donner lieu à d'autres commentaires.

Récemment, dans les Mémoires de l'Association internationale des ponts et charpentes (AIPC), deux éminents staticiens, dans des articles remarquables, appliquèrent en principe la même solution, l'un planimétriquement, l'autre spatialement. Pour éviter tout malentendu, en ce qui concerne des questions de priorité, il convient de préciser qu'à la Rédaction des Mémoires AIPC on connaissait la première publication de Mayor seulement.

L'éminent professeur lausannois s'est borné à poser les équations, tandis que les professeurs Naruoks et Li développèrent le problème surtout en ce qui concerne l'ordre d'élimination des inconnues.

Quant à la chaire de Zurich, elle s'exprimait récemment comme suit : « Il existe une « langue » créée aux Etats-Unis pour l'utilisation des calculatrices électroniques au domaine des ossatures ; il s'agit du STRESS...

» ... Nous nous sommes permis de faire recalculer par le STRESS l'exemple de la figure I de votre article (Publication nº 95, EPUL). »

La structure en question comprend 30 barres, dont 15 surabondantes et 5 nœuds libres ; ce calcul sera développé ci-après. Avant de poursuivre, énumérons des *notations* : admettons tout d'abord, pour simplifier, un seul nœud libre

A	le travail de déformation dont on forme les dérivées partielles ;
v_i	les variations de longueur des barres ;
l_i, S_i	les longueurs et sections transversales de celles-ci ;
T_i, E_i	les efforts axiaux et coefficients d'élasticité ;
Dx, Dy, Dz	les variations de coordonnées du nœud (solution sans coupures) ;
dx, dy, dz	les variations de coordonnées du nœud (après coupures) ;
p_i et P_i	les poids des barres à priori et posteriori.

Rôle des coupures. Initialement on aurait ici trop d'équations, d'où les coupures ; la condition du minimum pour A doit intervenir. Cette solution est plus connue que la précédente ; depuis longtemps, outre-Rhin, on remarqua la forme :

(1) $\quad$ somme des $pvv = [pvv] =$ minimum.

[1] Publication patronnée par la chaire de constructions métalliques EPUL.

Certains auteurs justifient le principe des moindres carrés en le considérant comme conséquence du théorème sur le travail minimum.

$$(2) \qquad v_i = \frac{T_i\, l_i}{E_i\, S_i} = a_i\, Dx + b_i\, Dy + c_i\, Dz =$$
$$= a_i\, dx + b_i\, dy + c_i\, dz + f_i \text{ (poids } p_i)$$

les termes absolus f_i étant fournis par le système dit fondamental (Grundsystem), les p_i sont proportionnels à $\frac{E_i\, S_i}{l_i}$. Théoriquement, les a_i, b_i, c_i ne sont pas rigoureusement les mêmes dans le dernier et l'avant-dernier membre ($a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$). On verrait sans peine que le lieu des points tels que $A =$ *constante* est ellipsoïdal, le centre de la surface répondant à la condition du minimum.

Toujours outre-Rhin on a, depuis longtemps, remarqué l'analogie existant avec les réseaux électrotélémétriques ; le calcul de ceux-ci est traité à fond.

Le théorème ci-après, de Friedrich, exprime cette analogie ; voici sa forme originale : « Im 3. dimensionalen Raum stimmen der einknotige statisch beliebig unbestimmte Stabverband und der zugehörige überbestimmte Kugelschnitt völlig überein. »

Bien entendu, planimétriquement, c'est « Bogenschnitt » qu'il faut lire. Les poids des barres et ceux des côtés du réseau seront les mêmes, à un facteur près.

Les praticiens de l'électrotélémétrie, rompus à ce genre de calculs, pourraient collaborer utilement ; ils se sont efforcés de rendre sphériques tous les ellipsoïdes relatifs à un groupe de nœuds, mais sans succès. Il est clair que si un ellipsoïde de déformation est très aplati ou presque sphérique, cela joue un rôle. La chaire de Zurich estime qu'il faut étendre cette théorie à la solution dite classique (Castigliano-Menabréa), qui est maintenant bien désuète ; c'est possible, mais il faut changer les variables.

Il y a encore un élément qui fournit l'échelle des ellipsoïdes : la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids à calculer par :

$$(3) \qquad m_o^2 \cong \frac{[pvv]}{\text{nombre barres surabondantes}}.$$

Parfois les praticiens posent provisoirement :

$m_o^2 = 1$ (numériquement, ce 1 ayant une dimension).

Avant de passer à des applications, formons encore les dérivées partielles de l'énergie ou équations normales ; on obtient :

$$(4) \qquad [pav] = 0, \quad [pbv] = 0, \quad [pcv] = 0$$

toujours pour un seul nœud libre. La suite des calculs est connue.

Applications

La première application portera sur la coupole Schwedler, traitée dans le cours de statique de 1926, mais en ajoutant 12 contre-diagonales 1-8, 2-9, ... 7-14, 8-15 ... (voir figure). Tous les éléments du calcul peuvent être déduits du tableau ci-après des coordonnées, l'origine étant au centre de l'hexagone des nœuds fixes 13-14 ... 18 :

Nœuds	x	y	z
1	+ 7m,1	0	+ 10m
2	+ 3,55	— 6m,15	10m
3	— 3,55	— 6,15	10m
4	— 7,1	0	10m
5	— 3,55	+ 6,15	10m
6	+ 3,55	+ 6,15	10m
7	+ 12,1	0	+ 5m
8	+ 6,05	— 10,48	5m
9	— 6,05	— 10,48	5m
10	— 12,1	0	5m
11	— 6,05	+ 10,48	5m
12	+ 6,05	+ 10,48	5m

Nœuds fixes	x	y	z
13	+ 15m,0	0	0
14	+ 7,5	— 13m,0	0
15	— 7,5	— 13m,0	0
16	— 15,0	0	0
17	— 7,5	+ 13,0	0
18	+ 7,5	+ 13,0	0

Les contre-diagonales ne sont pas tracées.

Le calcul des coefficients des équations peut être semi-graphique ; les longueurs des diagonales supérieures est 11m,65 et pour les inférieures 14m,65.

Equations d'équilibre. Pour le nœud 1, par exemple, les termes absolus sont les composantes X_1, Y_1, Z_1 de la force extérieure F_1 ; en valeurs absolues, admettons :

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0{,}577\ F_1.$$

Equations aux déformations. Considérons la contre-diagonale 1-8 ; il n'y a pas de terme absolu :

$$+ 0{,}090\ (Dx_1 - Dx_8) + 0{,}900\ (Dy_1 - Dy_8) +$$
$$+ 0{,}430\ (Dz_1 - Dz_8) = m_{1.8}\ T_{1.8}$$

$\overline{0{,}090}^2 + \overline{0{,}900}^2 + \overline{0{,}430}^2 = 1$; $m_{1.8}$ est appelé module de la barre par Mayor. Il y a en tout 84 équation (36 d'équilibre, 48 aux déformations) et 84 inconnues (48 efforts axiaux, 36 variations de coordonnées).

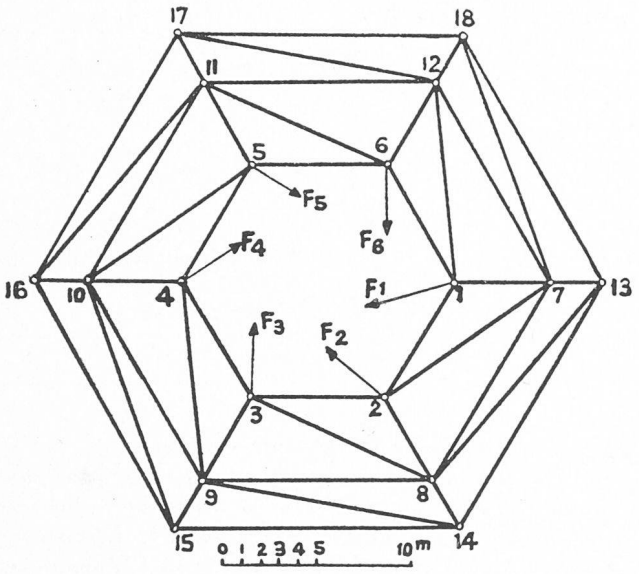
Cette solution fut donc reprise et développée dans les Mémoires AIPC.

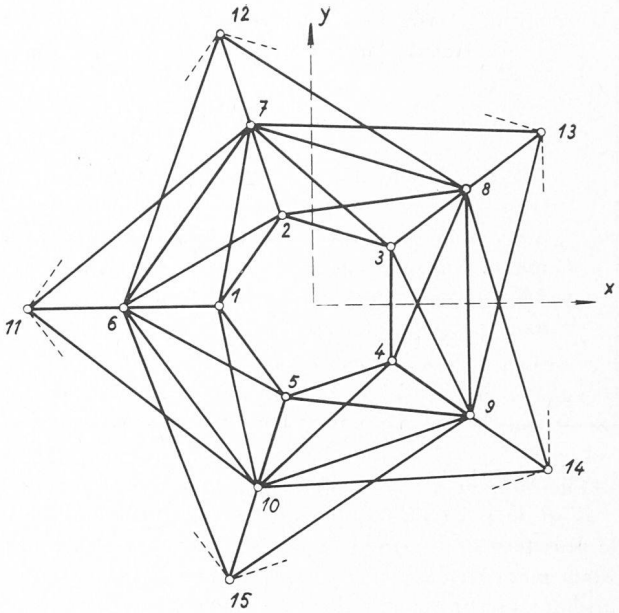
Deuxième application

Le nouveau mode de calcul STRESS (USA) a été appliqué à Zurich à la coupole à 15 barres surabondantes traitée dans la publication n° 95 de l'EPUL ; à Lausanne, on avait fait des coupures. Avec le STRESS on obtint en 71 secondes les déformations et les efforts, ce qui est une performance. En comparant les résultats, la chaire de Zurich précise : « La concordance n'est pas parfaite pour le dernier chiffre probablement parce que nous avons introduit les coordonnées arrondies figurant dans votre article. » Cette concordance est bonne, car l'auteur de ces lignes a admis comme hypothèse que les calculs avaient lieu par voie semi-graphique. Les éléments diagonaux des matrices surtout concordent bien, ce qui est l'essentiel.

La structure à 30 barres, dont 15 surabondantes avec 5 nœuds libres donne lieu donc à 15 variations de coordonnées inconnues.

On a les valeurs suivantes, l'unité de mesure étant arbitraire :





Nœuds	x	y	z
1	— 0,62	0	+ 1,5
2	— 0,19	+ 0,59	+ 1,5
3	+ 0,50	+ 0,365	+ 1,5
4	+ 0,50	— 0,365	+ 1,5
5	— 0,19	— 0,59	+ 1,5

Nœuds fixes	x	y	z
6	— 2,00	0	0
7	— 0,62	+ 1,90	0
8	+ 1,62	+ 1,18	0
9	+ 1,62	— 1,18	0
10	— 0,62	— 1,90	0

Ici encore le calcul peut être semi-graphique.

De ces chiffres on déduit les coefficients des équations aux déformations, qui sont pratiquement les mêmes pour les solutions avec ou sans coupures.

On forme ensuite la matrice symétrique aux coefficients des équations normales, c'est-à-dire les dérivées partielles de l'énergie puis la matrice inverse aux coefficients de poids des 15 inconnues, calcul effectué par le *Centre de calcul électronique EPUL.*

Les calculs par les moindres carrés étant assez laborieux, les praticiens font des contrôles ; il y a celui par les poids des barres à posteriori P_i ; on obtient :

5	barres	$p_i = 0{,}7$	$1/P_i = 0{,}630$
5	»	$p_i = 1{,}15$	$1/P_i = 0{,}581$
10	»	$p_i = 1{,}0$	$1/P_i = 0{,}512$
10	»	$p_i = 0{,}8$	$1/P_i = 0{,}533$

et on forme la somme :

$$[p_i : P_i]\,{}^{30}_{1} = 14{,}95 \text{ (calcul à la règle).}$$

Barres	dx_1	dy_1	dz_1	dx_2	dy_2	dz_2	dx_3	dy_3	dz_3	dx_4	dy_4	dz_4	dx_5	dy_5	dz_5	Poids
1-2	—0,59	—0,81		+0.59	+0,81											0,7
2-3				—0,95	+0,31		+0,95	—0,31								0,7
3 4								+1,0			—1,0					0,7
4-5										+0,95	+0,31		—0,95	—0,31		0,7
5-1	—0,59	+0,81											+0,59	—0,81		0,7
1-6	+0,73	0	+0,684													1,15
1-7	0	—0,824	+0,564													1
1-8	—0,79	—0,412	+0,457													0,8
1-9	—0,79	+0,412	+0,457													0,8
1-10	0	+0,824	+0,564													1
2-6				+0,785	+0,25	+0,564										1
2-7				+0,226	—0,69	+0,684										1,15
2-8				—0,785	—0,25	+0,564										1
2-9				—0,636	+0,622	+0,457										0,8
2-10				+0,15	+0,875	+0,457										0,8
3-6							+0,88	+0,13	+0,457							0,8
3-7							+0,486	—0,668	+0,564							1
3-8							—0,59	—0,43	+0,684							1,15
3-9							—0,486	+0,668	+0,564							1
3-10							+0,394	+0,796	+0,457							0,8
4-6										+0,88	—0,13	+0,457				0,8
4-7										+0,394	—0,796	+0,457				0,8
4-8										—0,486	—0,668	+0,564				1
4-9										—0,59	+0,43	+0,684				1,15
4-10										+0,486	+0,668	+0,564				1
5-6													+0,785	—0,25	+0,564	1
5-7													+0,15	—0,875	+0,457	0,8
5-8													—0,636	—0,622	+0,457	0,8
5-9													—0,785	+0,25	+0,564	1
5-10													+0,226	+0,69	+0,684	1,15

$$
\begin{array}{llllllllllllllll}
+0{,}509 & 0 & 0 & \ldots & & & & & & & & & & & & \\
 & 0{,}440 & 0 & \ldots & & & & & & & & & & & & \\
 & & 0{,}663 & \ldots & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0{,}445 & -0{,}020 & -0 & \ldots & & & & & & & & \\
 & & & & & 0{,}510 & -0 & \ldots & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0{,}662 & \ldots & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 0{,}487 & +0{,}034 & 0 & \ldots & & & & \\
 & & & & & & & & & 0{,}439 & 0 & \ldots & & & & \\
 & & & & & & & & & & 0{,}662 & \ldots & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0{,}487 & -0{,}034 & 0 & \ldots \\
 & & & & & & & & & & & & & 0{,}439 & 0 & \ldots \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0{,}662 & \ldots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0{,}445 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & +0{,}020 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0{,}510 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0{,}662
\end{array}
$$

C'est cette matrice qui fut recalculée à Zurich par le mode de calcul STRESS.

Pour chacun des cinq nœuds, il y a les trois coefficients quadratiques (éléments diagonaux) puis les trois non quadratiques ; ces 30 éléments suffisent pour le calcul des 5 ellipsoïdes de déformation. Pour le nœud 1 par exemple, les longueurs des axes principaux sont proportionnelles à

$$\sqrt{0{,}51} = 0{,}714, \quad \sqrt{0{,}44} = 0{,}664, \quad \sqrt{0{,}66} = 0{,}812.$$

Théoriquement 15 (nombre d'inconnues).

C'est le p_i le plus faible qui est le plus amplifié et le plus fort 1,15 le moins ; ce n'est pas toujours le cas. Pour mémoire : on a le « contrôle par sigma » (sigma-probe) ; on forme la différence $[pvv] - [pff]$ de deux manières ; c'est le moment critique.

Rôle des poids p_i. Les éléments ci-dessus furent un peu modifiés en réduisant à 0,4 au lieu de 0,7 les poids de 5 barres. Les longueurs des axes principaux sont alors proportionnelles, toujours pour le nœud 1, à

$$0{,}73 : 0{,}70 : 0{,}81.$$

En conclusion, on peut dire que les résultats obtenus à Zurich avec le mode de calcul STRESS concordent de façon réjouissante avec ceux de Lausanne. Mais il n'est pas facile de dire dans quels cas la solution *sans* coupures est à adopter et dans quels cas celle *avec* coupures. Le Prix Mayor, créé à l'EPUL, permettrait à un candidat de pousser plus à fond l'étude de ce problème complexe.

LITTÉRATURE

[1] Mayor, B. : Cours de statique EPUL 1926.
[2] Ansermet, A. : Publications EPUL nos 95, 98.
[3] Friedrich, K. : *Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet* (Zeitschrift Vermessungswesen 1943).
[4] Ansermet, A. : *Neue Methode zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkkuppeln* (traduction chaire de statique EPF).

DIVERS

Transmission d'information au moyen de satellites

L'*Association suisse de techniques spatiales* et la *Section suisse de l'« Institute of Electrical and Electronic Engineers »* (IEEE) ont organisé, le 7 novembre, au Kursaal de Berne, une journée d'information sur ce thème très actuel.

Dans son introduction, le conseiller aux Etats *E. Choisy*, Dr h.c. et président de la Commission fédérale consultative pour les affaires spatiales, souligne la disproportion des sommes accordées actuellement par an pour les recherches nationales (0,7 million de francs) en regard de celles que nous dépensons pour notre participation aux organismes européens (5,3 millions de francs pour l'ESRO). Le succès du récent lancement de la première fusée-sonde expérimentale suisse vient d'apporter la preuve des résultats que l'on peut obtenir par une étroite collaboration entre hommes de science et industriels. M. Choisy souhaite ardemment qu'un fonds de la recherche appliquée permette par la suite de faciliter de telles réalisations.

Le premier conférencier, le Dr *H. Paul*, collaborateur scientifique de la maison Brown, Boveri & Cie, à Baden, nous exposa de manière fort claire les raisons pour lesquelles la position d'un satellite dit « stationnaire » ou « synchrone » doit être corrigée au cours du temps. La non-rotondité de la terre, la lune, le soleil apportent chacun une perturbation à l'orbite idéale du satellite. Selon les conditions et l'heure du lancement, ces perturbations peuvent éventuellement se compenser. Il était également intéressant d'apprendre pourquoi l'orbite de 12 h. des satellites russes de télécommunications est extrêmement stable.

Le Dr *W. Guggenbühl*, chef de section de la maison Contraves, fit l'historique des télécommunications par satellites et décrivit les divers problèmes rencontrés pour l'établissement de telles liaisons.

Ce fut un grand honneur pour les participants d'entendre en fin de matinée le Dr *P. Blassel*, directeur des Etudes du projet CETS, ESRO-Noordwijk, retracer les longs efforts déployés dès mars 1963, date de création de la CETS (Conférence européenne de télécommunications par satellites), pour que l'Europe participe activement à la création d'un réseau de télécommunications par satellites et ne devienne pas définitivement tributaire des toutes-puissantes organisations américaines. Les moyens à disposition à l'ESRO (European Space Research Organisation), à l'ELDO (European Launcher Development Organisation) et dans les industries européennes permettent de résoudre les problèmes techniques de fabrication et de lancement d'un satellite européen de télécommunications. Non sans humour le conférencier releva les difficultés politiques d'un tel projet, avec l'espoir qu'une entente permette de tirer profit des forces vives cachées dans les pays européens.

L'Administration suisse des PTT suit attentivement l'évolution des télécommunications par satellites, preuve en est la compétence avec laquelle le premier conféren-