

Zeitschrift:	Bulletin technique de la Suisse romande
Band:	91 (1965)
Heft:	12
Artikel:	Étude des vibrations d'une coque sphérique viscoélastique sous l'action de diverses pressions intérieures variables en fonction du temps
Autor:	Favre, Henry
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-67659

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPF (Ecole poly-
technique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Cicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgrain, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermann, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre,
arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION

D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua,
architecte
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse Fr. 40.—	Etranger Fr. 44.—
Sociétaires	» 33.—	
Prix du numéro	» 2.—	» 2.50

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,
N° 10 - 5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au
numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à : Imprimerie
La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:	
1/1 page	Fr. 385.—
1/2 "	» 200.—
1/4 "	» 102.—
1/8 "	» 52.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. 1000 Lausanne et succursale



SOMMAIRE

Etude des vibrations d'une coque sphérique viscoélastique sous l'action de diverses pressions intérieures variables en fonction du temps, par Henry Favre, professeur à l'EPF, Zurich.
Association amicale des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne.
Bibliographie. — Divers. — Les congrès. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Nouveautés, informations diverses.

ÉTUDE DES VIBRATIONS D'UNE COQUE SPHÉRIQUE VISCOÉLASTIQUE SOUS L'ACTION DE DIVERSES PRESSIONS INTÉRIEURES VARIABLES EN FONCTION DU TEMPS

par HENRY FAVRE, professeur à l'EPF, Zurich

§ 1. Introduction

Les vibrations des coques sphériques, faites d'une matière élastiquement déformable, ont été l'objet de nombreuses études théoriques¹. Par contre, relativement peu de recherches ont été faites jusqu'à ce jour sur les vibrations des coques sphériques non élastiquement déformables, c'est-à-dire dont la matière ne satisfait pas à la loi de Hooke². Ce dernier cas est cependant devenu très actuel, par l'emploi de plus en plus fréquent des matières plastiques dans l'industrie. C'est la raison pour laquelle nous avons cru utile d'étudier ici les vibrations des coques minces sphériques, viscoélastiques, sous l'action d'une pression intérieure variable en fonction du temps t . Nous nous placerons dans des conditions rela-

tivement simples, celles où tous les points de la coque sont primitivement immobiles, et où aucune tension latente n'existe au moment où commence la variation de la pression intérieure. En outre, nous supposerons que cette variation soit à chaque instant la même en tous les points de la face intérieure de la coque, et qu'elle soit une fonction connue de t . En admettant que la pression extérieure ne varie ni dans l'espace ni dans le temps, les points de la surface moyenne subiront des déplacements radiaux, constamment égaux entre eux. La coque sera donc une couche sphérique de rayon légèrement variable, où seule une tension de membrane uniforme, mais fonction du temps, existera, à l'exclusion de moments de flexion et de torsion.

D'autre part, nous admettrons que la coque soit faite d'une matière où la relation entre les tensions tangentielles et les glissements est conforme au modèle de Maxwell, et où la dilatation cubique est proportionnelle à la tension normale moyenne.

¹ Les titres des publications [1] à [13] de la bibliographie sommaire placée à la fin de ce mémoire permettront au lecteur de se faire une idée de la variété de ces études. Les mémoires cités ne représentent qu'un petit nombre des travaux faits dans ce domaine.

² Voir par exemple les mémoires [14], [15] et [16].

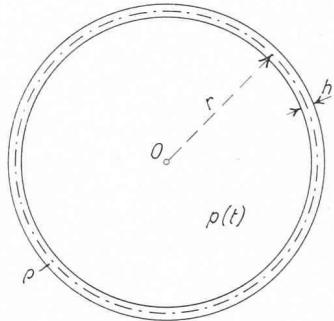


Fig. 1.

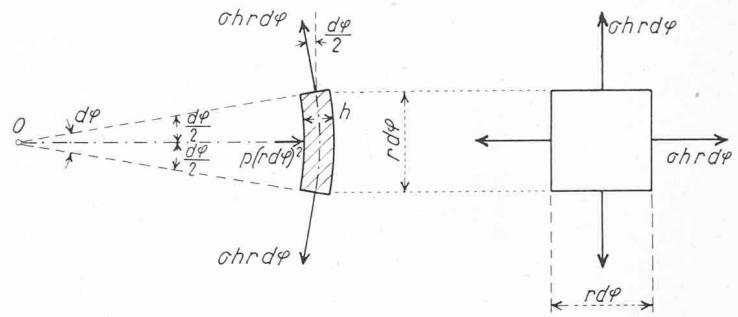


Fig. 2.

Après avoir établi les *équations fondamentales* du mouvement considéré (§ 2), nous examinerons, dans le § 3, le cas particulier des *vibrations libres*, où la pression intérieure est constante, égale à la pression extérieure, et où les conditions initiales du mouvement sont telles que tous les points de la surface moyenne subissent des déplacements radiaux, constamment égaux entre eux. Le § 4 sera consacré au cas où une surpression intérieure, primitivement nulle, devient brusquement très grande pendant un temps très court, pour rester ensuite constamment nulle. La coque subit alors une *percussion intérieure*. Dans le § 5, nous étudierons les vibrations produites par un *accroissement subit de la pression intérieure, qui reste ensuite constante*. Enfin, dans les §§ 6 et 7, seront établies les principales équations relatives à deux cas de vibrations entretenues, où *la pression intérieure est chaque fois une fonction sinusoïdale du temps*.

§ 2. Equations fondamentales des vibrations d'une coque sphérique viscoélastique, sous l'action d'une surpression intérieure, variable en fonction du temps

Soit r le rayon de la surface moyenne de la coque considérée, h l'épaisseur, supposée petite par rapport à r , de cette coque, ρ sa masse spécifique et p la *surpression intérieure*, relative à la pression extérieure qui est supposée constante. Cette surpression p est une certaine fonction connue du temps t (fig. 1). Soit encore $u(t)$ le déplacement radial des points de la surface moyenne, compté positivement vers l'extérieur de la sphère. L'équation du mouvement d'un élément de masse $\rho h(rd\phi)^2$ est (fig. 2) :

$$\rho h(rd\phi)^2 \frac{d^2u}{dt^2} = p(rd\phi)^2 - 4(\sigma hrd\phi) \frac{d\phi}{2},$$

ou
$$\sigma = \frac{r}{2h} \left(p - \rho h \frac{d^2u}{dt^2} \right), \quad (1)$$

$\sigma(t)$ désignant la tension de membrane.

Entre l'allongement spécifique $\epsilon(t)$ d'un élément de l'arc d'un grand cercle de la surface moyenne, et le déplacement radial $u(t)$, existe la relation géométrique :

$$\epsilon = \frac{u}{r}. \quad (2)$$

Pour obtenir une relation entre σ et ϵ , plaçons-nous tout d'abord dans le cas général d'un état de tension

tridimensionnel. Admettons qu'entre les tensions $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ et les déformations $\epsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ existent les relations suivantes, où les points désignent, à deux reprises, les deux équations qu'on obtient en permutant circulairement les indices x, y, z ³ :

$$\left. \begin{aligned} P'[\tau_{xy}] &= Q'[\gamma_{xy}], \dots, \\ P'[\sigma_x - \sigma_y] &= 2Q'[\epsilon_x - \epsilon_y], \dots, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \kappa(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z). \quad (b)$$

Dans ces relations, P' et Q' sont deux opérateurs linéaires, que nous choisirons du premier ordre, en posant :

$$P' = 1 + c_1 \frac{d}{dt}, \quad Q' = d_0 + d_1 \frac{d}{dt}, \quad (c)$$

où chacune des constantes c_1, d_0, d_1 est positive, éventuellement nulle. Le coefficient κ est le *module d'élasticité volumétrique* ou *module de compressibilité* de la matière. D'après (a), nous supposons donc qu'entre les tensions tangentielles et les glissements existe une relation de viscoélasticité linéaire, tandis que d'après (b), nous admettons que la dilatation cubique est proportionnelle à la tension normale moyenne.

Revenons maintenant au cas de la coque considérée, et désignons par x, y deux axes orthogonaux passant par un point de la surface moyenne et situés dans le plan tangent, et par z l'axe perpendiculaire aux deux premiers et passant par ce point. Nous pouvons poser :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \quad \sigma_z \cong 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon, \quad \epsilon_z \neq 0, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

et les équations (a) et (b) se réduisent ici aux suivantes :

$$P'[\sigma] = 2Q'[\epsilon - \epsilon_z], \quad \frac{2}{3}\sigma = \kappa(2\epsilon + \epsilon_z).$$

En éliminant ϵ_z entre ces deux équations, compte tenu de (c), on a finalement la relation cherchée :

$$\sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} - b_0 \epsilon - b_1 \frac{d\epsilon}{dt} = 0, \quad (3)$$

où

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{3\kappa c_1 + 4d_1}{3\kappa + 4d_0}, \\ b_0 &= \frac{18d_0\kappa}{3\kappa + 4d_0}, \quad b_1 = \frac{18d_1\kappa}{3\kappa + 4d_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

³Voir [17], p. 53-5.

Introduisons les expressions (1) et (2) de σ et ϵ dans (3), nous obtenons pour u l'équation :

$$a_1 \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2b_1}{\rho r^2} \frac{du}{dt} + \frac{2b_o}{\rho r^2} u = \frac{1}{\rho h} \left(p + a_1 \frac{dp}{dt} \right). \quad (5)$$

C'est une équation différentielle linéaire, du troisième ordre, à coefficients constants, où le second membre est une fonction de la surpression p et de sa dérivée première. La solution générale de (5) peut s'écrire sous la forme :

$$u = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + C_3 e^{\gamma_3 t} + F(t), \quad (6)$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont les racines (réelles ou imaginaires) de l'équation caractéristique

$$a_1 \gamma^3 + \gamma^2 + \frac{2b_1}{\rho r^2} \gamma + \frac{2b_o}{\rho r^2} = 0, \quad (7)$$

et où $F(t)$ est une solution particulière de l'équation complète. C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires. Ces dernières se déterminent à l'aide des conditions initiales de la vibration, qui doivent donc être au nombre de trois. Ce fait est intéressant, puisqu'il s'agit d'un mouvement à un degré de liberté, où normalement deux conditions initiales suffisent. L'augmentation du nombre de ces conditions est due au fait qu'il ne s'agit plus d'une matière élastiquement déformable, mais d'une matière viscoélastique (cette augmentation serait d'ailleurs supérieure à 1, si les opérateurs linéaires P' et Q' étaient d'un ordre plus grand que le premier).

Dans le cas étudié, les conditions initiales seront donc les suivantes :

$$\underline{(u)_{t=0} = u_o}, \quad \underline{\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = \dot{u}_o}, \quad \underline{\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_{t=0} = \ddot{u}_o}, \quad (8)$$

où $u_o, \dot{u}_o, \ddot{u}_o$ désignent respectivement le déplacement initial, la vitesse initiale et l'accélération initiale d'un point de la surface moyenne de la coque. Ainsi, l'accélération initiale contribue également à définir le mouvement, ce qui n'est pas le cas lorsque la matière est élastique, où seuls le déplacement et la vitesse initiales suffisent. Remarquons encore que la troisième des conditions (8) peut être remplacée par la suivante : $(\sigma)_{t=0} = \sigma_o$, où σ_o désigne la tension initiale. En effet, lorsqu'on connaît cette dernière grandeur, on en déduit directement la valeur de \ddot{u}_o à l'aide de (1), car $(p)_{t=0}$ est également connu.

Nous ferons tous les calculs qui suivent en supposant que la relation entre les tensions tangentialles et les glissements soit conforme au modèle de Maxwell, ce qui revient à poser, par exemple pour τ_{xy} et γ_{xy} ⁴ :

$$\underline{\tau_{xy} + \frac{\mu}{G} \frac{d\tau_{xy}}{dt} - \mu \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = 0}. \quad (9)$$

Un tel modèle comprend en effet deux éléments couplés en série : un ressort, dont nous désignons ici la constante par G (définie en posant $\tau_{xy} = G\tau_{xy}$) et un amortisseur, caractérisé par une constante μ (définie en posant $\tau_{xy} = \mu \frac{d\gamma_{xy}}{dt}$). Dans l'équation (9), τ_{xy} représente la traction du modèle, γ_{xy} son allongement total (fig. 3 a).

En comparant (9) à la première des relations (a), où P' et Q' désignent les opérateurs (c), on en déduit les valeurs des constantes c_1, d_o, d_1 :

⁴ [17], p. 53-2.

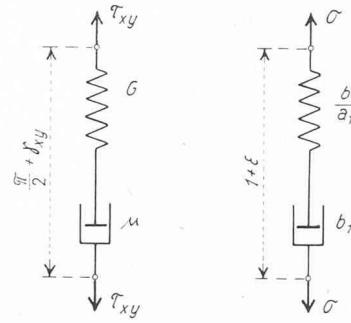


Fig. 3 a.

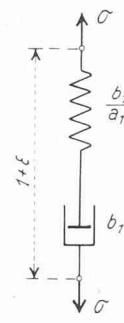


Fig. 3 b.

$$c_1 = \frac{\mu}{G}, \quad d_o = 0, \quad d_1 = \mu, \quad (10)$$

et en substituant dans (4), on obtient celles de a_1, b_o, b_1 :

$$a_1 = \frac{\mu}{G} \left(1 + \frac{4G}{3\kappa} \right), \quad b_o = 0, \quad b_1 = 6\mu. \quad (11)$$

La relation (3) s'écrit donc ici :

$$\sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} - b_1 \frac{d\epsilon}{dt} = 0; \quad (12)$$

elle est également conforme au modèle de Maxwell, mais la constante du ressort est ici b_1/a_1 , et celle de l'amortisseur b_1 (fig. 3 b).

L'équation différentielle (5) et l'équation caractéristique (7) deviennent, la seconde après division par $a_1 \neq 0$:

$$a_1 \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2b_1}{\rho r^2} \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho h} \left(p + a_1 \frac{dp}{dt} \right), \quad (13)$$

$$\gamma \left(\gamma^2 + \frac{1}{a_1} \gamma + \frac{2b_1}{a_1 \rho r^2} \right) = 0. \quad (14)$$

Les racines $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ de (14) sont, compte tenu de (11) :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\gamma_1 = 0}, \\ \underline{\gamma_{2,3} = \frac{-1 \pm \left(1 - \frac{16\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) \right)^{1/2}}{2\mu \left(1 + \frac{4G}{3\kappa} \right)}}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

γ_2 correspondant au signe + devant la parenthèse $(\dots)^{1/2}$, γ_3 au signe —. La solution générale de (13) est donc :

$$u = C_1 + C_2 e^{\gamma_2 t} + C_3 e^{\gamma_3 t} + F(t). \quad (16)$$

Remarque. — Il va de soi que toutes les équations ci-dessus — et celles que nous établirons dans la suite de ce mémoire — ne sont valables que lorsque le rapport u/r peut être considéré comme petit par rapport à 1.

§ 3. Etude des vibrations libres, sans flexion ni torsion, d'une coque sphérique viscoélastique

On a, dans ce cas, $p(t) \equiv 0$, et (13) se réduit à l'équation homogène :

$$a_1 \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2b_1}{\rho r^2} \frac{du}{dt} = 0, \quad (17)$$

dont la solution générale est, d'après (16) :

$$u = C_1 + C_2 e^{\gamma_2 t} + C_3 e^{\gamma_3 t}, \quad (18)$$

car $F(t) \equiv 0$.

Nous distinguerons trois cas :

$$1^o \frac{16\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) > 1. \text{ Cette inégalité est satis-}$$

faite, dans des conditions données, si le rapport μ/G est suffisamment grand, ce qui signifie, puisqu'il s'agit d'un modèle de Maxwell, si le rôle joué par le frottement interne est suffisamment faible (fig. 3 a). Les racines γ_2 , γ_3 étant, d'après (15), imaginaires, posons :

$$\gamma_{2,3} = \beta \pm i\omega, \quad (19)$$

où

$$\left. \begin{aligned} \beta &= -\frac{3\kappa G}{2\mu(3\kappa + 4G)}, \\ \omega &= \frac{6}{r} \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho(3\kappa + 4G)}} \left(1 - \frac{\rho r^2 \kappa G}{16\mu^2(3\kappa + 4G)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

sont des quantités réelles, la première négative, la seconde positive.

En substituant les expressions (19) de ces racines dans la solution générale (18), cette dernière, mise sous forme réelle, peut s'écrire :

$$u = C_1 + e^{\beta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t), \quad (21)$$

où a et b désignent deux nouvelles constantes arbitraires, remplaçant C_2 et C_3 .

Si l'on introduit la solution (21) dans les conditions initiales (8), celles-ci deviennent :

$$C_1 + a = u_o, \quad \beta a + \omega b = \dot{u}_o, \quad (\beta^2 - \omega^2) a + 2\beta\omega b = \ddot{u}_o.$$

On en tire :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta^2 + \omega^2) u_o - 2\beta\dot{u}_o + \ddot{u}_o}{\beta^2 + \omega^2}, \\ a &= \frac{2\beta\dot{u}_o - \ddot{u}_o}{\beta^2 + \omega^2}, \quad b = \frac{(\omega^2 - \beta^2) \dot{u}_o + \beta\ddot{u}_o}{\omega(\beta^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ces valeurs, substituées dans (21), donnent la solution cherchée. On peut d'ailleurs aussi mettre cette dernière sous la forme

$$u = C_1 + A e^{\beta t} \cos(\omega t - \delta), \quad (23)$$

$$\text{où } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \delta = \frac{b}{A}, \quad \cos \delta = \frac{a}{A}. \quad (24)$$

Les formules (22) montrent que les constantes C_1 , a , b peuvent être positives, négatives ou nulles, selon les conditions initiales. Il en est de même de $\sin \delta$ et $\cos \delta$. L'angle δ peut donc avoir une valeur quelconque, comprise entre 0 et 2π , y compris les limites.

En définitive, le mouvement de la coque est, d'après (21) ou (23), une vibration amortie, de pseudo-période $2\pi/\omega$ et de constante d'amortissement $\beta (< 0)$. L'oscillation de la surface moyenne de la coque ne se produit pas en général d'un côté à l'autre de la surface moyenne initiale, définie par u_o (sphère de rayon $r + u_o$), mais d'un côté à l'autre d'une sphère limite de rayon $r + C_1$.

2^o $\frac{16\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) < 1$. Ce cas se produit, dans des conditions données, si le rapport μ/G est suffisam-

ment petit, c'est-à-dire si le frottement interne est suffisamment grand. Les racines γ_2 , γ_3 sont, d'après (15), réelles et négatives. La solution (18) est donc déjà sous forme réelle. En l'introduisant dans les conditions initiales (8), on obtient les équations

$$C_1 + C_2 + C_3 = u_o, \quad C_2 \gamma_2 + C_3 \gamma_3 = \dot{u}_o, \quad C_2 \gamma_2^2 + C_3 \gamma_3^2 = \ddot{u}_o,$$

d'où l'on tire, pour C_1 , C_2 , C_3 , les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\gamma_2 \gamma_3 u_o - (\gamma_2 + \gamma_3) \dot{u}_o + \ddot{u}_o}{\gamma_2 \gamma_3}, \\ C_2 &= \frac{\gamma_3 \dot{u}_o - \ddot{u}_o}{\gamma_2 (\gamma_3 - \gamma_2)}, \quad C_3 = -\frac{\gamma_2 \dot{u}_o - \ddot{u}_o}{\gamma_3 (\gamma_3 - \gamma_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ces constantes peuvent être positives, négatives ou nulles. On voit d'après (18), puisque γ_2 et γ_3 sont négatifs, qu'il ne s'agit plus d'une vibration, mais d'un mouvement apériodique et amorti, où u tend vers la valeur C_1 , lorsque le temps t croît indéfiniment. Cette valeur n'est en général pas égale à u_o .

3^o $\frac{16\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) = 1$. Ce cas est celui de l'amortissement critique. L'équation caractéristique (14) a, d'après (15), une racine double < 0 :

$$\gamma = \gamma_2 = \gamma_3 = -\frac{3\kappa G}{2\mu(3\kappa + 4G)}, \quad (26)$$

et la solution générale de (17) est :

$$u = C_1 + (C_2 + C_3 t) e^{\gamma t}. \quad (27)$$

En introduisant (27) dans (8), on obtient trois équations, d'où l'on tire :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\gamma^2 u_o - 2\gamma \dot{u}_o + \ddot{u}_o}{\gamma^2}, \\ C_2 &= \frac{2\gamma \dot{u}_o - \ddot{u}_o}{\gamma^2}, \quad C_3 = -\frac{\gamma \dot{u}_o + \ddot{u}_o}{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Ce mouvement est également apériodique et amorti. Le déplacement radial u tend asymptotiquement vers la valeur C_1 , positive, négative ou nulle, donnée par (28), lorsque le temps t croît indéfiniment.

Remarque. — Il serait facile, dans chacun des trois cas examinés dans ce paragraphe, de calculer $\sigma(t)$, en substituant successivement les valeurs obtenues pour u dans la formule (1), où $p \equiv 0$. On verrait immédiatement que, dans le premier cas, la tension σ tend, dans une oscillation amortie, vers la valeur limite $(\sigma)_{t=\infty} = 0$. Dans les deux autres cas, cette tension tend vers la même limite, toutefois sans osciller. Comme le calcul relatif au premier cas — le plus intéressant des trois — est identique à celui que nous ferons dans le paragraphe suivant, nous nous dispensons de déterminer ici $\sigma(t)$ et de discuter cette fonction.

§ 4. Vibrations d'une coque sphérique viscoélastique, dans le cas où une surpression intérieure, initialement nulle, devient brusquement très grande, pendant un temps très court, pour rester ensuite constamment nulle

Il s'agit donc ici d'une percussion intérieure ou d'un choc intérieur. La fonction $p(t)$ est par exemple représentée par la courbe de la figure 4 a, qui ne comprend que des ordonnées positives (ou nulles), mais cette

condition n'est nullement nécessaire. Nous désignons par Δt la durée (très petite) du choc, qui commence au temps $t = -\Delta t$ et se termine au temps $t = 0$. Introduisons la *percussion* P par unité de surface, en posant :

$$P = \int_{-\Delta t}^0 p(t) dt. \quad (29)$$

Cette quantité P est supposée avoir une *valeur positive et finie*. Une telle percussion peut être par exemple produite par une très courte onde de forte surpression, immédiatement suivie d'une très courte (mais plus faible) onde de dépression, se propageant dans un gaz à l'intérieur de la sphère et provenant d'une explosion au centre.

D'après la théorie classique du choc, cette percussion n'engendre, pendant l'intervalle Δt , aucun changement appréciable de position de l'élément de masse $1.h.\rho$ sur lequel elle est appliquée. Elle crée par contre une brusque variation de la vitesse $\frac{du}{dt}$.

Cela signifie que u et aussi ϵ , d'après (2), restent sensiblement nuls, pendant l'intervalle de temps considéré. Le ressort du modèle de Maxwell, représentant la relation (12), ne s'allongera donc pas, et aucune tension de membrane σ ne se produira pendant l'intervalle Δt (fig. 3 b). On aura donc $u \equiv 0$, $\sigma \equiv 0$ ($-\Delta t \leq t \leq 0$) et, en particulier :

$$(u)_{t=0} = u_o = 0, \text{ et } (\sigma)_{t=0} = \sigma_o = 0, \quad (30)$$

u_o et σ_o désignant les valeurs de la vitesse u et de la tension σ immédiatement après le choc.

Multiplions maintenant (1) par dt et intégrons entre les limites $-\Delta t$ et 0 :

$$\int_{-\Delta t}^0 \sigma dt = \frac{r}{2h} \left(\int_{-\Delta t}^0 pdt - \rho h \int_{-\Delta t}^0 \frac{d^2u}{dt^2} dt \right),$$

d'où, puisque $\sigma \equiv 0$ et $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=-\Delta t} = 0$, la relation :

$$0 = \frac{r}{2h} \left(P - \rho h u_o \right), \text{ ou } \underline{u_o = \frac{P}{\rho h}}, \quad (31)$$

u_o désignant la valeur de la vitesse $\frac{du}{dt}$ au temps $t = 0$.

D'autre part, puisque $(\sigma)_{t=0} = 0$, $(p)_{t=0} = 0$, l'équation (1) donne, pour $t = 0$:

$$0 = \frac{r}{2h} \left[0 - \rho h \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right)_{t=0} \right], \text{ d'où } \underline{\ddot{u}_o = 0}, \quad (32)$$

\ddot{u}_o étant l'accélération immédiatement après le choc.

A partir du temps $t = 0$, $p(t)$ est identiquement nul, et la coque est animée d'une *vibration libre*, dont les conditions initiales sont précisément définies par (30), (31) et (32). Nous admettrons que l'on ait affaire au premier cas du § 3, celui où les valeurs (15) des racines γ_2, γ_3 de l'équation caractéristique (14) sont imaginaires, c'est-à-dire où

$$\underline{\frac{16\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) > 1}. \quad (33)$$

Les formules (21) et (23) restent inchangées :

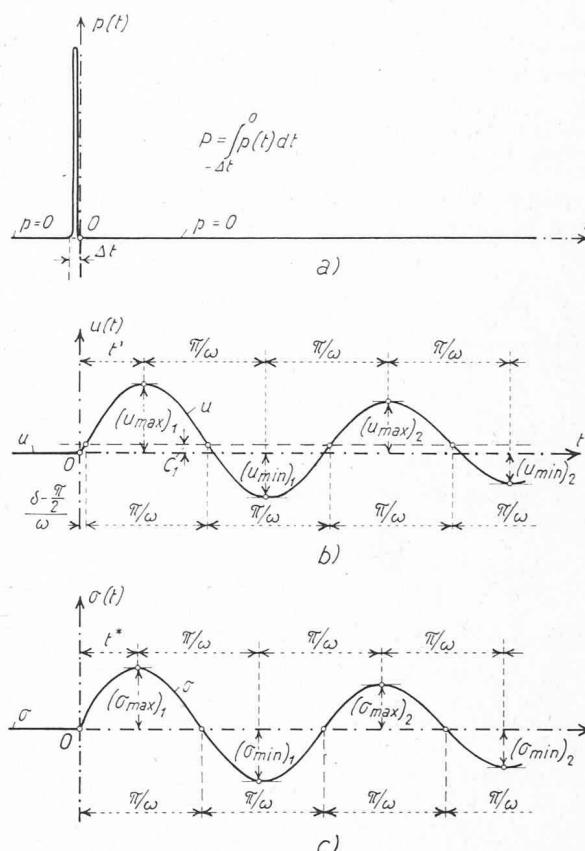


Fig. 4 a, b, c. — Courbes représentant la surpression p , le déplacement radial u et la tension σ , en fonction du temps t , dans le cas d'une percussion intérieure P .

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 + e^{\beta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) \\ &= C_1 + A e^{\beta t} \cos (\omega t - \delta), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

mais les valeurs (22) de C_1 , a , b , et celles (24) de A , $\sin \delta$, $\cos \delta$ deviennent, compte tenu de (30), (31) et (32) :

$$C_1 = -\frac{2\beta P}{\rho h (\beta^2 + \omega^2)}, \quad (35)$$

$$a = \frac{2\beta P}{\rho h (\beta^2 + \omega^2)}, \quad b = \frac{(\omega^2 - \beta^2) P}{\rho h \omega (\beta^2 + \omega^2)}; \quad (35)$$

$$A = \frac{P}{\rho h \omega}, \quad \sin \delta = \frac{\omega^2 - \beta^2}{\beta^2 + \omega^2}, \quad \cos \delta = \frac{2\beta \omega}{\beta^2 + \omega^2}. \quad (36)$$

Pour nous placer dans un cas plus précis, supposons que $\omega^2 - \beta^2$ soit positif, c'est-à-dire, d'après (20), que

$$\frac{8\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) > 1. \quad (37)$$

La condition (33) est à fortiori satisfaite et les formules (34), (35), (36) sont donc applicables. Mais on a maintenant : $\sin \delta > 0$, $\cos \delta < 0$ (car β est négatif). L'angle δ est ainsi compris entre $\pi/2$ et π . Il est d'ailleurs d'autant plus voisin de $\pi/2$ que la valeur absolue de β est plus petite, c'est-à-dire, d'après (20), que le rapport μ/G est plus grand.

La fonction $u(t)$ est représentée par la courbe de la figure 4 b, dessinée en supposant que $|\beta|$ soit notablement plus petit que ω^5 .

⁵ Les courbes des figures 4 a, 4 b, 4 c, ainsi que celles des figures 5 a, 5 b, 5 c qui interviendront plus loin, ne se rapportent pas à des cas précis, mais sont simplement des esquisses, dont le but est de mettre en évidence les principaux caractères des phénomènes étudiés.

On voit que la courbe oscille — en s'amortissant — d'un côté à l'autre d'une droite parallèle à l'axe t , située à la distance $C_1 (> 0)$ de cet axe. La fonction $u(t)$ passe donc alternativement par des maxima et des minima, dont les abscisses t' , $t' + \frac{\pi}{\omega}$, $t' + \frac{2\pi}{\omega}$, ... sont les racines positives de l'équation, obtenue en égalant à zéro la dérivée de la première des expressions (34) de u :

$$e^{\beta t} [(\beta a + \omega b) \cos \omega t + (\beta b - \omega a) \sin \omega t] = 0,$$

ou, compte tenu de (35) :

$$\operatorname{tg} \omega t = \frac{\omega}{\beta}, \quad (38)$$

t' désignant la plus petite de ces racines.

Les valeurs des *maxima* successifs du déplacement u sont donc, d'après la seconde des formules (34) :

$$\left. \begin{aligned} (u_{\max})_1 &= C_1 + A e^{\beta t'} \cdot \cos(\omega t' - \delta), \\ (u_{\max})_2 &= C_1 + A e^{\beta(t'+\frac{2\pi}{\omega})} \cdot \cos(\omega t' - \delta), \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

et celles des *minima* :

$$\left. \begin{aligned} (u_{\min})_1 &= C_1 - A e^{\beta(t'+\frac{\pi}{\omega})} \cdot \cos(\omega t' - \delta), \\ (u_{\min})_2 &= C_1 - A e^{\beta(t'+\frac{3\pi}{\omega})} \cdot \cos(\omega t' - \delta), \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Le plus grand des maxima est $(u_{\max})_1$ et le plus petit des minima $(u_{\min})_1$.

Calculons encore la tension de membrane. En utilisant (4), où $p \equiv 0$, on obtient après simplifications, à l'aide de la première des formules (34), compte tenu des valeurs (35) de a et b :

$$\sigma = \frac{r(\beta^2 + \omega^2)P}{2h\omega} e^{\beta t} \cdot \sin \omega t. \quad (41)$$

La courbe de la figure 4 c représente la fonction $\sigma(t)$. Cette courbe oscille d'un côté à l'autre de l'axe t , en s'amortissant. La tension σ passe alternativement par des maxima et des minima, dont les abscisses t^* , $t^* + \frac{\pi}{\omega}$, $t^* + \frac{2\pi}{\omega}$, ... sont les racines positives de l'équation, obtenue en égalant à zéro la dérivée de (41) :

$$\frac{r(\beta^2 + \omega^2)P}{2h\omega} e^{\beta t} (\beta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) = 0,$$

ou

$$\operatorname{tg} \omega t = -\frac{\omega}{\beta}, \quad (42)$$

t^* désignant la plus petite d'entre elles⁶.

Les valeurs des *maxima* successifs de la tension σ sont donc :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\max})_1 &= \frac{r(\beta^2 + \omega^2)P}{2h\omega} e^{\beta t^*} \cdot \sin \omega t^*, \\ (\sigma_{\max})_2 &= \frac{r(\beta^2 + \omega^2)P}{2h\omega} e^{\beta(t^*+\frac{2\pi}{\omega})} \cdot \sin \omega t^*, \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

⁶ Les équations (38) et (42) montrent que $\frac{t'+t^*}{2} = \frac{\pi}{2\omega}$ et que, dans les conditions admises, $t' \geq \frac{\pi}{2\omega}$, $t^* \leq \frac{\pi}{2\omega}$, car β est négatif.

et celles des *minima* :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\min})_1 &= -\frac{r(\beta^2 + \omega^2)P}{2h\omega} e^{\beta(t^*+\frac{\pi}{\omega})} \cdot \sin \omega t^*, \\ (\sigma_{\min})_2 &= -\frac{r(\beta^2 + \omega^2)P}{2h\omega} e^{\beta(t^*+\frac{3\pi}{\omega})} \cdot \sin \omega t^*, \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Le plus grand des maxima est $(\sigma_{\max})_1$ et le plus petit des minima $(\sigma_{\min})_1$. La première de ces valeurs représente la plus grande traction subie par la matière pendant la vibration, tandis que la seconde est la plus grande compression.

Une rupture éventuelle de la coque peut se produire, soit par des *fissures* créées au temps t^* par la traction $(\sigma_{\max})_1$, soit par un *voilement* engendré, au temps $t^* + \frac{\pi}{\omega}$, par la compression $(\sigma_{\min})_1$. Mais elle peut également se produire après un certain nombre d'oscillations, par suite d'un *épuisement* de la matière, dû aux variations répétées de σ .

§ 5. Cas où les vibrations de la coque sont dues à un accroissement subit de la pression intérieure, qui reste ensuite constante

Supposons que, dans un très petit intervalle de temps Δt , qui commence au temps $t = -\Delta t$ et se termine au temps $t = 0$, la surpression intérieure, primitivement nulle, croisse brusquement de zéro à la valeur positive finie p_o , pour rester ensuite indéfiniment constante (fig. 5 a). Contrairement au cas étudié § 4, il n'y a pas ici de percussion, de sorte qu'on a, d'après (30) et (31), en posant $P = 0$:

$$u_o = 0, \quad \sigma_o = 0, \quad \dot{u}_o = 0. \quad (45)$$

En outre, l'équation (1) donne, pour $t = 0$, puisque $(\sigma)_{t=0} = \sigma_o = 0$ et $(p)_{t=0} = p_o$:

$$0 = \frac{r}{2h} \left[p_o - \rho h \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right)_{t=0} \right], \quad \text{d'où } \ddot{u}_o = \frac{p_o}{\rho h}. \quad (46)$$

D'autre part, pour $t \geq 0$, l'équation différentielle (13) s'écrit, puisque $p(t) \equiv p_o$:

$$\frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2b_1}{\rho r^2} \frac{du}{dt} = \frac{p_o}{\rho h}. \quad (47)$$

Supposons d'abord seulement que les racines γ_2, γ_3 de l'équation caractéristique (14) soient imaginaires (rappelons que $\gamma_1 = 0$), c'est-à-dire, d'après (15), que

$$\frac{16\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) > 1. \quad (48)$$

Ceci exige, dans des conditions données, que le rapport μ/G soit suffisamment grand, donc que le frottement interne soit suffisamment faible. La solution de l'équation homogène étant (21) ou (23), la solution générale de l'équation complète (47) peut être mise sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 + \frac{p_o r^2 t}{12\mu h} + e^{\beta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) \\ &= C_1 + \frac{p_o r^2 t}{12\mu h} + A e^{\beta t} \cos(\omega t - \delta), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

où $\frac{p_o r^2 t}{12 \mu h}$ est une solution particulière de (47), b_1 étant égal à 6μ , d'après (11).

En introduisant la première des expressions (49) de u dans les conditions initiales (8), où l'on pose $u_o = 0$, $\dot{u}_o = 0$, $\ddot{u}_o = \frac{p_o}{\rho h}$, conformément à (45) et (46), on obtient les trois équations :

$$\left. \begin{aligned} C_1 + a &= 0, & \frac{p_o r^2}{12 \mu h} + \beta a + \omega b &= 0, \\ (\beta^2 - \omega^2)a + 2\beta\omega b &= \frac{p_o}{\rho h}; \end{aligned} \right\}$$

d'où les valeurs des constantes C_1 , a , b :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\left(1 + \frac{\beta p_o r^2}{6\mu}\right) p_o}{\rho h (\beta^2 + \omega^2)}, & a &= -\frac{\left(1 + \frac{\beta p_o r^2}{6\mu}\right) p_o}{\rho h (\beta^2 + \omega^2)}, \\ b &= \frac{\left[1 - (\omega^2 - \beta^2) \frac{\rho r^2}{12 \mu \beta}\right] \beta p_o}{\rho \omega (\beta^2 + \omega^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

et, en substituant dans (24), celles de A , $\sin \delta$, $\cos \delta$:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{B p_o}{\rho \omega C}, & \sin \delta &= \frac{\left[1 - (\omega^2 - \beta^2) \frac{\rho r^2}{12 \mu \beta}\right] \beta}{B \cdot C}, \\ \cos \delta &= -\frac{\left(1 + \frac{\beta p_o r^2}{6\mu}\right) \omega}{B \cdot C}, \\ \text{où } B &= \left[1 + \frac{\beta p_o r^2}{6\mu} + (\beta^2 + \omega^2) \frac{\rho^2 r^4}{144 \mu^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ C &= (\beta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Pour nous placer dans un cas plus précis, supposons maintenant que

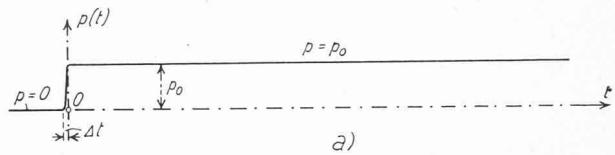
$$\frac{4\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) > 1. \quad (52)$$

L'inégalité (48) est à fortiori satisfaite, et les formules (49), (50), (51) sont donc applicables. Comme la condition (37) est également satisfaite, on reconnaît d'autre part que $\omega^2 - \beta^2$ est positif (voir § 4). En outre, on vérifie facilement que l'inégalité (52) peut se mettre sous la forme suivante :

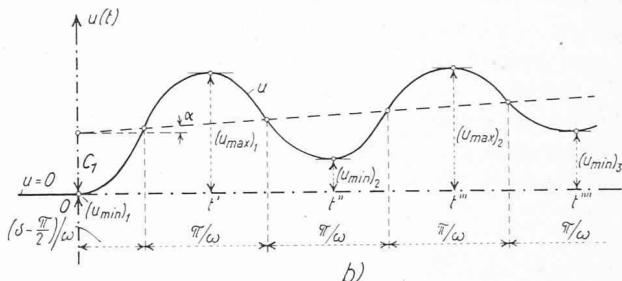
$$1 + \frac{\beta p_o r^2}{6\mu} > 0. \quad (53)$$

Les formules (51) montrent alors que $\sin \delta < 0$, $\cos \delta < 0$, car $\beta < 0$. L'angle δ est donc compris entre π et $3\pi/2$. Il est d'autant plus voisin de π que la valeur absolue de β est plus petite, c'est-à-dire, d'après (20), que le rapport μ/G est plus grand.

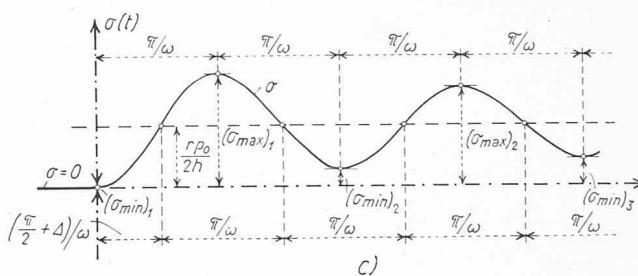
La fonction $u(t)$ est représentée par la courbe de la figure 5 b, dessinée en supposant que $|\beta|$ soit notablement plus petit que ω . On voit que cette courbe oscille — en s'amortissant — d'un côté à l'autre d'une droite oblique, dont l'ordonnée à l'origine C_1 , et le coefficient angulaire $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_o r^2}{12 \mu h}$ sont positifs. Le déplacement u passe donc alternativement par des maxima et des minima jusqu'à une valeur de t telle, que l'amplitude des oscillations soit devenue trop faible, relativement à l'inclinaison α de la droite, pour permettre l'existence



a)



b)



c)

Fig. 5 a, b, c. — Courbes représentant la surpression p , le déplacement radial u et la tension σ , en fonction du temps t , dans le cas où les vibrations sont produites par un accroissement subit de la pression intérieure, qui reste ensuite constante.

de ces valeurs extrêmes. À partir de ce moment, la courbe $u(t)$ tend de plus en plus à se confondre avec la droite oblique, en continuant cependant à osciller d'un côté à l'autre de cette droite.

Les abscisses $0, t', t'', \dots$, classées dans l'ordre croissant, des minima et des maxima de la fonction $u(t)$, sont données par la racine nulle et par les racines positives de l'équation transcendante, obtenue en égalant à zéro la dérivée de u^7 :

$$\frac{p_o r^2}{12 \mu h} + e^{\beta t} [(\beta a + \omega b) \cos \omega t + (\beta b - \omega a) \sin \omega t] = 0. \quad (54)$$

Les valeurs $(u_{\max})_1, (u_{\max})_2, \dots$ des maxima successifs de u sont donc respectivement, d'après la seconde des formules (49)⁸ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 + \frac{p_o r^2 t'}{12 \mu h} + A e^{\beta t'} \cdot \cos(\omega t' - \delta), \\ C_1 + \frac{p_o r^2 t'''}{12 \mu h} + A e^{\beta t'''} \cdot \cos(\omega t''' - \delta), \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

⁷ On peut démontrer que, dans les conditions admises, $t' \sim \frac{\pi}{\omega}$, $t'' \sim \frac{2\pi}{\omega}, \dots$

⁸ Il est facile de montrer que, si le rapport μ/G est très grand, c'est-à-dire si la valeur absolue de β est très petite, on a approximativement :

$$\begin{aligned} (u_{\max})_1 &= \frac{2p_o}{\rho h \omega^2} + \frac{\pi r^2 p_o}{24 h \omega \mu}, & (u_{\max})_2 &= \frac{2p_o}{\rho h \omega^2} + \frac{3\pi r^2 p_o}{24 h \omega \mu}, \\ (u_{\max})_3 &= \frac{2p_o}{\rho h \omega^2} + \frac{5\pi r^2 p_o}{24 h \omega \mu}, \dots \end{aligned}$$

Ces valeurs forment une progression arithmétique croissante, de raison très petite et égale à $\frac{\pi r^2 p_o}{12 h \omega \mu}$.

et celles $(u_{\min})_1, (u_{\min})_2, \dots$ des minima :

$$\left. \begin{aligned} 0, \quad C_1 + \frac{p_o r^2 t''}{12 \mu h} + A e^{\beta t''} \cdot \cos(\omega t'' - \delta), \\ C_1 + \frac{p_o r^2 t''''}{12 \mu h} + A e^{\beta t''''} \cdot \cos(\omega t'''' - \delta), \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

La figure 5 b montre que $(u_{\min})_1 = u_o = 0$ est la seule valeur nulle de u , et que tous les autres minima sont positifs, car $(u_{\min})_1 < (u_{\min})_2 < \dots$.

Calculons encore la tension σ . En substituant la première des expressions (49) de u dans la formule (1), où l'on pose $p = p_o = \text{const.}$, on obtient, en tenant compte des valeurs (50) de a et b , après simplifications :

$$\sigma = \frac{r p_o}{2h} \left[1 - e^{\beta t} \left(\cos \omega t - \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right) \right]. \quad (57)$$

Cette formule peut aussi être mise sous la forme :

$$\sigma = \frac{r p_o}{2h} \left[1 - D e^{\beta t} \cos(\omega t - \Delta) \right], \quad \left. \begin{aligned} \text{ou} \\ D = \frac{(\beta^2 + \omega^2)^{1/2}}{\omega}, \quad \sin \Delta = \frac{-\beta}{(\beta^2 + \omega^2)^{1/2}}, \\ \cos \Delta = \frac{\omega}{(\beta^2 + \omega^2)^{1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

On voit que $\sin \Delta > 0, \cos \Delta > 0$, d'où $0 < \Delta < \frac{\pi}{2}$.

L'angle Δ est d'ailleurs d'autant plus petit que $|\beta|$ l'est lui-même.

La courbe de la figure 5 c représente la fonction $\sigma(t)$. Cette courbe oscille — en s'amortissant — d'un côté à l'autre d'une droite parallèle à l'axe t , située à la distance $\frac{r p_o}{2h} (> 0)$ de cet axe. La tension σ passe donc alternativement par des minima et des maxima, dont les abscisses sont données par la racine nulle et les racines positives de l'équation suivante, obtenue en égalant à zéro la dérivée de (57) :

$$\frac{r(\beta^2 + \omega^2) p_o}{2h\omega} e^{\beta t} \cdot \sin \omega t = 0. \quad (59)$$

Ces racines sont respectivement égales à $0, \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}, \dots$. Les valeurs des maxima de la tension σ s'obtiennent en posant successivement $t = \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{\omega}, \dots$, par exemple dans la formule (58), ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\max})_1 &= \frac{r_o p}{2h} \left(1 + e^{\frac{\pi\beta}{\omega}} \right), \\ (\sigma_{\max})_2 &= \frac{r_o p}{2h} \left(1 + e^{\frac{3\pi\beta}{\omega}} \right), \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Quant aux valeurs des minima de cette tension, on les obtient en posant successivement $t = 0, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \dots$ dans la même formule, d'où :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\min})_1 &= 0, \quad (\sigma_{\min})_2 = \frac{r_o p}{2h} \left(1 - e^{\frac{2\pi\beta}{\omega}} \right), \\ (\sigma_{\min})_3 &= \frac{r_o p}{2h} \left(1 - e^{\frac{4\pi\beta}{\omega}} \right), \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Le plus grand des maxima est donc $(\sigma_{\max})_1$ et le plus petit des minima $(\sigma_{\min})_1 = 0$. La première de ces deux dernières grandeurs représente la plus grande traction subie par la matière pendant la vibration. On remarquera qu'à aucun moment, la coque subit une compression. Il n'y a donc pas de risque qu'un voilement se produise.

Une rupture éventuelle de la coque peut être causée par des fissures créées, au temps $t = \pi/\omega$, par la traction $(\sigma_{\max})_1$. Une rupture peut aussi avoir lieu après un certain nombre d'oscillations, par suite d'un épusement de la matière, dû soit aux variations répétées de σ , soit à des valeurs de u (c'est-à-dire de ϵ) dépassant certaines limites.

§ 6. Vibrations engendrées par une suppression intérieure, fonction sinusoïdale du temps. Cas où la valeur moyenne de cette suppression est nulle

Admettons que la suppression soit primitivement nulle ($p(t) \equiv 0$, pour $t < 0$), mais qu'à partir du temps $t = 0$, on ait (fig. 6) :

$$p(t) = p_o \sin(\nu t); \quad (t \geq 0) \quad (62)$$

p_o est l'amplitude et ν la pulsation de cette suppression perturbatrice.

Le déplacement et la vitesse initiaux sont nuls, comme dans le cas précédent. L'accélération initiale l'est également, car $(p)_{t=0} = 0$. On a donc :

$$u_o = 0, \quad \dot{u}_o = 0, \quad \ddot{u}_o = 0. \quad (63)$$

D'autre part, pour $t \geq 0$, l'équation différentielle (13) s'écrit ici :

$$a_1 \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2b_1}{\rho r^2} \frac{du}{dt} = \frac{p_o}{\rho h} (\sin \nu t + a_1 \nu \cos \nu t). \quad (64)$$

Admettons par exemple — c'est le cas le plus intéressant — que les racines γ_2, γ_3 de l'équation caractéristique (14) soient imaginaires, c'est-à-dire, d'après (15), que

$$\frac{16\mu^2}{\rho r^2 \kappa G} (3\kappa + 4G) > 1. \quad (65)$$

La solution générale de (64) peut alors être mise sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 + e^{\beta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) + c \sin(\nu t - \phi) \\ &= C_1 + A e^{\beta t} \cos(\omega t - \delta) + c \sin(\nu t - \phi). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

où β, ω ont les valeurs (20), $C_1, a, b, A, \delta, \phi$ sont des constantes dépendant des conditions initiales, et où $c \sin(\nu t - \phi)$ est une solution particulière. Pour déterminer les constantes c et ϕ , substituons cette dernière solution dans (64). On en tire, après quelques transformations, en prescrivant aux coefficients de $\sin \nu t$ et $\cos \nu t$ d'être nuls et en tenant compte de (11) et (20)⁹ :

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\left(F^2 \nu^2 + \frac{1}{\mu^2} \right)^{1/2} p_o}{\rho h \nu \left[\left(\frac{12}{\rho r^2} - F \nu^2 \right)^2 + \frac{\nu^2}{\mu^2} \right]^{1/2}}, \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{12}{\rho r^2 \nu \left[\left(\frac{12}{\rho r^2} - F \nu^2 \right) F \mu - \frac{1}{\mu} \right]}; \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

⁹ En calculant également $\sin \phi$ et $\cos \phi$, on reconnaît sans peine que $\sin \phi > 0, -1 < \cos \phi < 1$, d'où $0 < \phi < \pi$. La valeur (67) de $\operatorname{tg} \phi$ détermine donc à elle seule l'angle ϕ .

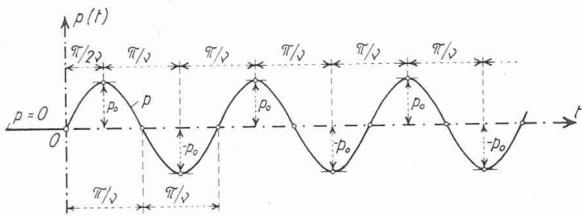


Fig. 6.

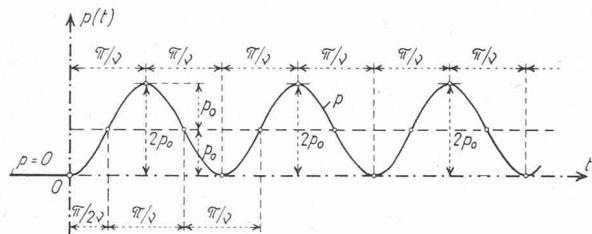


Fig. 7.

$$\text{ou } F = \frac{3\kappa + 4G}{3\kappa G}. \quad (68)$$

Le mouvement défini par (66) est une *vibration entretenue* où, dans chacune des deux expressions de u , les deux premiers termes représentent le *mouvement naturel* et le troisième la *vibration forcée*. Le mouvement naturel, qui dépend seul des conditions initiales, est formé de deux composantes : un *déplacement constant* C_1 ¹⁰ et une *oscillation amortie*. La vibration forcée est par contre une *oscillation harmonique*, qui dure donc indéfiniment. c est l'amplitude, et $-\phi$ la phase initiale, de cette dernière oscillation. On voit que lorsque le temps t devient très grand, seuls le premier et le troisième termes de chacune des deux expressions (66) de u subsistent.

Il est facile de vérifier qu'en faisant tendre μ vers l'infini et v vers ω dans les deux formules (67), c tend vers l'infini et $\operatorname{tg} \phi$ prend la forme indéterminée $(0 \times \infty)^{-1}$. A la limite, on a donc affaire à un cas de *résonance*. Cela n'a rien de surprenant, car la matière de la coque satisfait alors à la *loi de Hooke* (voir fig. 3 a, où $\mu = \infty$, ainsi que (b), § 2) et la pulsation v de la surpression perturbatrice est égale à celle, ω , de la vibration naturelle.

Revenons au cas où $\mu \neq \infty$, $v \neq \omega$, et supposons que l'on ait calculé c , ϕ à l'aide des formules (67), (68). Introduisons la première des deux expressions (66) de u dans les conditions initiales (8). On obtient, compte tenu de (63), les trois équations

$$\left. \begin{aligned} C_1 + a - c \sin \phi &= 0, & \beta a + \omega b + cv \cos \phi &= 0, \\ (\beta^2 - \omega^2) a + 2\beta \omega b + cv^2 \sin \phi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

d'où l'on tire :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{[(\beta^2 + \omega^2 - v^2) \sin \phi + 2\beta v \cos \phi] c}{\beta^2 + \omega^2}, \\ a &= \frac{(v \sin \phi - 2\beta \cos \phi) cv}{\beta^2 + \omega^2}, \\ b &= \frac{[(\beta^2 - \omega^2) \cos \phi - \beta v \sin \phi] cv}{\omega(\beta^2 + \omega^2)}; \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

et en substituant ces valeurs dans (24), on peut déterminer celles de A , $\sin \delta$, $\cos \delta$ (on verrait que ces deux dernières quantités peuvent être positives, négatives, ou nulles).

Calculons encore la tension de membrane σ . En substituant la première des expressions (66) de u dans l'équation (4), on obtient, compte tenu de (62) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{r}{2h} \left[-\rho h e^{\beta t} \left\{ [(\beta^2 - \omega^2)a + 2\beta \omega b] \cos \omega t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [(\beta^2 - \omega^2)b - 2\beta \omega a] \sin \omega t \right\} + p_o \sin vt \right. \\ &\quad \left. + \rho h c v^2 \sin(vt - \phi) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Cette formule peut être mise aussi sous la forme :

$$\sigma = \frac{rp_o}{2h} \left[A' e^{\beta t} \cos(\omega t - \delta') + B' \sin(vt - \phi') \right], \quad (71)$$

où la détermination de A' , B' , δ' , ϕ' n'offrirait pas de difficulté. On voit qu'en définitive $\sigma(t)$ est formé de deux termes : le premier représente une *oscillation amortie* de la tension, provenant du mouvement naturel de la coque, le second est une *oscillation harmonique*, causée par la vibration forcée définie plus haut.

En étudiant la fonction (71), on reconnaîtrait que des tensions négatives (compressions) se produisent d'abord sporadiquement, puis périodiquement. *Une rupture de la coque par voilement est donc ici possible.*

§ 7. Vibrations engendrées par une surpression intérieure, fonction sinusoïdale du temps. Cas où la valeur moyenne de cette surpression est différente de zéro

Supposons par exemple que la surpression intérieure soit primitivement nulle ($p(t) \equiv 0$, pour $t < 0$), mais qu'à partir du temps $t = 0$, on ait (fig. 7) :

$$p(t) = p_o(1 - \cos vt); \quad (t \geq 0) \quad (72)$$

p_o est à la fois l'amplitude et la valeur moyenne de cette *surpression perturbatrice*, dont la pulsation est v .

Comme dans le cas du § 6, on a ici¹¹ :

$$u_o = 0, \quad \dot{u}_o = 0, \quad \ddot{u}_o = 0. \quad (73)$$

D'autre part, pour $t \geq 0$, l'équation différentielle (13) devient :

$$a_1 \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2b_1 du}{\rho r^2 dt} = \frac{p_o}{2h}(1 - \cos vt + a_1 v \sin vt). \quad (74)$$

Si nous admettons comme précédemment que les racines γ_2 , γ_3 de l'équation caractéristique (14) soient imaginaires, c'est-à-dire que la condition (65) soit satisfaite, la solution générale de (74) peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 + \frac{p_o r^2 t}{12 \mu h} + e^{\beta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) \\ &\quad - c \cos(vt - \phi) \\ &= C_1 + \frac{p_o r^2 t}{12 \mu h} + A e^{\beta t} \cos(\omega t - \delta) - c \cos(vt - \phi), \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

où β , ω ont les valeurs (20) et où C_1 , a , b , A , δ dépendent des conditions initiales.

¹⁰ On peut démontrer que, dans les conditions admises, C_1 est nécessairement positif.

¹¹ $\left(\frac{d^3 u}{dt^3} \right)_{t=0}$ est d'ailleurs aussi nul, car $\left(\frac{dp}{dt} \right)_{t=0} = 0$.

En substituant la solution particulière $\frac{p_o r^2 t}{12 \mu h} - c \cos(\nu t - \phi)$ dans (74), on obtient pour c et ϕ exactement les mêmes valeurs que précédemment, à savoir celles données par les formules (67) ¹².

Il s'agit donc d'une *vibration entretenue*, où le *mouvement naturel* — qui dépend seul des conditions initiales — est représenté par le premier et le troisième des termes de chacune des expressions (75) de u , et où la *vibration forcée* est représentée par le second et le quatrième de ces termes. On voit que le mouvement naturel est formé des deux mêmes composantes que précédemment. Par contre, la vibration forcée comprend non seulement une oscillation harmonique — $c \cos(\nu t - \phi)$ — $= c \sin(\nu t - \frac{\pi}{2} - \phi)$, analogue à celle déjà rencontrée

§ 6, mais encore la composante $\frac{p_o r^2 t}{12 \mu h}$. Les trois premiers termes des expressions (75) de u sont respectivement les mêmes — aux valeurs des constantes C_1, a, b, A, δ près — que les trois seuls termes figurant dans les formules (49) du § 5. Le quatrième terme de (75) provient du fait que, dans le cas étudié ici, la surpression n'est pas une constante (égale à p_o), mais est une fonction sinusoïdale du temps, dont la valeur moyenne est p_o .

Il serait facile de déterminer les constantes C_1, a, b de (75), à l'aide des conditions initiales (8), compte tenu de (73), puis les valeurs de $A, \sin \delta, \cos \delta$, en utilisant les formules (24).

Dans le cas particulier où $\mu = \infty$, c'est-à-dire où la matière satisfait à la loi de *Hooke*, la *résonance* se produit si $\nu = \omega$, comme précédemment.

Esquissons encore le calcul de la tension σ . Supposons de nouveau $\mu \neq \infty, \nu \neq \omega$, et admettons que l'on ait déterminé C_1, a, b comme nous l'avons dit plus haut. En substituant la première des expressions (75) de u dans (1), on obtient après quelques transformations :

$$\sigma = \frac{r p_o}{2h} \left[1 + A'' e^{\beta t} \cos(\omega t - \delta'') + B'' \sin(\nu t - \phi'') \right], \quad (76)$$

où $A'', B'', \delta'', \phi''$ se déterminent facilement. Le premier terme $\frac{r p_o}{2h}$ de cette formule, qui est constant, provient de la valeur moyenne p_o de la surpression (il est nul dans le cas étudié § 6). Le second terme représente une *oscillation amortie de la tension*, et a son origine dans le mouvement naturel de la coque. Le troisième est une *oscillation harmonique de σ* , engendrée par la composante — $c \cos(\nu t - \phi)$ — de la vibration forcée.

Remarquons enfin qu'à cause du premier terme $\frac{r p_o}{2h}$ de (76), qui est *positif* et représente la *tension statique due à la pression moyenne p_o* , les risques d'existence de compressions importantes sont moins grands que dans le cas du § 6, où ce terme n'existe pas. C'est donc

¹² ϕ est également compris entre 0 et π .

probablement seulement lorsque les conditions ne sont pas trop éloignées de celles de la résonance (μ/G assez grand, ν relativement peu différent de ω), qu'un voilement de la coque risque de se produire.

Zurich, le 25 mars 1965.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. LAMB : On the Vibrations of a spherical Shell. *Proc. of the London Math. Soc.*, Vol. 14, 1883, p. 50.
- [2] A. E. H. LOVE : On the small free Vibrations and Deformations of a thin elastic Shell. *Phil. Trans.*, Vol. 179, 1888. Voir aussi *Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 1^{re} éd., 1892-1893, Ch. XXII.
- [3] J. W. STRUTT (Lord RAYLEIGH) : *The Theory of Sound*. Macmillan & Co., London and New York, Vol. I, 1894, p. 417-432.
- [4] K. FEDERHOFER : Über die Eigenschwingungen der geschlossenen Kugelschale bei gleichförmigem Oberflächendrucke. *Z. angew. Math. und Mech.*, Vol. 15, 1935, p. 26-31.
- [5] M. C. JUNGER : Vibrations of elastic Shells in a fluid Medium and the associated Radiation of Sound. *Journ. of Appl. Mech.*, Vol. 19, No. 4, déc. 1952, p. 439-445.
- [6] E. REISSNER : On axi-symmetrical Vibrations of shallow spherical Shells. *Quart. appl. Math.*, Vol. 13, No. 3, oct. 1955, p. 279-290.
- [7] M. W. JOHNSON et E. REISSNER : On transverse Vibrations of shallow spherical Shells. *Quart. appl. Math.*, Vol. 15, No. 4, janv. 1958, p. 367-380.
- [8] A. KALNINS et P. M. NAGHDI : Propagation of axisymmetric Waves in an unlimited elastic Shell. *ASME Trans.* 82 E (*J. Appl. Mech.*), No. 4, déc. 1960, p. 690-695.
- [9] N. K. PESENNIKOVA et I. E. SAKHAROV : Fréquences fondamentales des vibrations libres des coques sphériques orthotropes à faible courbure (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk Mekh. i Mash.*, n° 2, mars/avril 1961, p. 168-172.
- [10] W. H. HOPPMANN II et W. E. BAKER : Extensional Vibrations of elastic orthotropic spherical Shells. *ASME Trans.* 83 E (*J. Appl. Mech.*), No. 2, juin 1964, p. 229-237.
- [11] O. V. LUZHIN : Le problème des vibrations libres des coques minces sphériques (en russe). *Stroit. Mekh. i Raschet Sooruzh.*, n° 3, 1961, p. 32-36 ; *Ref. Zh. Mekh.*, n° 6, 1962, Rev. 6V 123.
- [12] A. SILBIGER : Nonaxisymmetric modes of Vibration of thin spherical Shells. *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 34, No. 6, juin 1962, p. 862.
- [13] A. KALNINS : Effect of Bending on Vibrations of spherical Shells. *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 36, No. 1, janv. 1964, p. 74-81.
- [14] P. M. NAGHDI et W. C. ORTHWEIN : On axisymmetric Vibrations of thin shallow viscoelastic spherical Shells. *AFOSR TN 59-109* (Univ. Mich. Res. Inst. Ann Arbor, TN 5 ; *ASTIA AD 210 389*), janv. 1959, 27 pp.
- [15] R. SANKARANARAYANAN : On the Dynamics of plastic spherical Shells. *AFOSR TN 60-1165* (Polyt. Inst. Brooklyn, Dept. Aero Engng. Appl. Mech., *PIBAL Report No. 580*), sept. 1960, 20 pp.
- [16] E. I. GRIGOLYUK : Dynamique des coques et des plaques viscoélastiques (en russe). *Soviet Phys.-Doklady*, Vol. 6, n° 6, déc. 1961, p. 515-518 (trad. angl. de *Dokladi Akad. Nauk SSSR* (N.S.), Vol. 138, n° 6, juin 1961, p. 1317-1320, par Amer. Inst. Phys., Inc., New York).
- [17] E. H. LEE : Viscoelasticity. Ch. 53 du *Handbook of Engineering Mechanics*, McGraw-Hill Book Cy, New York, Toronto, London, 1962.