

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 91 (1965)
Heft: 1

Artikel: L'application à la pratique des coefficients de raideur du sol
Autor: Verdelyn, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-67648>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPF (Ecole poly-
technique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Groscurtin, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre,
arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

SOMMAIRE

L'application à la pratique des coefficients de raideur du sol, par J. Verdeyen, professeur à l'Université de Bruxelles.
Divers. — Société suisse des ingénieurs et des architectes. — Les congrès. — Carnet des concours.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Nouveautés, informations diverses.

L'APPLICATION À LA PRATIQUE DES COEFFICIENTS DE RAIDEUR DU SOL¹

par J. VERDEYEN, professeur à l'Université de Bruxelles,
directeur du Laboratoire de mécanique des sols, ingénieur-conseil.

1. Généralités

On suppose que la transmission des charges au sol se fait par l'intermédiaire de massifs de fondation élastiques qui se déforment lorsque le sol tasse, sous l'effet des contraintes de compression qui s'y développent.

Ce cas se présente pour les semelles de fondation en béton armé de faible raideur et pour les poutres de grande longueur, reposant sur des sols déformables. On envisage également, parfois, des ensembles reposant sur semelles ou radiers pour lesquels l'influence de la raideur de la superstructure est à prendre en considération.

Pour mettre le problème en équation, on fait l'hypothèse que le sol se déforme proportionnellement à la pression qui s'y développe. Ceci revient à étudier le comportement d'une poutre, chargée par des forces

RÉDACTION

D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua,
architecte
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 40.—	Etranger	Fr. 44.—
Sociétaires	»	» 33.—		
Prix du numéro	»	» 2.—	»	» 2.20

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,
N° 10 - 5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, 1000 Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:
1/1 page Fr. 385.—
1/2 » » 200.—
1/4 » » 102.—
1/8 » » 52.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. 1000 Lausanne et succursales



quelconques, reposant sur un appui continu élastique, c'est-à-dire sur une infinité de ressorts verticaux (fig. 1).

2. Théorie générale

On considère (fig. 2) une poutre sollicitée par des charges quelconques verticales et reposant sur un sol donnant lieu à des réactions verticales σ par unité de surface. On choisit un axe X horizontal, confondu avec l'axe de la poutre, et un axe Z vertical.

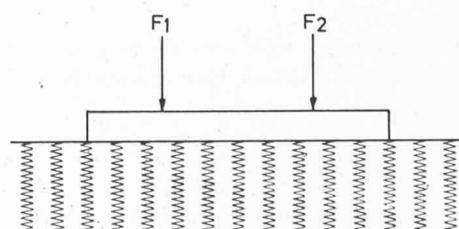


Fig. 1.

¹ Conférence donnée devant les membres de la Société suisse des mécaniques des sols et des travaux de fondation, à Fribourg, le 24 avril 1964 (Réd.).

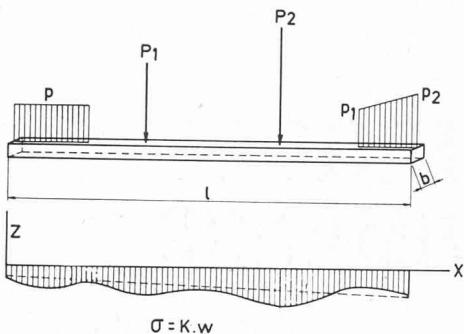


Fig. 2.

Si on note, en un point quelconque, σ la contrainte de compression verticale sur l'appui, ω l'enfoncement correspondant, on peut écrire, en faisant l'hypothèse que l'appui est élastique et se déforme proportionnellement à la pression qui s'y développe, que :

$$\sigma = K \cdot \omega \quad (1)$$

Le coefficient de proportionnalité K est le coefficient de raideur de l'appui continu. L'homogénéité de la formule exige que K soit exprimé en kg/cm^3 . La formule (1) revient à supposer que la poutre flotte sur un liquide ayant pour poids spécifique la valeur attribuée à K . Plus l'appui continu est indéformable, plus K est grand. On dira que l'appui continu est uniformément élastique lorsque le coefficient de raideur K est le même sur toute l'étendue de l'appui recouverte par la poutre.

On discutera, au numéro 3, dans quelle mesure cette hypothèse est applicable aux sols de fondation et l'on indiquera les valeurs que l'on peut attribuer à K dans la pratique.

Si on note I , b et p respectivement le moment d'inertie d'une section transversale de la poutre, la largeur d'appui de cette section et la charge extérieure qui y est appliquée, on sait que :

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2\omega}{dx^2} = M \quad (2)$$

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dx} = p - \sigma \cdot b \quad (4)$$

En dérivant deux fois la relation (2) et en tenant compte des relations (1), (3) et (4), on obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E \cdot I \cdot \frac{d^2\omega}{dx^2} \right) = p - K \cdot b \cdot \omega \quad (5)$$

ce qui est l'équation différentielle de l'élastique de la poutre sur l'appui continu élastique, sous sa forme la plus générale.

3. Le coefficient de raideur K

L'hypothèse fondamentale, qui est à la base de la théorie qui vient d'être exposée, suppose qu'il y a proportionnalité entre les déformations et les contraintes,

le coefficient de proportionnalité étant le coefficient de raideur de l'appui que l'on a noté K . On a :

$$K = \frac{\sigma}{\omega} \quad (6)$$

On a montré que cela revenait, en fait, à admettre que la poutre reposait sur une infinité de ressorts verticaux. On peut se demander si une telle hypothèse est applicable aux sols de fondation, qui ne sont pas des ressorts et qui présentent comme caractéristiques principales d'avoir un angle de frottement et une cohérence variables.

On remarque que, s'il existe dans le sol (fig. 3) des couches compressibles s'étendant sous une partie seulement de la poutre de fondation, il est évident que les déformations n'obéiront pas à la loi de proportionnalité énoncée. La couche compressible, argile ou tourbe, se déformerera plus que la partie peu compressible, argile ou sable compact. Comme c'est le cas général, l'hypothèse est fausse et ne peut tout au plus être appliquée qu'à des fondations de dimensions assez réduites, reposant sur un sol homogène.

Le coefficient de raideur du sol a été introduit pour la première fois en 1867 par Winkler et appliquée par Zimmerman (1888) à l'étude de la sollicitation des traverses de chemins de fer. Il a été ensuite généralisé par des ingénieurs théoriciens à l'étude des fondations. Les essais de compression du sol, faits en laboratoire et sur le terrain en place, avec des petites surfaces, semblent en effet indiquer que les déformations sont proportionnelles aux efforts appliqués, tant que la charge d'essai ne dépasse pas une certaine limite. La relation (6) ne peut donc être appliquée que lorsque l'on a de faibles charges provoquant de faibles déformations. On sait, de plus, que le tassement d'une grande fondation est très différent de celui constaté pour une petite surface d'essai et on peut en conclure que la généralisation de l'hypothèse faite est approximative et ne devra être appliquée qu'avec prudence et discernement. En fait, il n'existe pas de proportionnalité entre les déformations et les pressions du sol, puisque les modules cédométriques des sols augmentent avec les pressions appliquées et ne sont pas constants. De plus, la relation (6) suppose que chaque point de la poutre, déposée sur le sol, se comporte indépendamment des charges existantes dans les environs. Or on sait, par l'étude des déformations des sols, que le tassement des différents points d'une fondation n'est pas simplement proportionnel à la pression qui se produit sous la surface de contact sol-fondation, mais dépend de la répartition des pressions dans le sol, sous l'influence des différentes charges appliquées à la surface.

L'expérience a démontré, par exemple, que la partie centrale d'un radier d'un grand réservoir d'huile fondé sur du sable s'est tassée plus que les bords, bien que, sous la charge, des pressions uniformes s'étaient produites. Le coefficient de raideur était donc plus petit au centre que sur les bords, alors que les propriétés du sol étaient les mêmes dans toute l'étendue du massif considéré. Si la fondation avait été réalisée sur de l'argile plastique, c'est l'inverse qui se serait produit : les bords se seraient plus enfoncés que le centre et le coefficient de raideur aurait été plus grand au centre qu'au bord.

En d'autres termes, le coefficient de raideur dépend de nombreux paramètres, parmi lesquels :

- l'intensité de l'effort appliqué ; suivant que les charges sont faibles ou fortes, le coefficient de raideur peut prendre des valeurs différentes ;
- la vitesse et la durée d'application des charges : par exemple, pour un sol susceptible de consolider, les déformations augmentent au cours du temps, alors que les pressions appliquées sur le sol restent constantes, par conséquent, K diminue ;
- la répétition des charges : si une charge est appliquée plusieurs fois, les déformations augmentent avec le nombre d'application de la charge, par conséquent le coefficient K diminue ;
- les vibrations au voisinage de l'endroit où est considéré le coefficient K : dans les sables, ce phénomène est à prendre en considération et peut provoquer des déformations appréciables et, par conséquent, des diminutions de K ;
- l'immersion ou non du sol : dans un sol immergé, le coefficient de raideur K est moindre ; il vaut alors un peu plus de la moitié du coefficient de raideur K d'un sol sec ou humide. Cette réduction correspondant à la diminution du poids spécifique du sol immergé.

Il est évidemment impossible de tenir compte de tous ces faits si l'on désire énoncer une hypothèse simple, se prêtant à une mise en équation permettant des calculs pratiques. C'est pour cette raison que l'on simplifie le problème à l'extrême en admettant que l'hypothèse exprimée par la relation (6) soit applicable dans certains cas déterminés. Le praticien ne doit cependant pas oublier que la définition du coefficient de raideur néglige l'effet de facteurs importants.

Cela étant, on peut, d'une façon générale, admettre que le coefficient de raideur d'un sol de fondation est d'autant plus petit que la pression est grande et que la surface de fondation est importante. En pratique, K peut varier de 0,5 à 12 kg/cm³.

Divers auteurs ont essayé de donner des formules approximatives permettant de se faire une idée de l'ordre de grandeur du coefficient K dans chaque cas particulier.

a) L'ingénieur italien Straub a proposé comme loi générale :

$$K = C_o \cdot d^{-\alpha} \cdot \sigma^{-\beta}$$

formule dans laquelle d est le diamètre moyen de la surface chargée, σ la pression moyenne de la surface chargée, C_o un coefficient dépendant de la nature du terrain et de la profondeur de la fondation (on le détermine en faisant $d = 1$ et $\sigma = 1$ dans la formule), enfin α et β des coefficients qui dépendent de la nature du sol et qui varient entre $\alpha = 0,75$; $\beta = 0,25$ pour un sol cohérent compressible et $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,75$ pour un sol pulvérulent peu compressible.

b) Kögler et Scheidig ont cherché, au moyen de formules approchées, à établir une relation entre le coefficient de raideur K et le module cédométrique E_o des sols, déterminé en laboratoire. Ils ont ainsi trouvé :

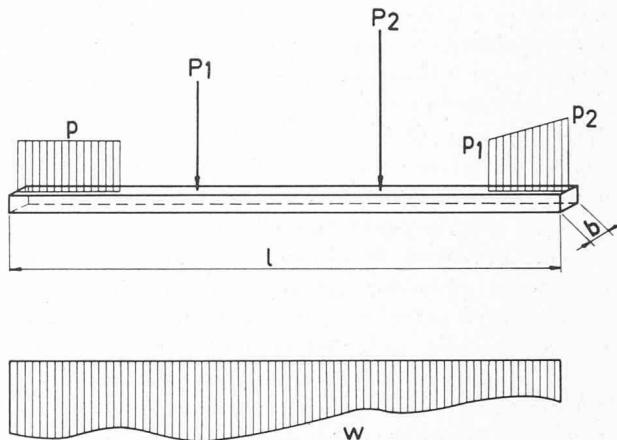
1) pour une surface de grandeur infinie, z étant l'épaisseur de la couche compressible, on peut admettre que :

$$K = \frac{E_o}{z} ;$$

2) pour des surfaces circulaires ou carrées, on aurait :

$$K = \frac{\alpha \cdot E_o}{d}$$

d étant le diamètre de la surface circulaire ou le côté de la surface carrée et α étant un coefficient variant avec l'épaisseur de la couche compressible, de 3 (pour $z = d$) à 2 (pour $z = \infty$) ;



Coupe dans le sol

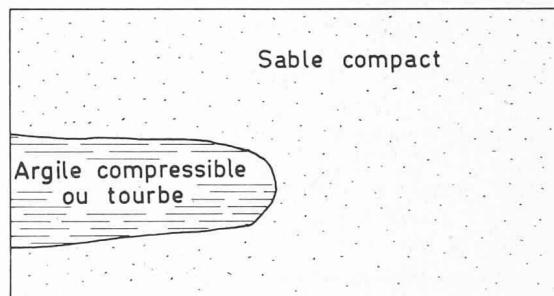


Fig. 3.

3) pour une bande de longueur infinie et de largeur b :

$$K = \frac{\beta \cdot E_o}{b}$$

avec β variant, avec l'épaisseur de la couche considérée, de 1,82 (pour $z = b$) à 0,54 (pour $z = 20 \cdot b$).

Si on introduit cette valeur de K dans l'expression donnant la longueur élastique de la poutre, dont il sera question plus loin, on a :

$$l_e = \sqrt[4]{\frac{4 EI}{\beta E_o}}$$

et si on remarque que β intervient par sa racine quatrième, qui a pour valeur moyenne 1, on a :

$$l_e = \sqrt[4]{\frac{4 EI}{E_o}}.$$

c) Enfin, Vogt a indiqué les formules suivantes, pour des valeurs moyennes du coefficient de raideur :

1) Plaque circulaire :

$$K = 1,392 \cdot \frac{E_o}{\sqrt{\Omega}}$$

Ω étant la surface de la plaque.

2) Plaque rectangulaire :

$$K = 1,33 \cdot \frac{E_o}{\sqrt[3]{b^2 \cdot a}}$$

b étant la largeur de la plaque et a sa longueur.

Les formules ci-dessus sont applicables à des fondations isolées, de surface connue ; lorsque l'on doit considérer la fondation comme un tout, formé de plusieurs semelles, on peut introduire dans les formules les dimensions totales de la fondation.

C'est Terzaghi (1883-1963) qui a publié l'étude la plus complète sur les valeurs des coefficients de raideur. Cet auteur (1955) ne donne pas seulement les coefficients de raideur verticaux pour une poutre horizontale, mais aussi les coefficients de raideur horizontaux pour des ouvrages verticaux tels que des pieux ou palplanches.

A cet effet, il introduit, pour les argiles, la notion de bulbe de pression, qu'il définit comme étant la zone du sol soumise à des efforts de compression sous l'effet d'une pression p appliquée de l'extérieur.

Si b est la dimension d'une plaque appuyée sur le sol, il définit un bulbe de pression dont l'influence se fait sentir jusqu'à une profondeur y . Si, ensuite, on considère une plaque de dimensions $B = n b$, le bulbe de pression a une profondeur maximale de ny . Dans le premier cas,

on a un coefficient $k_s = \frac{p}{y}$ et dans le second cas, ce

coefficient vaut $\frac{p}{ny}$. On a donc :

$$k_{s(B)} = \frac{B}{b} \cdot k_{s(1)}.$$

Si on admet que $B = 1$ pied ou 32,48 cm, on peut écrire :

$$k_s = \frac{1}{b} \cdot k_{s(1)}.$$

En fait, k_s est un coefficient relatif à une plaque de largeur b et de longueur l , tandis que $k_{s(1)}$ est le coefficient de réaction d'un sol pour une plaque de largeur 1 pied et de longueur l . Terzaghi admet donc que pour les argiles, le coefficient de raideur vertical des sols est inversement proportionnel à la dimension b de la plaque transmettant les efforts au sol, et cela, quelle que soit la profondeur considérée.

Il propose ensuite une formule permettant de relier le coefficient $k_{s(1)}$ au coefficient de réaction $\bar{k}_{s(1)}$ pour une plaque carrée de côté 1 pied. Cette formule est la suivante :

$$k_{s(1)} = \bar{k}_{s(1)} \cdot \frac{l + 0,5}{1,5 \cdot l};$$

toute substitution faite, on obtient :

$$k_s = \bar{k}_{s(1)} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{l + 0,5}{1,5 \cdot l}$$

Si l est grand par rapport à b , on a :

$$k_s = \bar{k}_{s(1)} \cdot \frac{1}{1,5 \cdot b}.$$

Terzaghi propose pour $\bar{k}_{s(1)}$ les valeurs suivantes :

- 1) pour les argiles consistantes, $2,4 \text{ kg/cm}^3$;
- 2) pour les argiles très consistantes, $4,8 \text{ kg/cm}^3$;
- 3) pour les argiles dures, $9,6 \text{ kg/cm}^3$.

Les formules ci-dessus conduisent, pour les argiles très consistantes, aux valeurs ci-après de k_s en kg/cm^3 :

l (m)	0,30	1	5	10	20
b (m)					
0,30	4,8	3,68	3,3	3,25	3,25
1	1,45	1,1	1	1	1
5	0,29	0,22	0,2	0,2	0,2
10	0,145	0,11	0,1	0,1	0,1
20	0,072	0,055	0,05	0,05	0,05

Si l'argile est *consistante*, il faut multiplier ces valeurs par 0,5.

Si l'argile est *dure*, il faut multiplier ces valeurs par 2.

Pour les sables, Terzaghi estime que le coefficient de raideur k_s pour une plaque de dimensions $\frac{b}{l}$ est relié au coefficient $k_{s(1)}$ pour une plaque de dimensions $\frac{1 \text{ pied}}{l}$, par la relation suivante :

$$k_s = k_{s(1)} \cdot \left(\frac{b + 1}{2b} \right)^2;$$

dans cette expression, b doit s'exprimer en pied.

Terzaghi estime que le coefficient $k_{s(1)}$ est égal au coefficient $\bar{k}_{s(1)}$ pour une plaque carrée de 1 pied de côté. On est donc conduit à la formule résultante :

$$k_s = \bar{k}_{s(1)} \cdot \left(\frac{b + 1}{2b} \right)^2$$

où $\bar{k}_{s(1)}$ peut prendre les valeurs suivantes :

- 1) pour un sable peu compact et peu dense, humide ou sec, $\bar{k}_{s(1)} = 1,3 \text{ kg/cm}^3$;
- 2) pour un sable moyennement compact et moyennement dense, humide ou sec, $\bar{k}_{s(1)} = 4,2 \text{ kg/cm}^3$;
- 3) pour un sable compact et dense, humide ou sec, $\bar{k}_{s(1)} = 16 \text{ kg/cm}^3$.

Si le sable est immergé, les valeurs ci-dessus deviennent respectivement :

$0,8 \text{ kg/cm}^3$ pour un sable peu compact ;
 $2,6 \text{ kg/cm}^3$ pour un sable moyennement compact ;
 $9,6 \text{ kg/cm}^3$ pour un sable compact.

Les formules ci-dessus conduisent, pour un sable *moyennement compact, sec ou humide*, aux valeurs ci-après :

k_s (kg/cm^3)	b (m)
4,15	0,3
2,66	0,5
1,76	1
1,16	5
1,04	10
1,04	20

Si le sable est peu compact, il faut multiplier par 0,4.

Si le sable est très compact, il faut multiplier par 2,6.

Si le sable est immergé, il faut multiplier par 0,6 environ.

Terzaghi envisage également le coefficient de réaction horizontal k_h .

Dans le cas des argiles, l'auteur propose $k_h = k_{h_1} \cdot \frac{1}{b}$ où k_{h_1} est le coefficient de réaction horizontal pour une plaque de 1 pied de largeur et où b est la largeur en pied de la plaque étudiée. Terzaghi estime que k_{h_1} est approximativement égal à k_{s_1} . En reprenant la valeur de k_{s_1} admise précédemment, on est conduit à la formule :

$$k_h = \bar{k}_{s_1} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{l + 0,5}{1,5 \cdot l}$$

On obtient les valeurs de k en kg/cm^3 du tableau de la page 4, pour les argiles très consistantes, en fonction de l et de b .

Pour les sables, tous les auteurs sont d'accord pour admettre que le coefficient de réaction horizontal augmente avec la profondeur. Certains admettent une variation de k_h parabolique en fonction de z ; d'autres, exponentielle, et d'autres encore, linéaire. Terzaghi admet une variation linéaire, et il donne :

$$k_h = n_h \cdot \frac{z}{l}$$

où l est la largeur de la plaque verticale considérée; z la profondeur du point où on évalue k_h ; n_h un coefficient qui vaut :

- 1) $0,22 \text{ kg/cm}^3$ pour les sables peu compacts, secs ou humides;
- 2) $0,67 \text{ kg/cm}^3$ pour les sables moyennement compacts, secs ou humides;
- 3) $1,80 \text{ kg/cm}^3$ pour les sables compacts, secs ou humides.

Si le sable est immergé, ces valeurs deviennent respectivement $0,13$, $0,45$ et $1,1 \text{ kg/cm}^3$.

On obtient les valeurs suivantes, en kg/cm^3 , pour un sable sec ou humide moyennement compact :

b (m)	0,3	1
z (m)		
0,3	0,67	0,205
1	2,23	0,68
10	22,3	6,8

Si le sable est peu compact, il faut multiplier par $0,4$. Si le sable est très compact, il faut multiplier par $2,6$. Si le sable est immergé, il faut multiplier par $0,6$ environ.

Terzaghi obtient ces valeurs de n_h en exprimant que

$$n_h = A \cdot \gamma_s / 1,35$$

où A est une constante qui dépend de la densité du sable et où γ_s s'exprime en T/pied^3 .

A vaut en moyenne 200 pour un sable peu compact; 600 pour un sable moyennement compact; 1500 pour un sable très compact.

Aucun autre auteur n'a, à notre connaissance, publié d'une manière aussi complète des valeurs de coefficient de réaction des sols. On trouve cependant assez souvent, dans la littérature, des valeurs de K établies pour des cas particuliers. Chaque fois, on constate une concordance suffisante, en ce qui concerne l'ordre de grandeur, avec les valeurs de Terzaghi.

Dans certains cas, lorsque la chose est possible, le coefficient de raideur du sol est déterminé par comparaison avec des ouvrages existants. Ceci a été fait en Italie, lors de la construction d'une grande cale sèche, fondée sur un terrain sablonneux à Naples. Dans ce but, on s'est servi d'une cale sèche construite à Venise, qui présentait des dimensions semblables à celle de Naples et qui reposait, comme elle, sur un terrain sablonneux. Les mouvements de la cale sèche de Venise furent mesurés, au cours de remplissages et vidanges répétés, en cinq points à l'aide d'un niveau télescope agrandissant 80 fois et placé à une distance suffisante pour ne pas être influencé par les mouvements du sol. Les coefficients de raideur du sol, déduits de ces mesures, oscillaient entre $0,55$ et $0,95 \text{ kg/cm}^3$. La valeur adoptée pour les calculs de la cale sèche de Naples a été prise égale à $0,75 \text{ kg/cm}^3$.

Il y a lieu de noter enfin que, dans les calculs pratiques, le coefficient K intervient, comme on le montrera, par la valeur l_e , longueur élastique de la poutre, sous forme d'une racine quatrième, dans laquelle on trouve, au dénominateur, le coefficient K multiplié par la largeur de la poutre, et, au numérateur, le moment d'inertie et le module d'élasticité de la poutre de fondation.

Ces faits expliquent que les erreurs commises lors du choix de K ont relativement peu d'influence sur les calculs qui doivent du reste, pour les raisons exposées, être appliquées avec beaucoup de réserve, en admettant qu'ils sont seulement susceptibles de donner des ordres de grandeur.

4. Calculs pratiques

Afin de résoudre les problèmes qui se posent en pratique, on va, dans ce qui suit, indiquer les méthodes générales permettant de calculer les poutres de sections constantes reposant sur appuis continus uniformément élastiques ($K = \text{constante}$), de longueurs finies et sollicitées par des charges quelconques.

Les calculs qui seront faits sont tout à fait généraux. Ils supposent que les réactions entre le terrain et la poutre puissent être indifféremment des compressions ou des tractions. En pratique, il ne peut en être ainsi, puisque la poutre n'est pas liée au sol. Cependant, comme les calculs ne tiennent pas compte du poids propre de la poutre, qui est directement équilibré par les contraintes de compression uniforme qu'il produit sur le sol, on pourra superposer l'effet de ces compressions avec les tractions. Les compressions dues au poids peuvent être diminuées des tractions dues à l'effet de la charge. Cela n'est évidemment applicable que pour autant que les compressions dues au poids soient supérieures aux tractions dues aux charges.

5. Poutres sollicitées par des charges concentrées

L'équation générale de l'élastique (5) se simplifie et peut s'écrire :

$$EI \frac{d^4 \omega}{dx^4} = -K \cdot b \cdot \omega \quad (7)$$

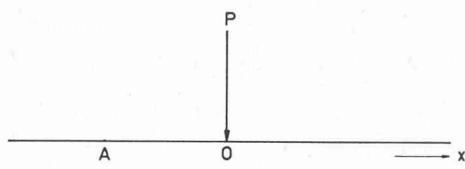


Fig. 4.

et sa solution générale est :

$$w = C_1 \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{l_e} \cdot \cos \frac{x}{l_e} + C_2 \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{l_e} \cdot \sin \frac{x}{l_e} + \\ + C_3 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \cos \frac{x}{l_e} + C_4 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \sin \frac{x}{l_e}.$$

Dans cette expression :

$$l_e = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E \cdot I}{K \cdot b}}$$

s'appelle la longueur élastique de la poutre et a effectivement les dimensions d'une longueur. Elle ne dépend que des caractéristiques de la poutre et de son appui continu.

C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont des constantes à déterminer dans chaque cas particulier.

On peut, à partir de l'équation de l'élastique, déterminer la pression σ sur l'appui, le moment fléchissant et l'effort tranchant au droit de chaque section de la poutre. On trouve ainsi :

$$\sigma = K \left(C_1 \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{l_e} \cdot \cos \frac{x}{l_e} + C_2 \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{l_e} \cdot \sin \frac{x}{l_e} + C_3 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \cos \frac{x}{l_e} + C_4 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \sin \frac{x}{l_e} \right)$$

$$M = \frac{K b l_e^2}{2} \left(-C_1 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \sin \frac{x}{l_e} + C_2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \cos \frac{x}{l_e} - C_3 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \sin \frac{x}{l_e} + C_4 \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{l_e} \cdot \cos \frac{x}{l_e} \right)$$

$$T = -\frac{K b l_e}{2} \left((C_1 - C_4) \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \cos \frac{x}{l_e} + (C_1 + C_4) \operatorname{ch} \frac{x}{l_e} \cdot \sin \frac{x}{l_e} + (C_2 + C_3) \operatorname{sh} \frac{x}{l_e} \cdot \sin \frac{x}{l_e} - (C_3 - C_2) \operatorname{ch} \frac{x}{l_e} \cdot \cos \frac{x}{l_e} \right).$$

On constate que pour résoudre un problème donné, il faut connaître le coefficient de raideur K et déterminer les quatre constantes C_1 , C_2 , C_3 , C_4 .

6. Poutre de longueur infinie sollicitée par une seule charge concentrée

Ce cas, qui est théorique, est à la base de l'étude de la poutre de longueur finie.

On considère une poutre horizontale de longueur infinie chargée par une force verticale P (fig. 4). On place l'origine de l'axe des x au droit de la force. On constate facilement que dans ces conditions on a :

pour $x = 0$:

$$\frac{dw}{dx} = 0; \quad T = \frac{P}{2}$$

pour $x = \infty$:

$$M = 0; \quad T = 0$$

Ces quatre conditions permettent de déterminer les quatre constantes des équations générales qui valent :

$$C_1 = C_2 = -C_3 = -C_4 = \frac{P}{2 K b l_e}.$$

On trouve alors :

$$\sigma = \frac{P}{2 b l_e} \cdot \frac{\cos \frac{x}{l_e} + \sin \frac{x}{l_e}}{\frac{x}{l_e}} = \frac{P}{2 b l_e} \cdot f_\sigma \left(\frac{x}{l_e} \right)$$

$$T = \frac{P}{2} \cdot \frac{\cos \frac{x}{l_e}}{\frac{x}{l_e}} = \frac{P}{2} \cdot f_T \left(\frac{x}{l_e} \right)$$

$$M = \frac{P l_e}{4} \cdot \frac{\sin \frac{x}{l_e} - \cos \frac{x}{l_e}}{\frac{x}{l_e}} = \frac{P l_e}{4} f_M \left(\frac{x}{l_e} \right).$$

Les trois fonctions $f_\sigma \left(\frac{x}{l_e} \right)$, $f_T \left(\frac{x}{l_e} \right)$ et $f_M \left(\frac{x}{l_e} \right)$ dépendent seulement du rapport $\frac{x}{l_e}$ qui est un nombre abstrait.

On peut donc tracer des courbes qui donnent directement les valeurs de $\frac{\sigma \cdot b \cdot l_e}{P}$, de $\frac{M}{P \cdot l_e}$ et $\frac{T}{P}$ correspondant aux valeurs numériques des fonctions, indépendamment des autres données du problème particulier envisagé (fig. 5).

La sollicitation de la poutre est entièrement connue dès que l'on s'est fixé sa longueur élastique l_e . On remarque que σ , M et T s'annulent respectivement aux points ayant comme abscisses des valeurs de $\frac{x}{l_e}$ données par $\left(n - \frac{1}{4} \right) \pi$, $\left(n + \frac{1}{4} \right) \pi$ et $\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$, n étant un nombre entier positif.

7. Lignes d'influence de σ , T et M en un point quelconque de la poutre de longueur infinie sollicitée par une charge concentrée

Il est facile de voir que les courbes représentatives des trois fonctions f_σ , f_M et f_T sont, à une certaine échelle, les lignes d'influence de σ , M et T en un point quelconque de la poutre.

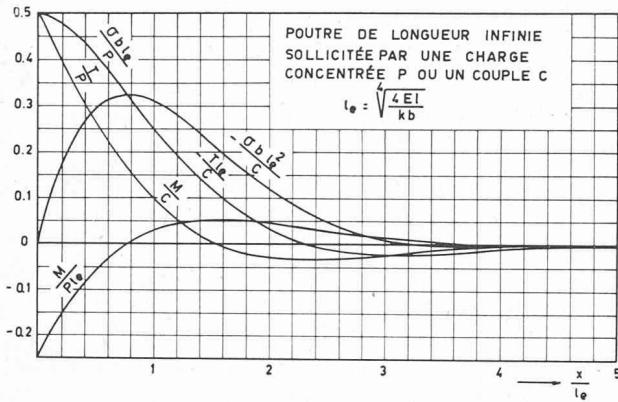


Fig. 5.

En effet (fig. 4 et 5), si on considère, par exemple, la courbe représentative de f_σ , on constate qu'une charge placée en O produit en un point A une pression qui vaut, à une certaine échelle, $f_\sigma\left(\frac{x}{l_e}\right)$, alors que si la charge se trouvait en A elle produirait en O , à une certaine échelle, une pression qui vaudrait également $f_\sigma\left(\frac{x}{l_e}\right)$, par simple décalage de la courbe considérée initialement.

Un raisonnement analogue peut être fait pour les courbes représentatives des fonctions f_T et f_M .

L'échelle des lignes d'influence est obtenue pour les pressions en multipliant les ordonnées du diagramme correspondant par $\frac{P}{bl_e}$; pour les moments fléchissants, en multipliant les ordonnées du diagramme correspondant par Pl_e , et pour les efforts tranchants en multipliant les ordonnées du diagramme correspondant par P .

8. Poutre de longueur infinie sollicitée par un couple appliqué en un point quelconque de la poutre

On suppose que la poutre de longueur infinie est sollicitée en un point quelconque par un couple C et on recherche les lignes d'influence de σ , T et M dues à ce couple, supposées mobiles. En dehors de l'intérêt pratique que peut présenter la solution de ce problème dans certains cas particuliers, on verra qu'elle peut servir à l'étude de la poutre de longueur finie, sollicitée par des charges quelconques.

Les lignes d'influence, pour un couple, sont obtenues très simplement à partir de celles qui ont été tracées précédemment pour une charge concentrée, par application de la propriété générale suivante, démontrée dans les cours de stabilité de construction :

La ligne d'influence d'un élément quelconque, pour un couple mobile, a comme ordonnées les dérivées par rapport à l'abscisse de la section en laquelle se trouve le couplé des ordonnées de la ligne d'influence du même élément, sous l'effet d'une charge verticale mobile.

L'application de cette propriété permet donc de dire que : la ligne d'influence des M de la poutre sollicitée par un couple mobile est, à une certaine échelle, la ligne d'influence des T de la poutre sollicitée par une charge verticale mobile ; la ligne d'influence des T de la poutre sollicitée par un couple mobile est à une certaine échelle la ligne d'influence des σ de la poutre sollicitée par une charge verticale mobile ; enfin, la ligne d'influence des σ

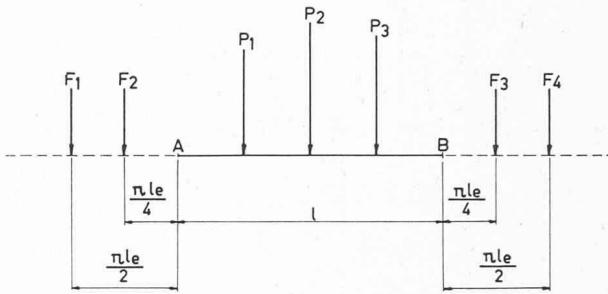


Fig. 6.

de la poutre sollicitée par un couple mobile est, à une certaine échelle, la dérivée de la ligne d'influence des σ de la poutre sollicitée par une charge verticale mobile.

En d'autres termes, par dérivation des équations établies pour la charge verticale, ou aura :

$$M = \frac{C}{2} \cdot f_T\left(\frac{x}{l_e}\right);$$

$$T = \frac{C}{2l_e} \cdot f_\sigma\left(\frac{x}{l_e}\right);$$

$$\sigma = -\frac{C}{bl_e^2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{l_e}}{\frac{x}{l_e}} = \frac{C}{bl_e^2} f\left(\frac{x}{l_e}\right).$$

Les courbes représentatives de $\frac{\sigma bl_e^2}{C}$, $\frac{M}{C}$ et $-\frac{Tl_e}{C}$ sont données à la figure 5.

9. Poutre de longueur finie sollicitée par des charges quelconques

a) Méthode générale

En pratique, il n'existe pas de poutre de longueur infinie mais bien des poutres de longueur finie. C'est ce problème qui doit être résolu et qui a fait l'objet, dans ces dernières années, de diverses recherches.

La méthode mathématique directe, qui consiste à déterminer les constantes d'intégration des équations générales en tenant compte des conditions aux extrémités, donne lieu à un nombre excessif de relations lorsque l'on veut traiter le cas général de la poutre sollicitée par plusieurs charges. Il faut donc résoudre le problème plus simplement. C'est ce qui a été fait par divers auteurs qui ont cherché à se servir des lignes d'influence de la poutre de longueur infinie. On va résumer les diverses méthodes qui permettent, par des procédés simples, de résoudre facilement le cas de la poutre de longueur finie.

b) Méthode de Bleich

On considère une poutre de longueur finie AB sollicitée par des charges quelconques P_1, P_2, \dots (fig. 6).

On calcule d'abord la poutre de longueur infinie et on trouve en A et en B des moments fléchissants et des efforts tranchants M_A et T_A , M_B et T_B .

On détermine ensuite des forces F_1, F_2, F_3 et F_4 qui, appliquées à la poutre de longueur infinie, donnent en superposant leurs effets à ceux de P_1, P_2, \dots , des

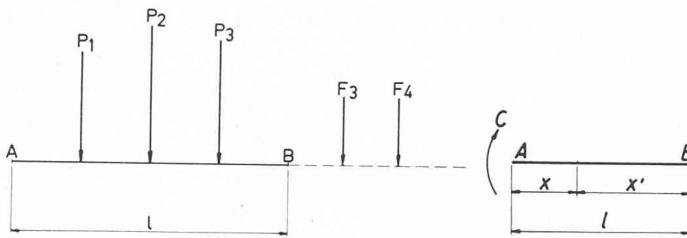


Fig. 7.

a)

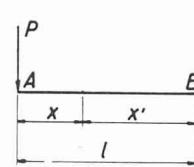


Fig. 8.

b)

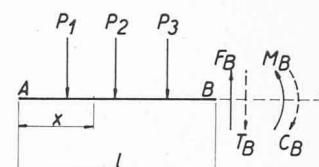


Fig. 9.

moments fléchissants et des efforts tranchants en A et B , égaux à 0 ; ce qui correspond aux conditions d'extrémités de la poutre de longueur finie.

Pour obtenir, par exemple, $M_A = 0$, on considère la ligne d'influence des M en un point quelconque O de la poutre infinie. On y superpose la poutre finie AB , en mettant A au droit de O ; le point B vient à une distance de l'origine O égale à $\frac{l}{l_e}$.

On peut placer les forces auxiliaires F d'une façon arbitraire, mais les calculs se simplifient en choisissant des positions particulières telles que les lignes d'influence aient certaines ordonnées nulles. Bleich place les forces auxiliaires F de telle façon que l'abscisse de F_1 soit $-\frac{\pi}{2} l_e$ et celle de F_2 , $-\frac{\pi}{4} l_e$; F_3 et F_4 occupent des positions symétriques par rapport à AB .

On exprime, ensuite, que $M_A = 0$ et $M_B = 0$ en faisant la somme des efforts dus aux charges.

Si on considère, ensuite, la ligne d'influence de T en O , on peut écrire de la même façon les équations exprimant que $T_A = 0$ et $T_B = 0$.

Les quatre équations ainsi obtenues permettent de déterminer F_1 , F_2 , F_3 et F_4 , et le problème est résolu. Le tronçon AB de la poutre infinie, chargée des forces P et F , est identique à la poutre finie AB chargée des forces P .

On remarque, par l'examen des lignes d'influence de la poutre de longueur infinie, représentée à la figure 5, que, lorsque $l > 3l_e$ environ, il y a, dans chacune des équations, des termes négligeables parce que l'effet des forces auxiliaires devient faible aux extrémités opposées ; elles se réduisent alors à :

$$F_1 = -\frac{1}{0,052} \cdot \frac{M_A}{l_e}$$

$$F_2 = -\frac{1}{0,1612} \cdot T_A$$

$$F_3 = +\frac{1}{0,1612} \cdot T_B$$

$$F_4 = -\frac{1}{0,052} \cdot \frac{M_B}{l_e}.$$

c) Méthode du professeur Magnel (1889-1955)

Le professeur Magnel, de l'Université de Gand, a appliqué (1938) la méthode de Bleich à la recherche des lignes d'influence en tous les points d'une poutre qui n'est infinie que dans une seule direction. L'usage de ces lignes d'influence permet de simplifier la méthode de Bleich. En effet, devant traiter le cas de la poutre AB

(fig. 7), il suffit de l'assimiler à un tronçon de poutre infinie dans un sens, à laquelle on ajoute deux forces F_3 et F_4 placées arbitrairement.

On placera de préférence F_3 en un point où la ligne d'influence de M en B a une ordonnée nulle et F_4 en un point où la ligne d'influence des T en B a une ordonnée nulle.

Dans ces conditions, on écrit facilement les deux équations qui expriment $M_B = 0$ et $T_B = 0$, et chacune de ces équations ne renferme qu'une inconnue ; on a donc la solution exacte explicitement.

On trouve aux tableaux I, II et III les valeurs des coefficients d'influence calculés par le professeur Magnel.

d) Méthode par annulation directe des efforts d'extrémités

M. E. Decarpentrie, ingénieur à la Société d'Etudes Verheyen & Moenært, a étudié la sollicitation de la poutre de longueur finie sollicitée à une de ses extrémités par une charge concentrée ou par un couple (fig. 8a et b) ; ces deux cas sont très simples et peuvent être facilement résolus à partir de l'expression générale de la déformation ω , solution de l'équation différentielle (5) du paragraphe 2. Il suffit de déterminer les quatre constantes d'intégration pour ces deux cas, grâce aux conditions d'extrémités de la poutre, qui sont :

pour la charge concentrée à une extrémité :

$$\begin{array}{lll} x = 0 & M_A = 0 & T_A = P \\ x = l & M_B = 0 & T_B = 0 \end{array}$$

pour un couple à une extrémité :

$$\begin{array}{lll} x = 0 & M_A = -C & T_A = 0 \\ x = l & M_B = 0 & T_B = 0 \end{array}$$

On obtient ainsi les coefficients d'influence f_o , f_M et f_T qui sont donnés dans les tableaux IV, V et VI en fonction de $\lambda = \frac{l}{l_e}$ et de $\alpha = \frac{x}{l}$.

Le calcul de la poutre de longueur finie peut alors s'exécuter en deux étapes. La première consiste à considérer la poutre de longueur semi-infinie sollicitée par les mêmes charges verticales et d'en calculer les diagrammes des σ , M et T entre les points A et B par la méthode Magnel. La seconde étape consiste à superposer aux valeurs de σ , M et T trouvées ci-dessus, celles qui correspondent au couple C_B et à la force F_B appliqués à l'extrémité B de la poutre de longueur finie l et qui annulent respectivement à cette extrémité le moment fléchissant et l'effort tranchant, ce qui rétablit les conditions d'extrémités de la poutre de longueur finie : $M_B = 0$ et $T_B = 0$ (fig. 9).

TABLEAU I

LIGNE DE P POUR UNE FORCE UNITE AU POINT,		LIGNE D'INFLUENCE DE p AU POINT																				
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	
0	+4,000	+3,600	+3,207	+2,833	+2,465	+2,127	+1,812	+1,520	+1,252	+0,976	+0,436	+0,168	-0,024	-0,152	-0,224	-0,261	-0,267	-0,256	-0,226	-0,195		
0,2	+3,208	+2,952	+2,695	+2,440	+2,181	+1,935	+1,697	+1,471	+1,259	+0,884	+0,574	+0,329	+0,142	+0,003	-0,084	-0,138	-0,164	-0,174	-0,165	-0,151		
0,4	+2,458	+2,327	+2,182	+2,039	+1,888	+1,732	+1,576	+1,418	+1,261	+0,969	+0,708	+0,486	+0,308	+0,168	+0,063	-0,013	-0,061	-0,090	-0,103	-0,106		
0,6	+1,812	+1,753	+1,694	+1,639	+1,574	+1,506	+1,431	+1,343	+1,247	+1,043	+0,837	+0,644	+0,474	+0,327	+0,208	+0,114	+0,045	-0,005	-0,037	-0,058		
0,8	+1,249	+1,256	+1,259	+1,261	+1,261	+1,258	+1,247	+1,227	+1,196	+1,091	+0,948	+0,791	+0,633	+0,487	+0,356	+0,245	+0,156	+0,084	+0,033	-0,006		
1,0	+0,796	+0,840	+0,883	+0,928	+0,974	+1,007	+1,042	+1,072	+1,090	+1,092	+1,027	+0,917	+0,784	+0,642	+0,506	+0,381	+0,273	+0,182	+0,109	+0,054		
1,2	+0,436	+0,505	+0,574	+0,642	+0,710	+0,775	+0,837	+0,896	+0,948	+1,027	+1,053	+1,009	+0,912	+0,789	+0,653	+0,521	+0,398	+0,289	+0,197	+0,122		
1,4	+0,168	+0,249	+0,328	+0,409	+0,490	+0,567	+0,644	+0,720	+0,791	+0,917	+1,009	+1,044	+1,006	+0,915	+0,794	+0,661	+0,529	+0,406	+0,296	+0,203		
1,6	-0,024	+0,060	+0,143	+0,226	+0,309	+0,391	+0,474	+0,554	+0,633	+0,784	+0,912	+1,006	+1,043	+1,007	+0,916	+0,796	+0,663	+0,531	+0,407	+0,297		
1,8	-0,152	-0,072	+0,008	+0,089	+0,169	+0,248	+0,327	+0,407	+0,487	+0,642	+0,789	+0,915	+1,007	+1,042	+1,005	+0,914	+0,794	+0,660	+0,529	+0,405		
2,0	-0,224	-0,152	-0,083	-0,011	+0,063	+0,136	+0,208	+0,282	+0,356	+0,506	+0,654	+0,794	+0,916	+1,005	+1,038	+1,000	+0,909	+0,789	+0,655	+0,525		
2,2	-0,260	-0,199	-0,136	-0,074	-0,012	+0,050	+0,115	+0,180	+0,246	+0,381	+0,521	+0,661	+0,796	+0,914	+1,000	+1,032	+1,094	+0,902	+0,782	+0,650		
2,4	-0,268	-0,216	-0,164	-0,114	-0,060	-0,008	+0,044	+0,098	+0,155	+0,273	+0,397	+0,529	+0,662	+0,794	+0,903	+0,994	+1,025	+0,987	+0,895	+0,777		
2,6	-0,256	-0,214	-0,173	-0,132	-0,090	-0,049	-0,005	+0,039	+0,084	+0,182	+0,289	+0,405	+0,531	+0,660	+0,788	+0,902	+0,987	+1,019	+0,980	+0,890		
2,8	-0,228	-0,199	-0,164	-0,136	-0,104	-0,072	-0,038	-0,004	+0,032	+0,109	+0,197	+0,296	+0,407	+0,529	+0,655	+0,783	+0,896	+0,980	+1,012	+0,975		
3,0	-0,196	-0,173	-0,151	-0,130	-0,107	-0,083	-0,058	-0,033	-0,005	+0,054	+0,122	+0,203	+0,297	+0,405	+0,525	+0,650	+0,777	+0,890	+0,975	+1,008		
3,2	-0,164	-0,147	-0,131	-0,116	-0,100	-0,085	-0,068	-0,060	-0,031	+0,013	+0,065	+0,127	+0,204	+0,295	+0,301	+0,520	+0,645	+0,772	+0,886	+0,971		
3,4			-0,111	-0,100	-0,090	-0,080	-0,069	-0,058	-0,046	-0,016	+0,022	+0,069	+0,128	+0,203	+0,293	+0,398	+0,516	+0,642	+0,768	+0,882		
3,6						-0,078	-0,072	-0,066	-0,059	-0,054	-0,034	-0,009	+0,025	+0,076	+0,127	+0,201	+0,290	+0,395	+0,513	+0,638	+0,766	
3,8									-0,060	-0,057	-0,053	-0,044	-0,029	-0,007	+0,026	+0,069	+0,126	+0,199	+0,288	+0,393	+0,510	+0,636
4,0											-0,051	-0,047	-0,040	-0,027	-0,006	+0,026	+0,068	+0,124	+0,197	+0,286	+0,391	+0,508
4,2											-0,047	-0,045	-0,039	-0,027	-0,007	+0,025	+0,067	+0,123	+0,196	+0,285	+0,389	
4,4											-0,045	-0,044	-0,039	-0,027	-0,007	+0,024	+0,066	+0,123	+0,195	+0,284		
4,6											-0,045	-0,044	-0,039	-0,027	-0,007	+0,024	+0,066	+0,123	+0,194			
5,0																-0,045	-0,044	-0,039	-0,027	-0,007	+0,024	
5,2																-0,044	-0,043	-0,038	-0,027			
5,4																-0,044	-0,043	-0,038				
5,6																-0,044	-0,043					
5,8																-0,044						
6,0																-0,044						
6,2																-0,044						

A 0

INFLUENCE DE p EN 0

VALEURS DU COEFFICIENT K_p DANS $i_p = \frac{a}{2b} \cdot K_p$

TABLEAU II

LIGNE DE T POUR UNE FORCE UNITE AU POINT,		LIGNE D'INFLUENCE DE t AU POINT																			
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
0	+2,000	+1,620	+1,280	+0,978	+0,712	+0,482	+0,286	+0,120	-0,018	-0,222	-0,344	-0,402	-0,416	-0,398	-0,368	-0,310	-0,256	-0,204	-0,156	-0,112	
0,2	0	-0,308	+1,408	+0,692	+1,152	+0,921	+0,715	+0,533	+0,375	+0,240	+0,025	-0,119	-0,208	-0,254	-0,282	-0,260	-0,239	-0,206	-0,173	-0,139	-0,106
0,4	0	-0,240	-0,666	-0,676	+1,127	+0,945	+0,780	+0,631	+0,497	+0,274	+0,107	-0,012	-0,092	-0,138	-0,160	-0,166	-0,156	-0,141	-0,122	-0,101	
0,6	0	-0,178	-0,351	-0,518	-0,678	-0,832	+1,020	+0,881	+0,752	+0,522	+0,335	+0,187	+0,076	-0,004	-0,067	-0,090	-0,104	-0,107	-0,103	-0,093	
0,8	0	-0,125	-0,252	-0,377	-0,503	-0,630	-0,754	-0,878	+1,000	+0,770	+0,566	+0,392	+0,250	+0,139	+0,054	-0,006	-0,045	-0,069	-0,080	-0,082	
1,0	0	-0,082	-0,168	-0,268	-0,353	-0,452	-0,564	-0,661	-0,768	+1,012	+0,939	+0,799	+0,604	+0,434	+0,292	+0,177	+0,088	+0,024	-0,021	-0,055	-0,066
1,2	0	-0,047	-0,101	-0,162	-0,229	-0,304	-0,384	-0,470	-0,563	-0,761	+1,012	+0,939	+0,822	+0,629	+0,459	+0,314	+0,197	+0,106	+0,038	-0,011	-0,043
1,4	-0,021	-0,050	-0,086	-0,152	-0,184	-0,245	-0,313	-0,389	-0,559	-0,753	+1,040	+0,934	+0,841	+0,641	+0,470	+0,324	+0,209	+0,113	+0,043	-0,007	
1,6	-0,002	-0,012	-0,030	-0,057	-0,092	-0,135	-0,187	-0,246	-0,388	-0,558	+1,050	+0,948	+0,837	+0,643	+0,472	+0,324	+0,208	+0,114	+0,044		
1,8	+0,011	+0,014	+0,009	-0,004	-0,024	-0,053	-0,099	-0,135	-0,247	-0,391	-0,561	-0,734	+1,040	+0,833	+0,641	+0,470	+0,325	+0,206	+0,112		
2,0	+0,019	+0,031	+0,036	+0,033	+0,023	+0,006	-0,019	-0,051	-0,137	-0,253	-0,398	-0,569	-0,762	+1,032	+0,827	+0,635	+0,466	+0,321	+0,203		
2,2	+0,023	+0,040	+0,050	+0,055	+0,053	+0,045	+0,030	+0,008	-0,054	-0,144	-0,262	-0,408	-0,597	-0,771	+1,024	+0,820	+0,630	+0,461	+0,318		
2,4	+0,023	+0,043	+0,057	+0,069	+0,076	+0,078	+0,077	+0,071	+0,045	-0,002	-0,071	-0,165	-0,284	-0,429	-0,598	-0,788	+1,010	+0,809	+0,621		
2,6	+0,023	+0,043	+0,057	+0,069	+0,076	+0,081	+0,083	+0,082	+0,068	+0,038	-0,012	-0,081	-0,175	-0,293	-0,437	-0,605	-0,793	+1,008	+0,806		
2,8	+0,021	+0,040	+0,055	+0,067	+0,076	+0,081	+0,083	+0,082	+0,068	+0,038	+0,012	-0,012	-0,081	-0,175	-0,293	-0,437	-0,605	-0,793	+1,008		
3,0	+0,018	+0,035	+0,049	+0,051	+0,070	+0,077	+0,082	+0,084	+0,079	+0,062	+0,030	-0,020	-0,090	-0,183	-0,300	-0,443	-0,610	-0,797	+1,003		
3,2	+0,016	+0,029	+0,042	+0,053	+0,052	+0,070	+0,075	+0,080	+0,081	+0,078	+0,055	+0,022	-0,028	-0,097	-0,169	-0,305	-0,447	-0,613	-0,799		
3,4	+0,024	+0,034	+0,044	+0,052	+0,060	+0,067	+0,072	+0,078	+0,077	+0,068	+0,045	+0,024	-0,027	-0,097	-0,173	-0,309	-0,450	-0,615			
3,6			+0,035	+0,042	+0,049	+0,055	+														

TABLEAU III

LIGNE DE M POUR UNE FORCE UNITE AU POINT		LIGNE D'INFLUENCE DE M AU POINT																				
		ax	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
0	0	0	+0,360	+0,651	+0,877	+1,036	+1,162	+1,240	+1,280	+1,287	+1,241	+1,125	+0,972	+0,808	+0,644	+0,492	+0,360	+0,244	+0,152	+0,080	+0,028	
0,2	0	-0,032	-0,122	+0,135	+0,336	+0,504	+0,630	+0,720	+0,780	+0,833	+0,811	+0,725	+0,651	+0,545	+0,439	+0,340	+0,249	+0,173	+0,110	+0,061		
0,4	0	-0,025	-0,095	-0,209	-0,369	-0,158	+0,016	+0,156	+0,268	+0,421	+0,495	+0,513	+0,492	+0,443	+0,384	+0,320	+0,252	+0,193	+0,140	+0,096		
0,6	0	-0,018	-0,071	-0,158	-0,280	-0,429	-0,610	-0,420	-0,256	-0,002	+0,167	+0,270	+0,322	+0,335	+0,322	+0,294	+0,253	+0,210	+0,168	+0,128		
0,8	0	-0,013	-0,050	-0,113	-0,202	-0,315	-0,452	-0,616	-0,804	-0,450	-0,184	-0,007	+0,133	+0,210	+0,249	+0,258	+0,246	+0,223	+0,192	+0,160		
1,0	0	-0,008	-0,033	-0,076	-0,137	-0,217	-0,317	-0,439	-0,581	-0,933	-0,571	-0,291	-0,084	+0,059	+0,153	+0,205	+0,226	+0,211	+0,186			
1,2	0	-0,004	-0,019	-0,046	-0,084	-0,138	-0,206	-0,291	-0,395	-0,659	-1,006	-0,635	-0,346	-0,129	+0,024	+0,127	+0,186	+0,214	+0,219	+0,208		
1,4	0	-0,002	-0,008	-0,022	-0,044	-0,075	-0,118	-0,174	-0,244	-0,433	-0,694	-1,037	-0,662	-0,368	-0,146	+0,012	+0,117	+0,180	+0,210	+0,210	+0,217	
1,6	0	0	-0,002	-0,006	-0,013	-0,029	-0,051	-0,084	-0,126	-0,253	-0,441	-0,696	-1,043	-0,667	-0,371	-0,149	+0,009	+0,116	+0,179	+0,210		
1,8	0	+0,002	+0,004	+0,006	+0,007	+0,004	+0,003	-0,017	-0,039	-0,115	-0,241	-0,404	-0,693	-1,037	-0,661	-0,361	-0,146	+0,011	+0,117	+0,180		
2,0	0	+0,002	+0,007	+0,014	+0,022	+0,026	+0,029	+0,026	+0,022	-0,016	-0,093	-0,221	-0,414	-0,679	-1,026	-0,653	-0,361	-0,143	+0,013	+0,118		
2,2	0	+0,003	+0,009	+0,018	+0,030	+0,040	+0,049	+0,067	+0,061	+0,052	+0,014	-0,067	-0,200	-0,396	-0,665	-1,016	-0,646	-1,002	-0,638	-0,353		
2,4	0	+0,003	+0,009	+0,019	+0,033	+0,045	+0,060	+0,072	+0,083	+0,094	+0,084	+0,042	-0,043	-0,180	-0,381	-0,654	-1,007	-0,641	-0,354	-0,138		
2,6	0	+0,003	+0,009	+0,019	+0,033	+0,047	+0,062	+0,078	+0,093	+0,116	+0,125	+0,112	+0,065	+0,024	-0,165	-0,370	-0,646	-1,002	-0,638	-0,353		
2,8	0	+0,002	+0,008	+0,018	+0,031	+0,044	+0,060	+0,077	+0,093	+0,124	+0,145	+0,151	+0,133	+0,083	-0,101	-0,155	-0,363	-0,641	-0,999	-0,637		
3,0	0	+0,002	+0,007	+0,016	+0,029	+0,040	+0,055	+0,071	+0,087	+0,120	+0,149	+0,168	+0,170	+0,149	+0,095	-0,001	-0,149	-0,358	-0,639	-0,998		
3,2	0	+0,002	+0,006	+0,013	+0,023	+0,034	+0,048	+0,062	+0,078	+0,110	+0,141	+0,168	+0,184	+0,183	+0,159	+0,103	+0,004	-0,145	-0,357	-0,639		
3,4		+0,005	+0,011	+0,019	+0,028	+0,039	+0,052	+0,066	+0,096	+0,127	+0,157	+0,181	+0,195	+0,191	+0,166	+0,107	+0,007	-0,143	-0,336			
3,6				+0,015	+0,022	+0,031	+0,042	+0,054	+0,081	+0,109	+0,139	+0,167	+0,190	+0,201	+0,196	+0,169	+0,109	+0,008	-0,144			
3,8						+0,025	+0,033	+0,042	+0,064	+0,091	+0,118	+0,147	+0,173	+0,194	+0,205	+0,199	+0,171	+0,110	+0,008			
4,0									+0,032	+0,050	+0,071	+0,091	+0,127	+0,157	+0,187	+0,207	+0,200	+0,171	+0,110			
4,2										+0,037	+0,054	+0,075	+0,100	+0,126	+0,154	+0,178	+0,198	+0,207	+0,200	+0,171		
4,4										+0,040	+0,056	+0,077	+0,102	+0,128	+0,156	+0,179	+0,199	+0,208	+0,201			
4,6										+0,041	+0,057	+0,078	+0,102	+0,128	+0,155	+0,179	+0,199	+0,208				
4,8										+0,041	+0,057	+0,078	+0,102	+0,128	+0,155	+0,179	+0,199					
5,0										+0,041	+0,057	+0,078	+0,102	+0,128	+0,155	+0,179	+0,199					
5,2										+0,040	+0,056	+0,077	+0,102	+0,128	+0,156	+0,179	+0,199					
5,4										+0,039	+0,056	+0,077	+0,102									
5,6										+0,039	+0,056	+0,077	+0,102									
5,8										+0,039	+0,056	+0,077	+0,102									
6,0										+0,039	+0,056	+0,077	+0,102									
6,2										+0,039	+0,056	+0,077	+0,102									


INFLUENCE DE M EN O
VALEURS DU COEFFICIENT KM DANS $i_M = \frac{1}{4d} \cdot K_M$

TABLEAU IV

POUTRE SUR SOL ELASTIQUE		$P_p = \frac{P}{bL} \cdot i_p \cdot \frac{P_L}{L}$	$P_c = \frac{C}{bL} \cdot i_p \cdot \frac{C_L}{L}$
COEFFICIENT D'INFLUENCE DES PRESSIONS SUR LE SOL		$d = \frac{L}{4}$	$\lambda = \frac{L}{4}$
λ	α	0	0,10 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 1,00
0	0	+4,000	+3,400 +2,800 +2,200 +1,600 +1,000 +0,400 -0,200 -0,800 -1,400 -2,000
0	-0,520	-4,000	-3,600 -3,000 -2,400 -1,200 0 +1,200 +2,400 +3,600 +4,800 +6,000
1	+0,038	+3,418	+2,800 +2,187 +1,583 +0,981 +0,386 -0,206 -0,794 -1,383 -1,991
1	-6,207	-4,879	-3,590 -2,337 -1,114 -0,082 +1,259 +2,424 +3,577 +7,277 +5,816
2	+0,541	+3,650	+2,801 +2,027 +1,293 +0,740 +0,199 -0,285 -0,795 -1,168 -1,596
2	-9,064	-5,940	-3,428 -1,464 +0,036 +1,170 +2,030 +2,700 +3,265 +3,776 +4,270
3	+0,038	+4,285	+2,755 +1,516 +0,984 +0,256 -0,455 -0,563 -0,627 -0,679
3	-18,024	-8,780	-2,504 +1,154 +3,242 +3,897 +7,266 +3,143 +2,498 +1,422 +0,506
4	+0,004	+4,704	+2,501 +0,863 -0,063 -0,472 -0,570 -0,476 -0,320 -0,153 +0,032
4	-32,000	-11,360	-0,351 +5,595 +6,595 +5,929 +5,024 +2,525 +0,955 -0,440 -1,772
5	+0,019	+5,062	+1,987 +0,154 -0,571 -0,671 -0,509 -0,295 -0,110 +0,034 +0,167
5	-50,085	-12,091	-5,553 +10,369 +9,025 +5,584 +2,894 +0,889 -0,020 -0,885 -1,275
6	+12,000	+5,436	+1,310 -0,450 -0,803 -0,593 -0,298 -0,091 +0,011 +0,052 +0,073
6	-72,000	-10,281	-12,333 +1,256 +9,388 +4,032 +0,864 -0,422 -0,691 -0,468 -0,099
7	+14,000	+5,312	+0,566 -0,864 -0,801 -0,395 -0,103 -0,019 +0,042 +0,026 +0,002
7	-98,000	-5,860	-19,629 +16,366 +7,959 +1,725 -0,568 -0,833 -0,500 -0,127 -0,108
8	+16,000	+4,990	-0,093 -1,066 -0,649 -0,191 +0,001 +0,046 +0,627 +0,007 -0,003
8	-128,000	+1,181	+3,225 +17,037 +4,889 -0,244 -1,129 -0,662 -0,175 0 0

POUTRE SUR SOL ELASTIQUE		$T_p = P \cdot i_T \cdot \frac{P_L}{L}$	$T_c = \frac{C}{L} \cdot i_T \cdot \frac{C_L}{L}$
COEFFICIENT D'INFLUENCE DU MOMENT FLECHISSANT		$d = \frac{L}{4}$	$\lambda = \frac{L}{4}$
λ	α	0	0,10 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 1,00
0	0	+1,000 +0,830 +0,320 +0,070 -0,120 -0,250 -0,320 -0,280 -0,170 0	
0	-0,520	-0,960	-1,260 +1,440 +1,500 +1,440 +1,260 +0,960 +0,520 0
1	+1,000	+0,627 +0,316 +0,067 -0,121 -0,250 -0,318 -0,326 -0,276 -0,168 0	
1	0	+0,540	+1,273 +1,445 +1,497 +1,429 +1,229 +0,945 +0,525 0
2	0	+0,743 +1,208 +1,449 +1,516 +1,454 +1,292 +0,154 +0,754 +0,402 0	
2	0	+1,000 +0,486 +0,139 -0,069 -0,186 -0,223 -0,213 -0,176 -0,133 -0,065 0	
3	0	+1,311 +1,852 +1,495 +1,657 +1,292 +0,940 +0,559 +0,286 +0,098 0	
4	0	+2,073 +2,575 +2,238 +1,600 +1,009 +0,412 +0,086 -0,087 -0,111 0	
5	0	+0,242 -0,111 -0,207 -0,179 -0,113 -0,053 -0,014 +0,007 +0,012 0	
5	0	+2,908 +3,095 +2,223 +1,228 +0,540 +0,050 -0,094 -0,160 -0,106 0	
6	0	+3,731 +3,369 +1,928 +0,734 +0,084 -0,143 -0,155 -0,093 -0,053 0	
7	0	+0,059 -0,200 -0,167 -0,078 -0,016 +0,006 +0,005 +0,001 0	
8	0	+1,000 -0,009 -0,2074 -0,133 -0,038 +0,002 +0,009 +0,005 +0,001 0	
8	0	+5,103 +3,181 +0,970 -0,037 -0,219 -0,128 -0,036 +0,002 +0,006 0	

TABLEAU V

POUTRE SUR SOL ELASTIQUE		$T_p = P \cdot i_T \cdot \frac{P_L}{L}$	$T_c = \frac{C}{L} \cdot i_T \cdot \frac{C_L}{L}$
COEFFICIENT D'INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT		$d = \frac{L}{4}$	$\lambda = \frac{L}{4}$

<tbl_r cells="4" ix="3" maxcspan="1

10. Cas particuliers

Les méthodes qui précèdent sont générales et permettent de résoudre n'importe quel cas pouvant se présenter en pratique. On peut envisager des cas particuliers et dresser directement des tableaux ou graphiques donnant leur résolution. Ce sont, entre autres, les cas de la poutre infinie chargée d'une infinité de charges concentrées P , égales et équidistantes, de la poutre de longueur finie chargée en son centre par une charge P , de la poutre de longueur finie chargée à ses extrémités par deux charges valant P .

11. Influence de la superstructure sur la répartition des pressions

a) Notions fondamentales

Dans ce qui précède, on a supposé que les forces qui sollicitent la fondation sont libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. La superstructure est considérée comme parfaitement souple. En général, la rigidité de la superstructure d'une construction doit se combiner avec la rigidité de la fondation et la répartition des contraintes sur le sol peut s'écarte appréciablement de celle calculée par les théories exposées.

Soit une construction caractérisée par un système de fondation S_f de rigidité I_f et une superstructure S_s de rigidité I_s (fig. 11). Sous la semelle de fondation, il y

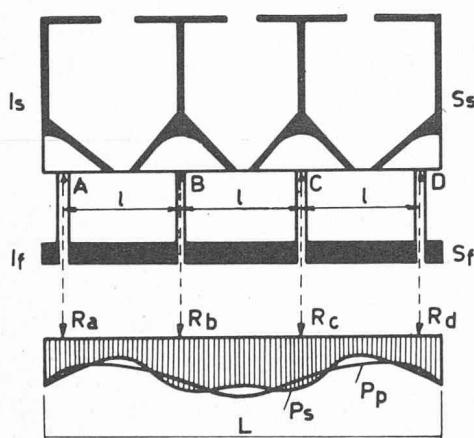


Fig. 11.

à lieu de considérer, suivant MM. les professeurs de Beer et Krsmanovitch, deux types de répartition de contraintes :

- la répartition primaire p_p consécutive à l'action conjuguée de la fondation et de la superstructure ;
- la répartition secondaire p_s due aux flexions secondaires qui se manifestent dans les travées séparant chaque appui et qui provoque une concentration des contraintes au droit des appuis alliée à une réduction en travée. Dans la plupart des cas pratiques, la fondation est suffisamment rigide pour que l'on puisse négliger ce phénomène.

Pour faire les calculs, on admet les hypothèses suivantes :

1. La répartition des contraintes est uniforme dans toute section transversale, c'est-à-dire que les déformations transversales sont beaucoup moins importantes que les déformations longitudinales.
2. Les rigidités respectives de la fondation et de la superstructure sont constantes sur toute la longueur de la

construction, et les matériaux constitutifs ont un module d'élasticité constant.

3. Le module cédométrique du sol est constant, ce qui permet de le considérer comme homogène et isotrope.
4. Les phénomènes plastiques (fluage) et les déformations élastiques (raccourcissement des piliers) ne sont pas pris en considération.
5. La rigidité de la superstructure est telle que la concordance entre la fondation et le sol reste assurée sur toute la surface de contact ;
6. Les tassements différentiels du sol sont tels que la fondation et la superstructure sont en état de les suivre sans dommage. Pour les structures en béton armé, se déformant lentement, les tassements de l'ordre de 2 à 4 % des portées sont admissibles. En valeur absolue, et pour des portées usuelles de 5 à 10 m entre appuis, cela revient à des tassements différentiels de 2 cm.
7. La consolidation du sol est entièrement effectuée sous l'action du poids propre de la construction elle-même.
8. L'inertie des piliers peut être considérée comme faible par rapport à la rigidité des deux systèmes en présence S_f et S_s . On considère que les deux systèmes sont reliés par des articulations. On ne tient pas compte du mode de fixation réel de la superstructure à la fondation.

h) Rigidité de la superstructure

Les méthodes de calcul nécessitent la connaissance de la rigidité de la superstructure. Si celle-ci n'est pas parfaitement souple ou parfaitement rigide, son degré de rigidité est toujours difficile à évaluer, car on ne peut tenir compte de tous les éléments tels que portes, fenêtres, et autres.

On dispose cependant des formules de Meyerhoff (1953) qui distinguent l'immeuble à ossature simple de l'immeuble à ossature avec remplissage. Pour l'immeuble à ossature simple (fig. 12), la rigidité d'un étage, dalle

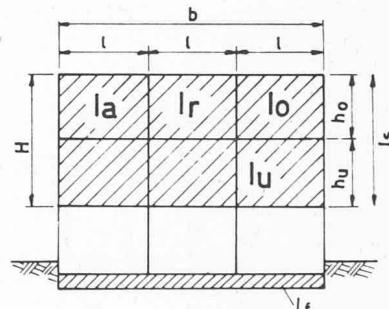


Fig. 12.

+ piliers, correspondante est donnée avec les notations suivantes :

- E = module d'élasticité du matériau de l'ossature ;
 E_p = module d'élasticité du matériau de remplissage ;
 I_o = moment d'inertie des colonnes supérieures de longueur h_o ;
 I_n = moment d'inertie des colonnes intérieures de longueur h_n ;
 I_b = moment d'inertie des poutres de longueur l ;
 nl = longueur totale de la construction ;
 h = hauteur du remplissage ;
 e = épaisseur du remplissage

par

$$EI = EI_b \left(1 + \frac{R_o + R_n}{R_r + R_o + R_n} \cdot \frac{(nl)^2}{l^2} \right)$$

avec $R_o = \frac{I_o}{h_o}$ $R_n = \frac{I_n}{h_o}$ $R_r = \frac{I_b}{l}$

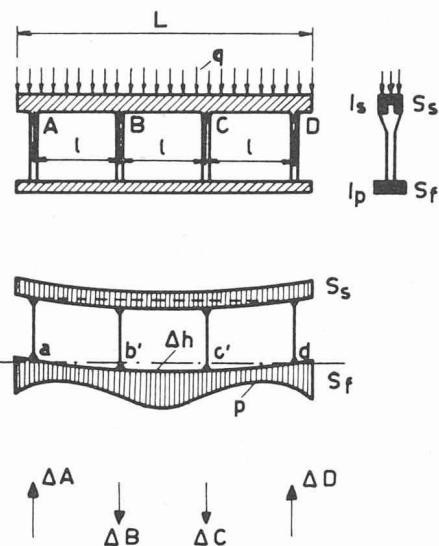
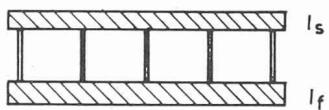
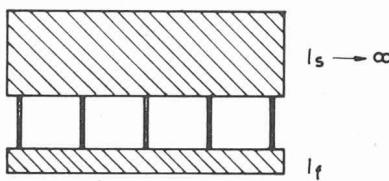


Fig. 13.

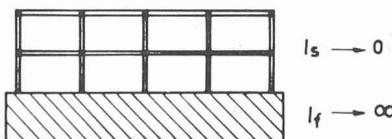
Cas I



Cas II



Cas III



Cas IV

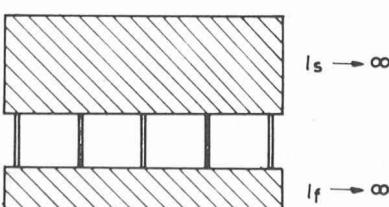


Fig. 14.

La rigidité totale de l'ossature est donc :

$$(EI)_{\text{tot}} = \sum_{\text{étages}} EI.$$

Le remplissage augmente la rigidité de

$$E_p \cdot I_p \frac{(nl)^2}{2h^2}$$

$E_p I_p$ étant la rigidité d'un remplissage, avec $I_p = \frac{e \cdot h^3}{13}$.

c) *Principes de calculs*

L'étude de l'influence de la rigidité de la superstructure a été faite d'une façon très complète par le professeur Krsmanovitch (1955). On en trouve un résumé ci-dessous.

On considère une superstructure S_s reliée à la fondation S_f par des piliers articulés (fig. 13), les deux systèmes étant continus.

On calcule par une descente de charge, *de haut en bas*, les efforts S_A , S_B , $S_C \dots$ dans les piliers.

On calcule la fondation S_f par une des méthodes indiquées précédemment en tenant compte du moment d'inertie I_f de la fondation et du moment I_p de la superstructure, soit, pour l'ensemble de la construction $I_f + I_p = I$.

On obtient ainsi une répartition de pression p sous la fondation et on peut déterminer les moments fléchissants dans la fondation à partir des forces S_A , S_B , S_C , ...

On calcule les forces dans les piliers *de bas en haut* à partir de la répartition p des pressions et on trouve des forces $R_A, R_B, R_C \dots$ différentes de $S_A, S_B, S_C \dots$

Dans chaque pilier, il y a donc une différence de force :

$$\Delta A = R_A - S_A \quad , \quad \Delta B = R_B - S_{,B} \quad \dots$$

les unes positives, les autres négatives, mais l'on a toujours :

$$S_A + \Delta A + S_B + \Delta B + S_C + \Delta C \dots = R_A + R_B + R_C \dots$$

On répartit les forces ΔA , ΔB , $\Delta C \dots$ entre la fondation S_f et la superstructure S_p dans le rapport de leur moment d'inertie.

Les forces ainsi réparties provoquent des moments fléchissants et des efforts tranchants dans la superstructure et dans la fondation, dont il y a lieu de tenir compte. La répartition implique que le système continu S_f soit calculé de bas en haut comme poutre de fondation soumise aux pressions s'exerçant sur le sol et compte tenu des déplacements relatifs des appuis. On tient compte de ces déplacements relatifs dans le calcul de la superstructure.

En résumé, si on suppose connue la rigidité de chacun des deux systèmes, on peut calculer la déformation Δh et en déduire la répartition réelle des contraintes sous la fondation, c'est-à-dire les réactions $R_A, R_B, R_C \dots$ donc les forces $\Delta A, \Delta B, \Delta C \dots$ et obtenir la sollicitation des deux systèmes par la répartition indiquée ci-dessus.

Le professeur Krsmanovitch a également montré que les moments augmentent dans une superstructure rigide avec le moment d'inertie de la fondation. Ce qui confirme qu'il y a intérêt à construire une structure rigide sur une fondation souple.

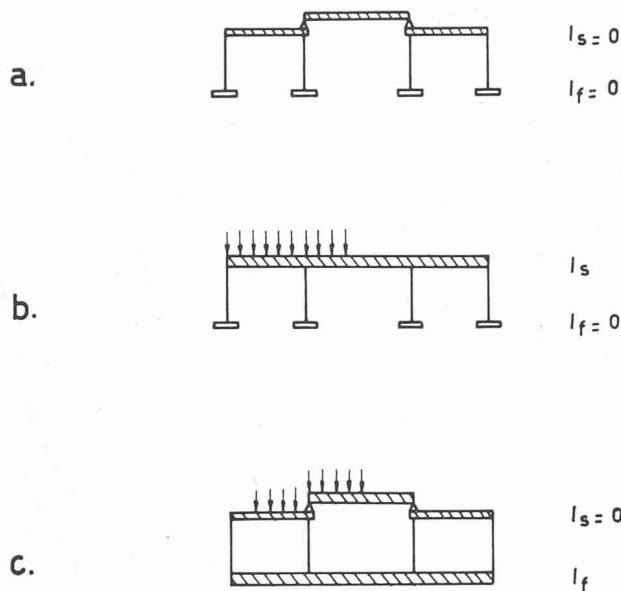


Fig. 15.

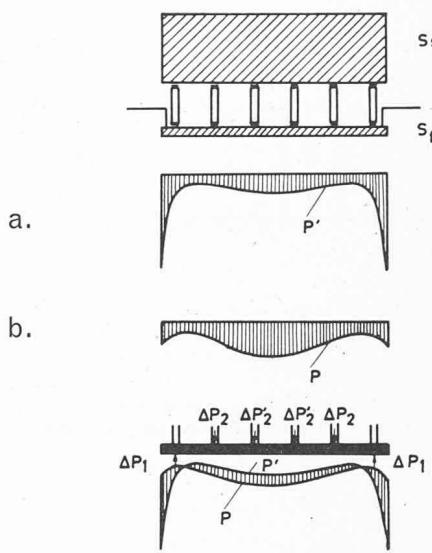


Fig. 16.

d) Analyse des cas possibles

Suivant le professeur Krsmanovitch, il y a lieu de distinguer les différents cas représentés à la figure 14, et que l'on va examiner successivement :

Cas I

Etant donné que les moments d'inertie I_f et I_s sont petits en valeur absolue, les systèmes S_f et S_s sont en état de suivre les déformations du sol et de se déformer suivant les exigences de ce dernier. Si les tassements différentiels s'accroissent, par exemple sous l'effet d'une répartition défavorable des forces extérieures, les systèmes S_f et S_s ne possèdent pas la rigidité suffisante pour s'y opposer, et la construction subit des dommages.

Le calcul peut s'effectuer de deux manières :

1. Si le système S_f est assez rigide pour qu'on puisse négliger les flexions secondaires dans le calcul de la répartition des contraintes, on peut procéder comme exposé au paragraphe précédent : considérer la fondation comme un système de moment d'inertie $I : I_f + I_s$, rechercher la répartition des contraintes, calculer les réactions réelles et les forces correctives, répartir ces forces entre les deux systèmes.
2. Si la rigidité de la fondation est si faible que l'on ne puisse négliger les flexions secondaires, il faut procéder par approximations successives :
 - on considère d'abord la rigidité totale I pour obtenir les tassements différentiels ; il y correspond une répartition « p' » ;
 - ensuite, on prend seulement en considération la rigidité du système S_f/I_f pour calculer la répartition « p » des contraintes sous la fondation, en tenant compte des flexions secondaires.

La différence entre les deux répartitions fournit les forces correctives qui sont à répartir entre les deux systèmes, proportionnellement à leur inertie.

Dans certaines circonstances, les deux systèmes, soit séparément, soit simultanément, peuvent être discontinus (fig. 15 a, b, c). C'est alors la partie du système dans laquelle la continuité existe qui subit l'action entière des tassements différentiels.

Si la fondation est discontinue (fig. 15 b), on calcule en premier lieu le tassement des semelles et on calcule ensuite la superstructure, en tenant compte des tassements différentiels. On peut parfois réduire à zéro ces différences de tassement en modifiant les dimensions de certaines semelles, ce qui revient à agir sur les contraintes régnant à la base desdites semelles. Si la superstructure est discontinue (fig. 15 c), on recherche la répartition réelle des contraintes sous les poutres continues de fondation et, à partir de cette répartition, on calcule le système S_f .

Cas II

La grande rigidité de la superstructure ne lui permet pas de s'adapter aux déformations du sol. C'est cette rigidité qui va déterminer les tassements différentiels au droit des piliers. Entre les piliers, les déformations dans le système de fondation sont conditionnées à la fois par la compressibilité du sol et la rigidité I_f du système.

Dans la superstructure naissent les forces nécessaires pour imposer localement au sol des contraintes qui réduiront éventuellement à zéro les tassements différentiels.

Le calcul d'une telle construction s'effectue de la manière suivante :

1. Si la fondation est assez rigide, et si l'on peut négliger les flexions secondaires, on étudie la fondation comme une poutre rigide. Il y correspond une répartition « p' » (fig. 16 a).
2. Si l'on désire prendre en considération les flexions secondaires dans la fondation, il est nécessaire pour les charges données de calculer d'abord la répartition « p » (fig. 16 b), qui correspond à l'hypothèse où la rigidité de la superstructure est nulle. On en déduit des tassements différentiels. On recherche alors la répartition « p' » définie ci-dessus et qui correspond au cas où les tassements différentiels sont nuls.

La différence entre ces lignes de répartition donne les forces ΔP_1 et ΔP_2 , que l'on admet — sans commettre d'erreur importante, puisque le système S_f est suffisamment flexible — appliquées dans leur entièreté au système S_s .

Cas III

La rigidité de la superstructure S_s peut être négligée, car son action par rapport à la rigidité de la fondation S_f est très faible. Le système S_f détermine la manière dont s'affaisse le sol et, comme ce système est rigide, le sol s'affaisse également en tous ses points. La compressibilité du sol ne fait que déterminer la valeur de l'affaissement.

On mène alors les calculs de la manière suivante :

1. On calcule la ligne de répartition des contraintes sous le système S_f considéré comme poutre rigide.
2. On calcule le système S_f comme soumis aux réactions, dirigées de bas en haut, déterminées au premier stade et aux charges extérieures s'exerçant de haut en bas.

Cas IV

Les rigidités des deux systèmes étant très grandes et ayant à peu près la même valeur, on peut admettre que les tassements différentiels sont nuls. On recherche d'abord, par un calcul effectué de haut en bas, les efforts dans les piliers, dus aux charges de la superstructure. On recherche ensuite la répartition des contraintes sur le sol pour le système rigide S_f et on en déduit, par un calcul effectué de bas en haut, les réactions dans les piliers.

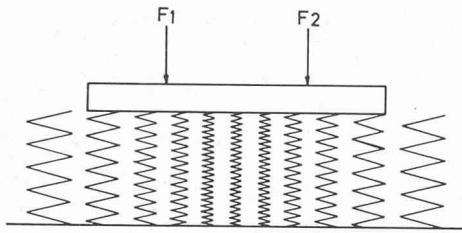


Fig. 18.

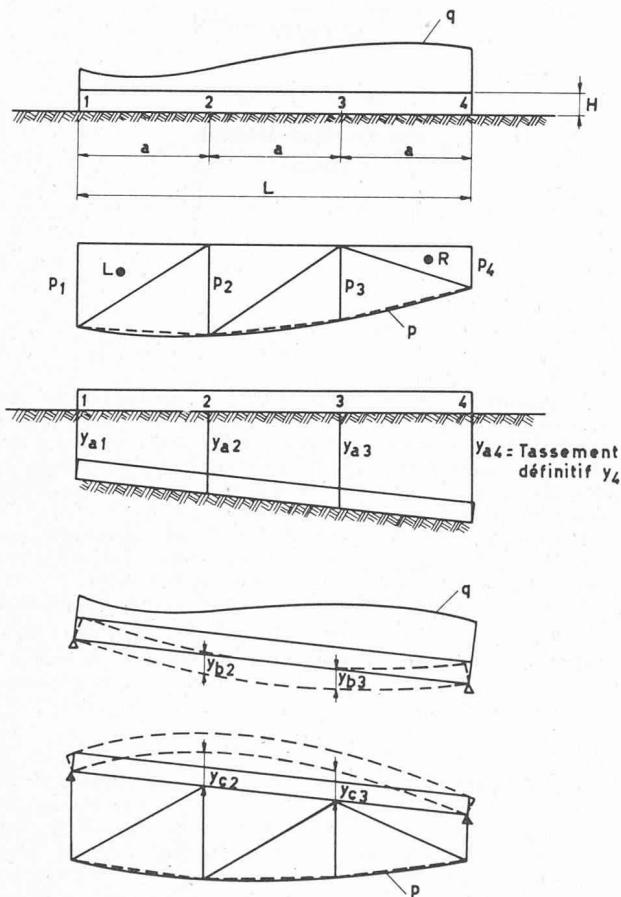


Fig. 18.

Les différences des réactions dans les piliers, obtenues par ces deux méthodes, représentent les forces complémentaires à répartir comme au cas I.

e) Conclusions

Des considérations précédentes et des calculs qui ont été effectués par le professeur Krsmanovitch, on peut tirer les deux conclusions principales suivantes :

1. Dans les ossatures qui sont continues soit dans leur fondation, soit dans leur superstructure, dont la raideur est constante et qui sont appuyées sur un sol dont le module de déformation est considéré comme constant, les rigidités des deux systèmes constitutifs jouent un rôle important dans l'évolution de la sollicitation de l'ossature.
2. Les moments parasites qui peuvent prendre naissance dans les systèmes S_f et S_s sont d'autant plus réduits que la rigidité de la fondation est moindre. Il faut donc s'efforcer de réduire au minimum acceptable la rigidité de la fondation.

12. Calculs avec coefficients de raideur variables

Dans ce qui précède, on a admis que le coefficient de raideur K du sol était constant. Lorsque l'on a affaire à des terrains hétérogènes, dont les déformations dépendent de la compressibilité relative de diverses couches, on ne peut plus admettre que le coefficient de raideur K est constant sur toute l'étendue de la fondation.

Le modèle correspondant (fig. 17) est alors constitué par une poutre reposant sur des ressorts de raideur variable. L'introduction de coefficients de raideur variables dans l'équation différentielle de la ligne élastique conduit à des difficultés mathématiques telles que le problème est insoluble au point de vue pratique.

Divers auteurs ont proposé des méthodes par intégrations successives.

La méthode la plus simple est celle qui a été indiquée par le Dr ingénieur Heinz Grasshoff (1951) de Bremen, en utilisant un procédé indiqué par Levinton (1947) qui est analogue à un calcul par différences finies.

On en trouve un résumé ci-dessous.

On considère (fig. 18) une poutre de longueur l et de largeur $b = 1$, chargée par une charge quelconque q et reposant sur un sol quelconque dont les réactions donnent lieu à des pressions p . Sous la charge, la poutre va tasser et on suppose que le tassement total se produit successivement de la façon suivante :

- la poutre tasse sans se déformer et seules ses extrémités occupent leurs positions définitives, après avoir tassé de y_1 et y_2 ;
- on considère ensuite, les extrémités étant supposées fixes, la poutre déformable sur deux appuis, soumise aux charges q et p et dont on calcule les déformées. Les tassements dus aux charges q portent l'indice b , ceux dus à la charge p l'indice c et ceux dus à la poutre indéformable l'indice a .

On divise la longueur l de la poutre en un nombre égal de parties a , par exemple trois, et on remplace la courbe des pressions p par un polygone. L'aire du polygone peut être considérée comme composée de triangles, soit six dans le cas considéré.

Le problème à résoudre consiste à calculer les quatre pressions p_1 , p_2 , p_3 et p_4 inconnues.

A cet effet, on dispose des équations suivantes : deux équations d'équilibre de rotation autour des points L et R , centres de gravité des triangles extrêmes des pressions et deux équations de déformation pour les points 2 et 3, soient :

$$\sum M_L = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_R = 0 \quad (2)$$

$$y_2 = y_{a2} + y_{b2} - y_{c2} \quad (3)$$

$$y_3 = y_{a3} + y_{b3} - y_{c3} \quad (4)$$

Le moment par rapport à L s'écrit :

$$M_L = \frac{p_2 a}{2} \cdot \frac{a}{3} - \frac{p_2 a}{2} a - \frac{p_3 a}{2} \cdot \frac{4}{3} a - \frac{p_3 a}{2} \cdot 2a - \frac{p_4 a}{2} \cdot \frac{7}{3} a = 0$$

ou

$$4p_2 + 10p_3 + 7p_4 = \frac{6 \cdot M_L}{a^2} \quad (5)$$

On trouve de même, pour le moment par rapport à R :

$$p_1 + 10p_2 + 4p_3 = - \frac{6 \cdot M_R}{a^2} \quad (6)$$

avec

M_L = moment statique dans le sens des aiguilles d'une montre autour de L , des charges extérieures q sollicitant la poutre ;

M_R = moment statique dans le sens des aiguilles d'une montre autour de R , des charges extérieures q sollicitant la poutre.

Les déformations y_{a2} et y_{a3} sont facilement exprimées en fonction de y et y_3 .
On a

$$y_{a2} = \frac{1}{3} y_4 + \frac{2}{3} y_1$$

et de même pour y_{a3} .

Les déformations y_{c2} et y_{c3} peuvent être exprimées en fonction de p_1 , p_2 , p_3 , p_4 en recherchant la déformée totale d'une poutre sur deux appuis sollicitée successivement par des charges triangulaires.

On trouve ainsi :

$$y_{c2} = \frac{p_1^4 a^4}{1080 EI} p_1 + \frac{429 a^4}{1080 EI} p_2 + \frac{390}{1080 EI} p_3 + \frac{77 a_4}{1080 EI} p_4$$

et de même pour y_{c3} .

On pose

$$N = \frac{1080 EI}{a_4}$$

avec E module d'élasticité de la poutre, et I son moment d'inertie.

Enfin, les déformations y_{b2} et y_{b3} dépendent uniquement de la charge extérieure q et se calculent en fonction de celle-ci.

On pose

$$y_1 = \frac{p_1}{K_1} \quad y_2 = \frac{p_2}{K_2} \quad y_3 = \frac{p_3}{K_3} \quad y_4 = \frac{p_4}{K_4}$$

K_1 , K_2 , K_3 et K_4 étant les coefficients de raideur aux points 1, 2, 3 et 4 et on remplace dans les équations (3) et (4) les valeurs des y en fonction des p .

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} (94 - \frac{2}{3} \frac{1}{R_1}) p_1 + (429 + \frac{1}{K_2} N) p_2 + 390 p_3 + \\ + (77 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{K_4} N) p_4 = N y_{b2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (77 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{K_1} N) p_1 + 390 p_2 + (429 + \frac{1}{K_3} N) p_3 + \\ + (94 - \frac{2}{3} \frac{1}{K_4} N) p_4 = N y_{b3} \end{aligned} \quad (8)$$

Les quatre équations linéaires (5) (6) (7) et (8) permettent de déterminer les quatre pressions p_1 , p_2 , p_3 et p_4 .

Si la charge q est symétrique, le nombre d'inconnues se réduit à deux et on obtient les deux équations :

$$p_1 + 2 p_2 = \frac{\Sigma P}{a}$$

$$\left(19 - \frac{N}{K_1}\right) p_1 + \left(91 + \frac{N}{K_2}\right) p_2 = N y_{b2}$$

$$\text{avec } N = \frac{120 EI}{a_4}$$

et ΣP = somme de toutes les forces symétriques sur la poutre.

Grasshoff a également effectué le calcul pour des subdivisions de la poutre en cinq et en sept parties égales. Au point de vue des applications à la pratique, la subdivision en trois parties égales est en général suffisante.

Pour appliquer la méthode, on doit connaître les coefficients de raideur K_1 , K_2 , K_3 , K_4 on peut déterminer ceux-ci en considérant une charge uniforme p_1 de la même longueur et largeur que la poutre et faire le calcul des tassements correspondants, c'est-à-dire des valeurs y_1 . Les valeurs des coefficients de raideur sont obtenues par la relation :

$$K = \frac{p_1}{y_1}.$$

Ces coefficients de raideur ne sont pas exacts, car on a supposé une répartition uniforme des pressions. A partir des coefficients de raideur approximatifs ainsi déterminés, on peut calculer la répartition des pressions p par la méthode indiquée et l'on peut recommencer un calcul de tassement à partir des pressions trouvées, ce qui donnera des coefficients de raideur plus exacts. On peut continuer ainsi de suite.

Grasshoff a développé une méthode de détermination des coefficients de raideur basée sur la répartition des pressions dans le sol et la détermination de la ligne d'influence du tassement d'un point de la surface du sol.

DIVERS

Postes à pourvoir

L'Organisation européenne de recherches spatiales met au concours les postes suivants d'assistants au directeur adjoint de la Division de contrôle et de stabilisation, à la Direction des recherches appliquées du Centre européen de technologie spatiale de Delft :

Chef de la section des systèmes de stabilisation par variation du moment angulaire (poste TH 57).

Chef de la section des composants mécaniques (poste TH 58).

Chef de la section des systèmes de stabilisation par jets de gaz (poste TH 56).

LES CONGRÈS

2^e symposium européen des agents inhibiteurs de la corrosion

Ferrare (Italie), 24-26 septembre 1965

Ce symposium, organisé par le Centre d'études de la corrosion Aldo Daccò de l'Institut de chimie de l'Université de Ferrare, est la 29^e manifestation de la Fédération européenne de la corrosion.

Renseignements et inscriptions (jusqu'au 15 juin 1965) : Secrétariat du symposium 2 SEIC, Istituto di Chimica, Università, Via Scandiana 25, Ferrara (Italie).

CARNET DES CONCOURS

Concours d'idées pour l'aménagement de la place du Marché à Montreux

Jugement

Le jury chargé d'examiner les projets présentés s'est réuni les 26 novembre, 1^{er} et 2 décembre 1964. Il a décerné les prix suivants :

1^{er} prix, 7000 fr., à MM. Gampert et Hacin, architectes SIA, à Genève.

¹ Communiqué du Secrétariat central.