Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 90 (1964)
Heft: 2: Autoroute Genève-Lausanne, fascicule no 3

Artikel: Autoroute et calcul électronique
Autor: Besson, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66960

90e année | Lausanne, 25 janvier 1964 | N° 2

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPF (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre, arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION
D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua, architecte
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 34.—	Etranger	Fr. 38.—
Sociétaires	»	» 28.—	»	» 34.—
Prix du numéro	»	» 1.60		

Chèques postaux : « Bulletin technique de la Suisse romande », N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à : Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES

1/1 page	Fr. 350.—
1/2 »	» 180.—
1/4 »	» 93.—
1/8 »	» 47.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales

AUTOROUTE GENÈVE - LAUSANNE [1]

AUTOROUTE ET CALCUL ÉLECTRONIQUE

par P. BESSON, mathématicien, chef du centre de calcul électronique des autoroutes vaudoises

La construction d'une autoroute est une des activités de la technique moderne où les méthodes de calcul électronique trouvent un champ d'application de plus en plus étendu. Ce développement constant reflète la nécessité de fournir des résultats numériques toujours plus nombreux, plus précis et plus rapides. Cette tendance n'est pas l'effet de la recherche d'un luxe de détails dont on pourrait se passer, mais résulte au contraire de la nécessité de produire des projets satisfaisant à des critères d'optimalisation du coût et de la durée de la construction. Or il est clair qu'une telle recherche de la solution optimum, qui relève des méthodes de la recherche opérationnelle (en particulier de la *simulation*), ne peut se concevoir sans l'évaluation d'une grande quantité de variables numériques pour un grand nombre de variantes possibles d'un même projet. Un tel travail ne peut raisonnablement se faire sans l'utilisation d'une machine à calculer électronique moderne, dont la caractéristique principale est précisément la possibilité de traiter un grand nombre de données dans un laps de temps très court. En fait, il existe sur le marché mondial des ordinateurs électroniques un grand nombre de machines dont les caractéristiques sont compatibles avec les exigences courantes en matière de calcul de routes. Il n'y a cependant aucune limitation dans l'usage de machines de plus en plus complexes et plus rapides ; en effet, dans quelques années les tâches requises de ces puissants instruments seront tellement importantes que seules conviendront les machines à grande capacité de mémoire et grandes vitesses de calcul, d'entrée et de sortie. Les petites machines actuellement utilisées trouveront une application très utile en qualité de chevaliers servants de ces grands monstres. Cette politique d'utilisation de l'électronique se trouve déjà remarquablement mise en pratique dans certains pays voisins de la Suisse [2].

[1] Voir en outre les *Bulletin technique* des 5 novembre 1960 et 28 décembre 1963. (*Réd.*).

[2] En France, la firme IBM exploite à Paris un important Centre de calcul doté d'une machine IBM 7094 utilisant plusieurs autres ordinateurs du type 1401 ou 1620 comme machines périphériques.

Le Centre de calcul du Bureau de construction des autoroutes vaudoises est équipé depuis le mois de septembre 1961 d'un ordinateur IBM 1620 dont la mémoire s'étend à 20 000 caractères et dont les unités périphériques d'entrée-sortie se composent d'une machine à écrire ordinaire, d'un perforateur et d'un lecteur de bandes papier. Les tâches confiées à cet ensemble électronique sont de natures très diverses. Au stade actuel, on peut considérer les cinq catégories suivantes :

a) Exploitation des mesures faites dans le terrain par les géomètres et calcul des coordonnées de nombreux points identifiés sur place.
b) Evaluation numérique détaillée des grandeurs fixées globalement par les projeteurs (situation, profil en long, dévers, profil-type, etc.).
c) Calcul des éléments numériques à remettre aux géomètres chargés de l'implantation de la route (éléments d'implantation).
d) Calculs géotechniques.
e) Analyses de plannings de construction.

L'analyse détaillée de chaque catégorie d'application ci-dessus sortirait largement du cadre de cet article. Nous nous bornerons donc à donner un aperçu des méthodes numériques mises en œuvre dans le *calcul de l'axe horizontal d'une route*. C'est en effet dans ce domaine que nos travaux ont été poussés le plus loin à ce jour et nous atteignons désormais le degré d'automatisme désiré pour permettre à chaque projeteur de concevoir rapidement un projet d'axe avec un minimum de calculs préliminaires. Cet automatisme est aussi la condition nécessaire à la mise en œuvre de programmes d'évaluation de quantités de remblais-déblais par notre Centre de calculs. Cette étape, qui sera franchie prochainement, exploitera largement les possibilités des restituteurs stéréographiques modernes et permettra une évaluation complètement automatique des quantités désirées (remblais-déblais, emprise, surfaces-murs, surfaces de revêtement, etc.), c'est-à-dire avec un matériel numérique de données complètement fourni par la machine électronique elle-même.

1. *Généralités*

L'axe d'une route est généralement constitué d'une succession d'arcs de cercles ou de segments de droites raccordés entre eux par des courbes de transition.

On entend par *calcul de l'axe horizontal d'une route* l'ensemble des opérations qui permettent de fournir une liste des coordonnées planes de divers points de cet axe (points à des distances données d'une origine fixée, intersections, etc.). Cet ensemble d'opérations dépend essentiellement des moyens techniques à disposition. Nous nous plaçons ici dans le cas de l'utilisation d'un ordinateur électronique du type scientifique usuel (IBM 1620, par exemple). Il en résulte une grande puissance quant aux moyens de calcul (rapidité, exactitude), mais inversement une grande complexité quant à l'élaboration des méthodes. L'usage de tables de fonctions n'est pas possible et toutes les opérations numériques doivent être conçues sous forme de combinaisons d'opérations arithmétiques élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division). Ajoutons encore que l'opération de division n'étant pas automatique (succession programmée d'additions, soustractions et multiplications) dans certaines machines, nous avons cherché à l'éviter dans la mesure du possible. L'objet de la suite de cet article est de mettre en évidence les méthodes numériques que nous avons développées pour le calcul d'axes de routes. Nous nous sommes efforcés de rendre les solutions rapides et économiques tout en conservant le maximum de généralité aux problèmes.

2. *Clothoïde*

Les arcs de cercle ou segments de droite d'un axe seront désignés désormais sous le nom d'*éléments principaux*. Le calcul de ces éléments n'offre aucune difficulté, cependant ils sont en général raccordés entre eux par des *courbes de transition*, dont la définition analytique n'a pas toujours été clairement fixée. On a entre autres utilisé jusqu'ici la parabole cubique et la lemniscate. Dans la technique routière moderne, il est désormais admis qu'une courbe de transition doit être un arc de clothoïde.

La *clothoïde* ou *spirale de Cornu* (intervenant aussi dans l'étude des phénomènes de diffraction en optique) est définie par l'équation intrinsèque

$$\rho \cdot s = p^2 \qquad (2.1)$$

où ρ = rayon de courbure, s = arc, p = constante = = *paramètre* de la clothoïde.

Cette équation (2.1) exprime le fait que la courbure de la clothoïde est proportionnelle à l'arc décrit.

Cherchons une solution de cette équation. On sait en effet que toutes les autres solutions s'en déduiront par déplacement plan accompagné éventuellement de retournement. Choisissons un système d'axes rectangulaires xOy quelconque et désignons par α l'angle de la tangente en un point de la clothoïde avec Ox. Comme, par définition, $\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$, l'équation intrinsèque (2.1) prend la forme différentielle $s\,ds = p^2\,d\alpha$. D'où, en intégrant,

$$\alpha = \frac{s^2}{2p^2} + \text{Cste.} \qquad (2.2)$$

Or $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$ et $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$. En remplaçant α par son expression (2.2) et en intégrant, il vient

$$\begin{cases} x = \int \cos\left(\frac{s^2}{2p^2} + \text{cste}\right) ds \\ y = \int \sin\left(\frac{s^2}{2p^2} + \text{cste}\right) ds. \end{cases}$$

Si on se fixe les conditions initiales $\alpha = x = y = 0$ pour $s = 0$, la solution générale précédente prend la forme particulière suivante :

$$\begin{cases} x = \int_0^s \cos\frac{u^2}{2p^2}\,du \\ y = \int_0^s \sin\frac{u^2}{2p^2}\,du. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Faisons le changement de variable $u = \sqrt{2}\,p\,v$, $du = \sqrt{2}\,p\,dv$.

Les relations (2.3) deviennent alors

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\,p \displaystyle\int_0^{\frac{s}{\sqrt{2}\,p}} \cos \varphi^2\, d\varphi \\ \\ y = \sqrt{2}\,p \displaystyle\int_0^{\frac{s}{\sqrt{2}\,p}} \sin \varphi^2\, d\varphi. \end{cases} \tag{2.4}$$

Posons $t = \sqrt{\alpha} = \dfrac{s}{\sqrt{2}\,p} = \dfrac{p}{\sqrt{2}\,\rho}$ et (2.5)

$$\begin{cases} J_1(t) = \displaystyle\int_0^t \cos u^2\, du \\ \\ J_2(t) = \displaystyle\int_0^t \sin u^2\, du. \end{cases}$$

Les relations (2.4) s'écrivent aussi

$$x = \sqrt{2}\,p\, J_1(t) = s \cdot \frac{1}{t}\, J_1(t),$$

$$y = \sqrt{2}\,p\, J_2(t) = s \cdot \frac{1}{t}\, J_2(t),$$

ou encore, finalement

$$\begin{cases} x = s\,\xi(t) \\ \\ y = s\,\eta(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \xi(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \cos u^2\, du \\ \\ \eta(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \sin u^2\, du. \end{cases} \tag{2.6}$$

La courbe définie par les équations paramétriques (2.6) est la *clothoïde de base* de paramètre p. Elle passe par l'origine des coordonnées et admet ce point comme centre de symétrie, elle y est de plus tangente à l'axe Ox et y présente un point d'inflexion (en vertu de la symétrie). Toutes les autres clothoïdes de même paramètre s'en déduisent par déplacement plan accompagné éventuellement de retournement (autour de l'axe Ox par exemple).

Dans la pratique, l'angle α ne dépasse jamais la valeur π, $t = \sqrt{\alpha}$ n'excède donc pas $\sqrt{\pi}$. En vertu de la symétrie de la courbe, on peut se limiter au cas $t > 0$. On constate donc que le calcul d'un point de la clothoïde revient à trouver une bonne méthode d'évaluation des fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$ pour l'intervalle $0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$. Ce sera l'objet du paragraphe 7.

3. *Centre de courbure*

Par définition, le centre de courbure est le centre du cercle osculateur à la courbe en un point. Lorsqu'on connaît des expressions de x, y, ρ et α, cette détermination du centre revient au calcul de l'extrémité d'un vecteur

$$\begin{cases} x_c = x - \rho \sin \alpha \\ y_c = y + \rho \cos \alpha. \end{cases}$$

Dans notre cas, $x = s\xi$, $y = s\eta$, $\rho = \dfrac{s}{2t^2}$ et $\alpha = t^2$; donc

$$\begin{cases} x_c = s\xi - \dfrac{s}{2t^2} \sin t^2 \\ \\ y_c = s\eta + \dfrac{s}{2t^2} \cos t^2. \end{cases}$$

Effectuons l'artifice de calcul qui consiste à ajouter à l'expression de y_c la quantité nulle $\rho - \dfrac{s}{2t^2}$. Il vient

$$\begin{cases} x_c = s\left(\xi - \dfrac{1}{2t^2} \sin t^2\right) \\ \\ y_c = \rho + s\left[\eta + \dfrac{1}{2t^2}(\cos t^2 - 1)\right]. \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} x_c = s\,\xi_c(t) \\ y_c = \rho + s\,\eta_c(t) \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \xi_c(t) = \xi(t) - \dfrac{1}{2t^2} \sin t^2 \\ \\ \eta_c(t) = \eta(t) + \dfrac{1}{2t^2}(\cos t^2 - 1). \end{cases} \tag{3.1}$$

Le calcul des coordonnées du centre de courbure se ramène donc au calcul des fonctions $\xi_c(t)$ et $\eta_c(t)$ pour l'intervalle $0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$. Nous verrons au paragraphe 7 comment nous avons procédé.

4. *Relations différentielles entre les fonctions* ξ, η, ξ_c, η_c.

Les fonctions ξ, η, ξ_c, η_c n'ont pas été introduites au hasard ; en réalité elles satisfont à des relations différentielles remarquables qui trouveront une application au paragraphe suivant.

Il résulte immédiatement de la définition des fonctions ξ et η (relations 2.6) que

$$\begin{cases} (t\xi)' = \cos t^2 \\ (t\eta)' = \sin t^2. \end{cases} \tag{4.1}$$

De même

$$\begin{cases} (t\xi_c)' = (t\xi)' - \left(\dfrac{\sin t^2}{2t}\right)' = \cos t^2 + \dfrac{\sin t^2}{2t^2} - \cos t^2 = \dfrac{\sin t^2}{2t^2} \\ \\ (t\eta_c)' = (t\eta)' + \left(\dfrac{\cos t^2 - 1}{2t}\right)' = \sin t^2 - \dfrac{\cos t^2 - 1}{2t^2} - \sin t^2 = \dfrac{1 - \cos t^2}{2\,t^2}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Enfin

$$\begin{cases} (t^2\xi_c)' = t(t\xi_c)' + t\,\xi_c = \dfrac{\sin t^2}{2t} + t\xi - \dfrac{\sin t^2}{2t} = t\xi \\ \\ (t^2\eta_c)' = t(t\,\eta_c)' + t\,\eta_c = \dfrac{1 - \cos t^2}{2t} + t\eta + \dfrac{\cos t^2 - 1}{2t} = t\,\eta. \end{cases} \tag{4.3}$$

Ces relations importantes seront utilisées dans les paragraphes suivants.

5. *Raccordement de deux éléments principaux donnés*

Etant donnés deux éléments principaux (cercle ou droite) bien définis, il n'existe qu'une seule clothoïde les raccordant. Dans ce paragraphe, nous indiquons une méthode itérative de détermination du paramètre de cette clothoïde. Nous nous sommes efforcés de limiter au maximum le nombre d'itérations conduisant au résultat tout en rendant minimum le nombre d'opérations arithmétiques effectuées dans chaque itération.

a) *Cas cercle-cercle*

Dans le cas où deux cercles doivent être raccordés par une clothoïde, la donnée du problème est constituée par la distance des centres D, le rayon du premier cercle R_1 et le rayon du second cercle R_2. Ces rayons sont donnés avec un signe indiquant dans quel sens de rotation le cheminement a lieu sur les cercles (signe + = rotation dans le sens trigonométrique positif ; signe — = rotation en sens contraire). Moyennant cette convention, on démontre que les relations développées ci-dessous sont valables aussi bien pour les raccordements du type en S (rayons de signes opposés) que ceux du type en ovale (rayons de même signe). Soit p le paramètre de la clothoïde raccordant les deux cercles.

Posons $t_1 = \dfrac{p}{\sqrt{2}\,R_1}$ et $t_2 = \dfrac{p}{\sqrt{2}\,R_2}$. Le paramètre p doit satisfaire à l'équation

$$f(p) \equiv \sqrt{[x_c(t_2) - x_c(t_1)]^2 + [y_c(t_2) - y_c(t_1)]^2} - D = 0.$$

Les fonctions x_c et y_c étant transcendantes, il serait vain de chercher une solution de cette équation par des méthodes algébriques. Nous avons donc cherché un procédé itératif. Dans ce problème, la méthode de Newton-Raphson fournit de bons résultats tout en restant d'application relativement simple.

Rappelons le principe de cette méthode. Soit une fonction $f(x)$ continue et dérivable deux fois en x ; on se propose de trouver la valeur de x rendant nulle cette fonction. Etant donnée une valeur approchée x_n de la solution, on démontre que la quantité $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est une nouvelle approximation de la solution meilleure que x_n, d'où un procédé de récurrence.

Dans notre cas, la difficulté réside dans l'évaluation de la dérivée de la fonction $f(p)$ par rapport à p. Il importe de connaître d'abord les dérivées de $x_c(t_1)$, $x_c(t_2)$, $y_c(t_1)$, $y_c(t_2)$ par rapport à p. Posons $t = \dfrac{p}{\sqrt{2}\,R}$ (pour $R = R_1$, $t \equiv t_1$ et pour $R = R_2$, $t \equiv t_2$) ; alors

$$\begin{cases} x_c(t) = s\,\xi_c(t) = 2\,R\,t^2\,\xi_c(t) ; \\ y_c(t) = R + s\,\eta_c(t) = R + 2\,R\,t^2\,\eta_c(t), \end{cases}$$

et, en vertu des relations 4.3

$$\begin{cases} \dfrac{dx_c}{dp} = \dfrac{dx_c}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dp} = 2\,R\,(t^2\xi_c)' \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}\,R} = \sqrt{2}\,t\,\xi(t) = \dfrac{x}{p} \\ \dfrac{dy_c}{dp} = \dfrac{dy_c}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dp} = 2\,R\,(t^2\eta_c)' \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}\,R} = \sqrt{2}\,t\,\eta(t) = \dfrac{y}{p}. \end{cases}$$

Dès lors la dérivée de $f(p)$ est facile à calculer et nous trouvons l'expression suivante :

$$f'(p) = \frac{(x_{c_2} - x_{c_1})(x_2 - x_1) + (y_{c_2} - y_{c_1})(y_2 - y_1)}{p\sqrt{(x_{c_2} - x_{c_1})^2 + (y_{c_2} - y_{c_1})^2}}.$$

Ces résultats nous ont conduits à introduire le procédé de calcul suivant :

1) Détermination d'une valeur approchée de la solution p (voir paragraphe 6).
2) Calcul des fonctions x_1, y_1, x_{c_1}, y_{c_1} $\left(s_1 = \dfrac{p^2}{R_1}\right)$.
3) Calcul des fonctions x_2, y_2, x_{c_2}, y_{c_2} $\left(s_2 = \dfrac{p^2}{R_2}\right)$.
4) $a_1 = x_2 - x_1$;
   $a_2 = y_2 - y_1$;
   $a_3 = x_{c_2} - x_{c_1}$;
   $a_4 = y_{c_2} - y_{c_1}$;
   $a_5 = \sqrt{a_3^2 + a_4^2}$
   $a_6 = a_5 - D$.
5) Si $|a_6|$ est plus petit qu'une limite supérieure fixée (par exemple 0,5 mm), la valeur p du paramètre est considérée comme suffisante.
6) Dans le cas contraire, p est remplacé par
   $$p - \frac{p\,a_5 a_6}{a_3 a_1 + a_4 a_2}.$$
7) Retour à 2).

Les opérations arithmétiques du cycle 2) à 7) ci-dessus se composent du calcul de huit fonctions transcendantes, d'une racine carrée, de huit additions ou soustractions, de six multiplications et d'une division. La durée de ce cycle n'excède pas 2 secondes sur notre ordinateur ; on peut donc considérer cette méthode comme très satisfaisante et facile à programmer.

b) *Cas droite-cercle*

Dans ce cas, la donnée du problème est constituée par la distance D du centre du cercle à la droite et le rayon R du cercle. L'équation en p est alors $f(p) = |y_c| - D = 0$.

Ou, en posant $\varepsilon = 1$ si $y_c \geqq 0$ et $\varepsilon = -1$ si $y_c < 0$, $f(p) = \varepsilon y_c - D = 0$ et $f'(p) = \dfrac{\varepsilon\,y}{p}$. Le procédé de calcul est alors très simple :

1) Détermination d'une valeur approchée de la solution p (voir paragraphe 6).
2) Calcul des fonctions y, y_c, ε $\left(s = \dfrac{p^2}{R}\right)$.
3) $a_1 = \varepsilon\,y_c - D$.
4) Si $|a_1|$ est plus petit qu'une limite supérieure fixée (par exemple 0,5 mm), la valeur p du paramètre est considérée comme suffisante.
5) Dans le cas contraire, p est remplacé par
   $$p\left(1 - \frac{a_1}{\varepsilon\,y}\right)$$
6) Retour à 2).

6. *Détermination d'une solution approximative au problème précédent*

Dans le paragraphe 5, nous avons développé une méthode rapide d'amélioration du paramètre, sans indiquer cependant comment déterminer la valeur initiale de ce dernier. Nous nous contenterons d'indiquer sans démonstration un procédé de calcul qui fournit une excellente première approximation.

a) *Cas cercle-cercle*

$a_1 = R_2 - R_1$

$a_2 = R_2 + R_1$

$a_3 = R_2^2 \,.\, R_1^2$

$a_4 = \dfrac{a_1^2}{a_2}$

b) *Cas droite-cercle*

$a_1 = D - |\,R\,|$

$$p = \sqrt{4\sqrt{3}\,R^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a_1}{2R - a_1}}}$$

$$p = \sqrt{\left| \frac{4\sqrt{3}\;a_3}{a_1\,a_2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(a_1 + D)\,(a_1 - D)}{(D - a_4)\,(D + a_4)}} \right|}$$

Ces relations, appliquées en conjugaison avec celles du paragraphe 5, nous ont permis d'établir une sous-routine de calcul du paramètre pour notre ordinateur IBM 1620, dont le temps de fonctionnement est en général de l'ordre de 8 secondes et qui occupe environ 2500 caractères de la mémoire.

7. *Calcul des fonctions transcendantes* ξ, η, ξ_c et η_c

Les divers développements analytiques des paragraphes précédents nous ont conduits à prendre en considération les fonctions transcendantes ξ, η, ξ_c et η_c. On démontre que ces quatre fonctions sont continues et dérivables dans l'intervalle $-\infty, +\infty$. Nous avons vu cependant que dans la pratique du calcul de routes on se limite à l'intervalle $0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$. Comme ces fonctions sont d'un usage courant, il était nécessaire de mettre au point une méthode de calcul très rapide. Nous avons fixé notre choix sur des approximations de type polynomial (en raison de la lenteur de la division), c'est-à-dire de la forme

$$f(t) = a_0\,t^n + a_1\,t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,t + a_n\,.$$

Le développement des fonctions ξ, η, ξ_c et η_c en série de Taylor autour de 0 nous a fourni provisoirement une réponse à notre problème. Les séries obtenues étant alternées, nous avons la garantie que l'erreur commise en supprimant les termes de degré élevé n'excède pas la valeur absolue du premier terme négligé. Nous obtenons à ce jour d'excellents résultats en ne retenant que les huit premiers termes de chaque développement. Par exemple, l'expression retenue pour η_c est

$$\eta_c = t^2(a_0 + a_1 t^4 + a_2 t^8 + a_3 t^{12} + a_4 t^{16} + a_5 t^{20} + a_6 t^{24} + a_7 t^{28})$$

avec

$a_0 = 8.3333333 \,.\, 10^{-2}$

$a_1 = -2.9761905 \,.\, 10^{-3}$

$a_2 = 6.3131313 \,.\, 10^{-5}$

$a_3 = -8.2671958 \,.\, 10^{-7}$

$a_4 = 7.2519261 \,.\, 10^{-9}$

$a_5 = -4.5384254 \,.\, 10^{-11}$

$a_6 = 2.1242121 \,.\, 10^{-13}$

$a_7 = -7.7088344 \,.\, 10^{-16}$

En fait, cette solution — d'ailleurs très satisfaisante — s'avère être une solution de première urgence. On n'ignore pas que la série de Taylor tronquée fournit une approximation excellente au voisinage de l'origine mais que la précision se détériore rapidement lorsqu'on s'écarte de celle-ci ; l'erreur est en quelque sorte mal répartie. En fait il existe des approximations polynomiales de degré moindre que celles adoptées jusqu'ici dont l'erreur globale n'est cependant pas plus grande. Ce sont les approximations polynomiales de norme minimum au sens de Chebyschev. C'est dans le but de remplacer prochainement les fonctions adoptées par de meilleures que nous avons déjà calculé les dix-neuf premiers coefficients des développements de Taylor de nos quatre fonctions avec une précision de trente chiffres significatifs. Un calcul de relaxation sur ces coefficients qui sera confié à la machine électronique elle-même nous fournira la solution définitive de ces approximations. Ainsi nous espérons gagner encore 10 à 20 % du temps actuellement nécessaire au calcul sans perdre la précision déjà obtenue.

UTILISATION DE MACHINES ÉLECTRONIQUES POUR CALCULER LA STABILITÉ DES TALUS

par I. KARAKAS, ing. dipl. SIA - ASCE, chef de la Section des essais

I. Introduction

Les caractéristiques des routes modernes nécessitent souvent l'exécution de talus très hauts sur des terrains inclinés et pour les remblais d'accès à des ouvrages d'art par-dessus des routes, des voies ferrées, etc. D'autre part, l'ingénieur est souvent dans l'obligation de construire la route sur des sols de fondation de très mauvaise qualité et parfois même sur des marais. Dans une masse de terre, quand l'effort de cisaillement dépasse la résistance à celui-ci, une rupture ou glissement se produit le long d'une surface. Le coefficient de sécurité à la rupture d'un talus est fonction de l'inclinaison, de la hauteur du talus et des caractéristiques géotechniques des couches de sols dont le talus est formé.

A proximité du niveau du terrain naturel, les caractéristiques déterminant la résistance au cisaillement peuvent facilement varier selon la saison. Certains sols gonflent pendant la saison pluviale, aussi leur résistance au cisaillement est beaucoup plus faible que la résistance correspondante en saison sèche. La résistance des sols après le dégel est également très inférieure à celle existant en saison sèche. Le niveau de la nappe phréatique dans les sols est aussi fonction des saisons. Les niveaux maxima et minima jouent un grand rôle dans la détermination théorique des talus stables. Il est évident que les caractéristiques qui doivent être prises en considération dans un calcul de stabilité sont celles qui correspondent à l'état le plus défavorable. A tous ces facteurs qui compliquent déjà considérablement l'analyse de la stabilité s'ajoute encore la variation des caractéristiques géotechniques en profondeur. Un sol homogène sur toute la hauteur d'un talus et en profondeur est très rare ; l'ingénieur doit donc tenir compte des variations de couches très différentes.