

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 89 (1963)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Calcul des sollicitations d'un barrage-voûte dans la zone d'encastrement des arcs  
**Autor:** Rescher, Othmar-J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66292>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

## ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes  
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)  
de la Section genevoise de la S.I.A.  
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique  
de l'Université de Lausanne)  
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole  
polytechnique fédérale de Zurich)

## COMITÉ DE PATRONAGE

Président: † J. Calame, ing. à Genève  
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne  
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève

## Membres:

Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.  
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Groscurin, arch.; E. Martin, arch.  
J.-C. Ott, ing.  
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.  
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.  
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;  
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

## CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »

Président: D. Bonnard, ing.  
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre,  
arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.  
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

## RÉDACTION

D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua,  
architecte  
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »  
Tirés à part, renseignements  
Avenue de Cour 27, Lausanne

## ABONNEMENTS

1 an . . . . .	Suisse Fr. 34.—	Etranger Fr. 38.—
Sociétaires . . . . .	» » 28.—	» » 34.—
Prix du numéro . . . . .	» » 1.60	

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,  
N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au  
numéro, changements d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie  
La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

## ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page . . . . .	Fr. 350.—
1/2 » . . . . .	» 180.—
1/4 » . . . . .	» 93.—
1/8 » . . . . .	» 46.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.

Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales



## SOMMAIRE

Calcul des sollicitations d'un barrage-voûte dans la zone d'encastrement des arcs, par O.-J. Rescher, Dr ès sc. techn.  
Divers: Note sur les canaux de forme géométrique et le profil cycloïdal fermé, par L.-A. de Dardel, ingénieur dipl. EPZ.  
Bibliographie. — Les congrès. — Carnet des concours. — Documentation générale. — Nouveautés, informations diverses.

## CALCUL DES SOLLICITATIONS D'UN BARRAGE-VOÛTE DANS LA ZONE D'ENCASTREMENT DES ARCS

par O.-J. RESCHER, Dr ès sc. techn., chargé de cours à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

### I. Introduction

Le calcul d'un barrage-voûte encastré dans un massif rocheux constitue un problème tri-dimensionnel dont l'analyse exacte rencontre de grandes difficultés. Aussi se contente-t-on le plus souvent de l'approximation consistant à ajuster les déformations d'un double système d'arcs horizontaux et de murs verticaux en leurs points d'intersection (méthode arcs-murs). Cet ajustement permet de déterminer avec une précision suffisante la répartition des charges extérieures (poussée de l'eau, en particulier), entre ces deux systèmes d'éléments porteurs.

Les contraintes dans les arcs et dans les murs se calculent généralement selon la théorie classique de Navier; mais la précision du calcul, en particulier dans la zone voisine de l'encastrement, ne peut être bien définie tant qu'une solution rigoureuse n'est pas donnée à ce problème. En outre, la théorie de Navier ne permet pas de déterminer la répartition des contraintes dans le massif rocheux d'appui.

Nous présentons ici une méthode de calcul des contraintes dans les arcs à l'aide de la théorie de l'élasticité. Cette méthode, également applicable aux murs, a été établie lors de l'étude du barrage de Mauvoisin (Valais, Suisse; barrage-voûte 237 m de haut), au bureau du professeur A. Stucky, à Lausanne. Les résultats obtenus, vérifiés au moyen d'essais photoélastiques, ont permis de réaliser d'importantes économies d'excavations et de béton.

Ces dernières années, plusieurs auteurs ont essayé de déterminer la répartition des contraintes dans un arc élastiquement encastré soumis à une charge constante ou variable, soit par le calcul [5], soit par l'expérience [11]. Sauf erreur, la première analyse mathématique de l'arc encastré à l'aide de la théorie de l'élasticité a été établie par Hofacker [11]; son étude (arcs circulaires encastrés et d'épaisseurs différentes, soumis à une poussée hydrostatique constante ou variable) visait essentiellement à déterminer la répartition des contraintes à l'intérieur de l'arc. En raison des hypothèses simpli-

ficatrices admises pour la région de l'encastrement (auxquelles l'auteur a été amené pour faciliter la mise en équations du problème) les résultats obtenus ne sont pas applicables dans cette partie de l'arc et du massif rocheux.

Pour combler cette lacune, ce qui représente un grand intérêt pratique, notre étude s'attache plus spécialement à déterminer la distribution des contraintes dans la partie de l'arc formant la retombée et dans le massif d'appui. La méthode du calcul développée est fondée sur un travail de Zienkiewicz [13].

## II. Exposé du problème

La recherche d'une orientation de l'appui des arcs normale à leur fibre moyenne, amène l'ingénieur à prévoir des excavations importantes et à remplacer le bon rocher par du béton. Pour pallier cet inconvénient, les encastresments du barrage, en particulier ceux des arcs inférieurs relativement épais, ne sont pas réalisés par une section radiale plane unique s'étendant sur l'épaisseur totale de l'arc, mais au moyen de gradins dont les faces sont approximativement normales à la fibre moyenne de l'arc (fig. 1). Ainsi, la naissance théorique des arcs est définie d'une manière incertaine, et la transmission des efforts au rocher de fondation se répartit sur une zone assez longue, de sorte que l'arc est déjà appuyé sur le rocher à l'amont, alors qu'il se prolonge encore à l'aval.

Pour déterminer les efforts intérieurs d'un arc circulaire encastré selon les méthodes conventionnelles de la statique, on admet que l'encastrement est réalisé par une section radiale théorique qui remplace la section d'encastrement oblique réelle. C'est la valeur de l'angle au centre ainsi défini qui est introduite dans le calcul de l'arc.

Cette simplification en implique une autre. En effet, la pression de l'eau ne s'exerce sur le parement amont de l'arc réel que jusqu'au point F (fig. 1) ; au-delà elle est théoriquement nulle. Même en admettant que l'eau d'infiltration dans la masse rocheuse exerce sur la partie encastrée de l'arc une certaine pression, celle-ci sera certainement inférieure à la pression hydrostatique s'exerçant au niveau considéré.

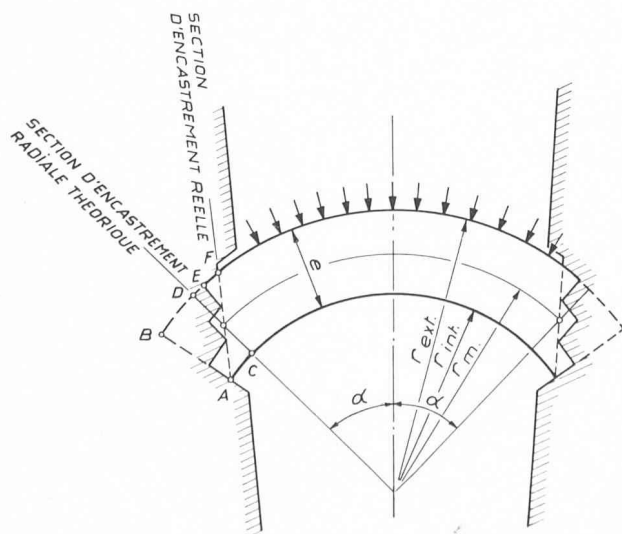


Fig. 1. — Coupe horizontale schématique d'un barrage-voûte — arc circulaire.

En supposant la section de naissance confondue avec le segment  $CD$ , on obtient un arc plus raide que celui qui est encastré selon la section réelle  $AF$ . Ce raidissement est pratiquement compensé par la surcharge appliquée sur le parement amont, entre les points  $F$  et  $D$ .

L'expérience a montré que les efforts intérieurs dans l'arc ne sont que très peu influencés par ces simplifications, cela aussi bien pour les arcs supérieurs (relativement minces) que pour les arcs inférieurs (relativement épais). De ce fait, il est possible de déterminer la résultante des contraintes sur chaque section d'un arc, encastré dans un massif rigide ou déformable, à l'aide des méthodes de la statique.

Les contraintes normales sur toutes les sections de l'arc se calculent généralement selon la règle du trapèze (hypothèse de Navier). Comme la thèse de Hofacker le montre, pour des arcs circulaires minces à forte courbure, caractérisés par un élanement (épaisseur relative par rapport au rayon moyen)  $\lambda = \frac{r_m}{e} \geq 10$ , les diagrammes des contraintes normales déterminés à l'aide de la théorie de l'élasticité ne sont pas très différents des diagrammes trapézoïdaux dans la partie centrale de l'arc. Pour des arcs épais, élanement  $\lambda < 10$ , les différences deviennent plus grandes.

Les méthodes de la résistance des matériaux ne permettent pas le calcul précis des contraintes normales radiales et des contraintes tangentielles. Toutefois, elles conduisent à des résultats acceptables dans toute la partie de l'arc non influencée par l'encastrement.

La présente note qui, comme on l'a vu, traite de la distribution des contraintes à la retombée de l'arc et dans le massif d'appui, est limitée à l'étude de la moitié de l'arc. Les efforts en chaque section de l'arc sont assimilables à une résultante unique dont l'intensité, la position et la direction se déterminent par les méthodes conventionnelles de la statique.

Selon la théorie de l'élasticité, le calcul de l'arc soumis à une pression uniforme ou variable, compte tenu de l'encastrement et de l'obliquité de l'assise (compatibilité des déformations de l'arc et de la masse d'appui du rocher), constitue un problème aux limites. Ce problème ne pouvant pas être résolu par voie analytique, nous l'avons abordé par une méthode utilisant les différences finies.

En résumé, l'objet de cette publication est d'établir à l'aide de la théorie de l'élasticité une méthode de calcul des contraintes dans un arc élastique encastré obliquement dans un massif rocheux, de comparer les résultats obtenus à ceux du calcul classique et de montrer que la transmission des efforts d'un arc avec encastrement oblique s'effectue dans de bonnes conditions. Les résultats découlant d'un tel calcul ont été vérifiés par des essais sur modèle photoélastique.

## III. Bases de calcul

### Hypothèses

Nous admettons que le domaine formé par la moitié de l'arc et sa fondation constitue un milieu élastique, isotrope et homogène, et nous négligeons l'obliquité des flancs de la vallée par rapport au plan vertical. Ces hypothèses ne correspondent qu'approximativement à la réalité. Le béton, comme on le sait, ne satisfait

pas à la loi de Hook (contraintes et déformations ne sont pas proportionnelles), il est sujet au fluage, son module d'élasticité n'est pas constant et dépend des conditions hygroscopiques. Pour pouvoir évaluer l'état de contrainte dans la masse rocheuse, il est indispensable d'assimiler celle-ci à un solide élastique et isotrope et d'admettre en profondeur un état de contrainte découlant de la théorie de Boussinesq. Nous négligeons ainsi l'effet de la stratification, d'une éventuelle fissuration du rocher et nous supposons que le module d'élasticité est le même en surface qu'en profondeur. En outre, nous admettons que les propriétés physico-mécaniques de la masse rocheuse sont les mêmes que celles du béton du barrage.

Ces facteurs modifient certainement la distribution des contraintes calculées selon la théorie de l'élasticité. Toutefois les essais sur modèle réduit confirment que les contraintes ainsi calculées se rapprochent davantage de la réalité que celles déterminées au moyen des règles classiques de la résistance des matériaux. Il est difficile de savoir dans quelle mesure cette conclusion est valable pour l'ouvrage réel : seuls de nombreux essais sur des ouvrages exécutés permettront de trancher la question.

#### Cas de charge considéré

Les contraintes dans un arc de barrage-voûte sont essentiellement dues à la poussée de l'eau s'exerçant sur le parement amont. Suivant le nombre des murs verticaux choisis pour le calcul de l'ajustement des déformations, cette pression est constante ou variable. D'autres effets, généralement secondaires, provoquent également des contraintes : ce sont la pression de l'eau sur les versants de la vallée, le retrait et le fluage du béton, les variations de température, la pression de l'eau dans les pores, etc. Il est pratique de calculer l'état de contrainte pour chaque effet séparément et de composer ensuite les contraintes correspondant aux différents cas par superposition.

Dans cette étude, nous nous bornons au calcul d'un arc d'épaisseur variable, soumis à une pression uniforme.

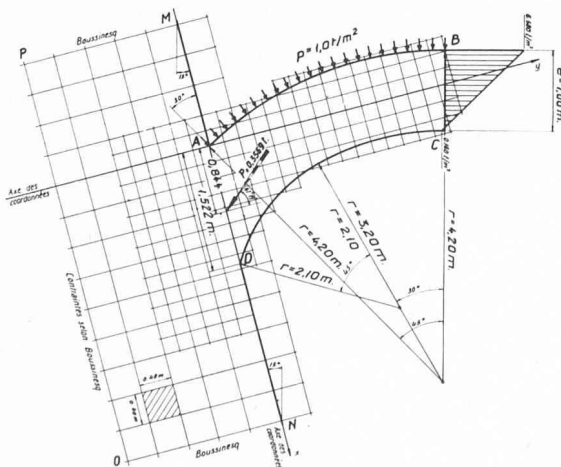


Fig. 2. — Dimensions générales du domaine arc-fondation étudié. Définition du réseau remplaçant le continuum et charges appliquées.

	Largeur à la clé	Épaisseur
Arc idéalisé . . . . .	1,00 m.	0,1 m.
Arc réel . . . . .	35,80 m.	1,0 m.
(Arc 1830 du barrage de Mauvoisin)		

#### Profil étudié

Nous avons étudié la moitié droite d'un arc particulièrement sollicité du barrage de Mauvoisin, situé dans la zone du tiers inférieur du barrage, au niveau 1830 ; la figure 2 en définit la forme. Pour le calcul, un changement d'échelle des longueurs a été effectué, ramenant l'épaisseur de l'arc à la clé de 35,80 m à 1,00 m et sa hauteur de 1,00 m à 0,1 m ; la pression uniforme sur le parement amont de l'arc a été admise de 1 t/m<sup>2</sup>. Les contraintes réelles se déduisent des contraintes ainsi calculées en multipliant ces dernières par la pression réelle supportée par l'arc. Le calcul du barrage selon la méthode arcs-murs, a donné pour la part de la pression supportée par cet arc la valeur de 114 t/m<sup>2</sup> (ajustement des déformations radiales au droit du seul mur central).

#### IV. Méthode de calcul

##### Exposé du problème

Il s'agit de déterminer l'état de contrainte bidimensionnel du solide élastique constitué par la moitié de l'arc et son massif de fondation sur une épaisseur (profondeur) égale à environ 1,5 fois l'épaisseur de l'arc. Ce demi-arc est sollicité, sur son extrados, par la pression radiale uniforme de l'eau et, sur sa section de clé, par des contraintes normales réparties suivant un diagramme trapézoïdal, équivalentes aux efforts intérieurs agissant sur cette section (effort normal et moment fléchissant), tels qu'ils découlent du calcul classique de l'arc encastré.

Le massif de fondation est théoriquement infini. Nous le limitons à la zone où les perturbations provenant de l'encastrement de l'arc cessent pratiquement de se faire sentir. D'après le principe de Saint-Venant, les contraintes à la périphérie de ce massif de fondation dépendent essentiellement de la valeur de la réaction de l'arc et de sa direction, et non de la répartition locale des contraintes dans la zone de contact de l'arc avec le rocher ; à la distance du bord égale à environ 1,5 fois l'épaisseur de l'arc, tout se passe déjà comme si les contraintes étaient distribuées dans le massif de fondation suivant les équations établies par Boussinesq pour un demi-espace d'un solide homogène et isotrope, en appliquant une force concentrée  $P$ , équivalente à la réaction de l'arc sur la section située au droit de la ligne de contact (fig. 4). Ce mode de faire représente évidemment une approximation, mais on peut obtenir une précision aussi grande que l'on veut en délimitant le massif par une frontière suffisamment éloignée de la ligne de contact.

##### Fonction de contrainte (fonction d'Airy)

Comme on le sait, la distribution des contraintes dans un domaine élastique bidimensionnel est défini par une fonction de contrainte (fonction d'Airy). Celle-ci doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre du disque (solide plat d'épaisseur uniforme chargé dans son plan) qui prend, dans un système de coordonnées cartésiennes, la forme suivante [4, 12] :

$$\nabla^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

En raison de l'absence de forces massiques les trois contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  sont définies par les équations suivantes aux dérivées secondes de la fonction bi-harmonique  $F(x,y)$  :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2)$$

Conditions au contour

Un disque est généralement sollicité par des charges appliquées sur son pourtour, quelquefois aussi par des forces agissant à l'intérieur de ce dernier et par des forces massiques (p. ex. poids propre) figure 3.

En chaque point du contour d'un disque sollicité par des forces agissant dans son plan, l'équilibre entre forces extérieures et intérieures permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{e} X \cdot ds &= +\sigma_x dy - \tau_{xy} dx \\ \frac{1}{e} Y \cdot ds &= -\sigma_y dx + \tau_{xy} dy\end{aligned}\quad (3)$$

où  $X$ ,  $Y$  composantes des charges appliquées au contour par unité de longueur  
 $e$  épaisseur uniforme du disque.

L'introduction des valeurs des contraintes (2) dans les équations (3) et l'intégration membre à membre de ces dernières sur la longueur  $s$  du contour donnent :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_B - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A &= +\frac{1}{e} \int_A^B X \cdot ds \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A &= -\frac{1}{e} \int_A^B Y \cdot ds\end{aligned}\quad (4)$$

Pour des disques simplement connexes, les termes constants  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A$  et  $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A$  peuvent être supprimés, car ils sont sans influence sur la courbure de la surface représentant la fonction de contrainte  $F(x,y)$  et, de ce fait, sur le calcul des contraintes.

Les intégrales du deuxième membre des équations (4) représentent les composantes de l'effort tranchant  $T$  au point  $B$ , d'où :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A &= -\frac{1}{e} \int_A^B Y \cdot ds = -\frac{1}{e} \cdot T_y \\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_B - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A &= +\frac{1}{e} \int_A^B X \cdot ds = +\frac{1}{e} \cdot T_x\end{aligned}\quad (5)$$

Ces équations permettent de déterminer les valeurs  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$  le long du contour ; en outre elles montrent que ces termes restent constants sur la longueur des tronçons non chargés du contour.

Pour pouvoir calculer la variation de la fonction

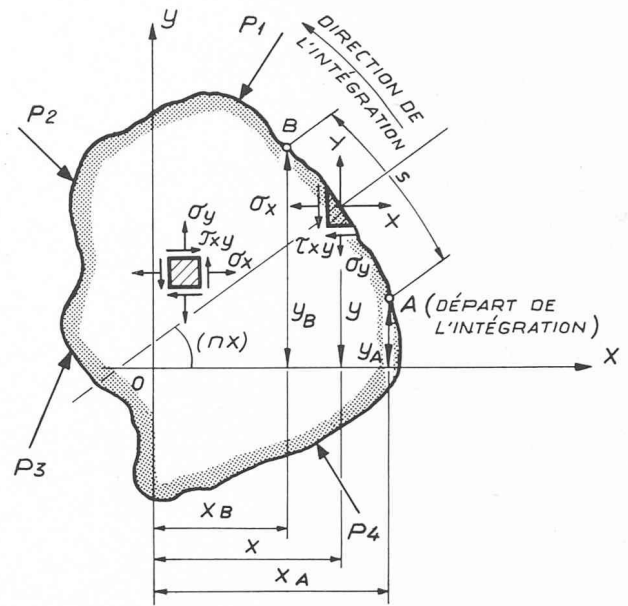


Fig. 3.

$F(x,y)$  entre A et B nous introduisons dans la différentielle

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

les expressions des dérivées partielles de  $F$ . Après intégration sur la longueur  $s$  du contour et simplifications, il vient :

$$F_B - F_A = \frac{1}{e} \left\{ \int_A^B X(y_B - y) ds + \int_A^B Y(x - x_B) ds \right\} = \frac{M_B}{e} \quad (6)$$

où  $M_B$  représente le moment des charges appliquées sur la longueur  $s$  par rapport au point  $B$  ; ce montant est positif dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le terme constant  $F_A$  de l'origine peut être choisi nul.

Un problème d'élasticité plane est résolu si l'on arrive à déterminer la fonction  $F(x,y)$  satisfaisant l'équation (1) du disque compte tenu des conditions au contour. Or, ce sont justement les conditions au contour qui créent de réelles difficultés mathématiques, rendant l'intégration analytique de l'équation différentielle  $\nabla^4 F = 0$  le plus souvent impossible et empêchant de trouver une solution rigoureuse du problème.

Si les conditions au contour se rapportent uniquement aux charges appliquées, le problème est déterminé lorsqu'on fixe les valeurs de  $F$  et  $\frac{\partial F}{\partial n}$  ou  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$ .

La dérivée  $\frac{\partial F}{\partial n}$  se calcule à l'aide de  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$ . Si ces

conditions sont satisfaites pour des disques simplement connexes, l'intégration de l'équation du disque  $\nabla^4 F = 0$  donne une solution unique [6, 7].

Approximation à l'aide d'un calcul par différences finies

Pour étudier la distribution des contraintes cherchées, on est parti des distributions de contraintes aux limites suivantes :

a) sur l'arc, pression uniforme sur l'extrados, et répartition linéaire des contraintes normales sur la section de clé ;





Sur le pourtour de l'arc proprement dit  $ABCD$ , les valeurs limites et les gradients de  $F$  sont déterminés à partir des équations (4) et (6). En partant du point  $A$  (ou  $D$ ) commun à la fondation et à l'arc, ces valeurs inconnues sont calculées de proche en proche. Un contrôle de ce calcul est possible puisqu'en aboutissant à  $D$  (ou à  $A$ ) on doit retrouver les valeurs fixées. Il s'agit maintenant de déterminer la fonction  $F(x,y)$  satisfaisant à l'équation du disque  $\nabla^4 F = 0$  en tous les points situés à l'intérieur du domaine considéré.

L'intégration analytique étant impossible, nous avons recouru à une méthode de calcul par différences finies : le disque continu est remplacé par un réseau de mailles carrées, dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et plus serrés dans les zones où les variations de contraintes sont plus accentuées. En remplaçant dans l'équation du disque  $\nabla^4 F = 0$  les dérivées partielles par des différences finies, celle-ci prend en un point quelconque,  $k$ , la forme suivante (fig. 6).

$$\begin{aligned} \nabla^4 F \rightarrow & 20 F_k - 8(F_{k-1} + F_{k+1} + F_i + F_l) + \\ & + 2(F_{l-1} + F_{l+1} + F_{i-1} + F_{i+1}) + \\ & + (F_{k-2} + F_{k+2} + F_h + F_m) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Chaque point du réseau est ainsi lié aux douze points voisins. A l'intérieur du domaine, une équation semblable linéaire en  $F$  peut être établie pour chaque point nodal du quadrillage. Pour les points situés près du contour ou un peu en dehors du domaine, les valeurs de la fonction  $F$  sont déterminées par les valeurs aux points situés à l'intérieur du domaine et par les valeurs de  $F$  et de ses gradients aux points où les lignes du réseau coupent le contour. En écrivant ces relations pour les différents points du réseau, il en résulte alors un système linéaire de  $n$ —équations à  $n$ —inconnues, qui sont les valeurs de la fonction  $F$  aux  $n$ —points considérés.

La figure 8 montre le réseau entourant un point,  $k$ , situé près du contour; quelques points tombent en dehors du domaine considéré. Nous introduisons dans l'équation régulière les valeurs de la fonction  $F$  aux points  $l$  et  $m$  en reliant ces points au point  $k$  par une parabole à faible courbure qui donne au point du bord II les valeurs de la fonction et ses gradients imposées. Par les points  $(l+1)$  et  $(l-1)$  nous procédons d'une manière analogue. La résolution du système d'équations établi pour tous les points situés à l'intérieur du domaine devient ainsi possible. Une méthode pratique de résolution d'un tel système d'équations à grand nombre d'inconnues a été développée par R. V. Southwell [9, 10]: c'est la « méthode de relaxation » qui permet de résoudre le problème par approximations successives avec toute la précision désirée. Elle exige un important calcul numérique qui est cependant plus rapide que toutes les méthodes directes dès que le nombre d'équations est très élevé, comme c'est le cas ici.

### Méthode de relaxation

L'application de cette méthode n'est pas limitée aux problèmes définis par une équation différentielle

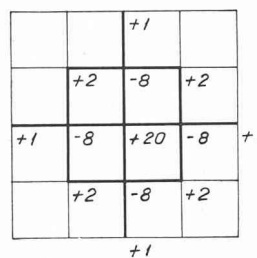


Fig. 7. — Clé de répartition des résidus

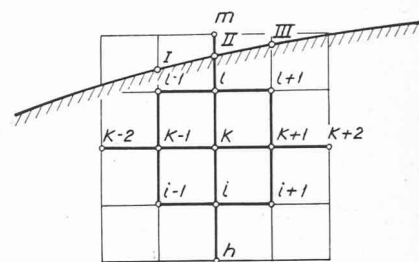


Fig. 8.

du deuxième ordre ou par une équation biharmonique. En effet, elle peut être appliquée à une grande variété de problèmes définis par des équations linéaires ayant la forme suivante [8] :

Point 0 :

$$Z_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i W_i - \alpha_0 W_0 = R_0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots k) \quad (12)$$

où :	$W_0$	Valeur de la fonction au point (0).
	$W_i$	Valeur de la fonction dans un point voisin (i).
	$\alpha$	Coefficients constants.
	$Z_0 = Z(xy)_0$	Fonction de $x$ et $y$ au point (0).
	$R_0$	Erreur, résidu ; erreur absolue (si $\alpha_0 = 1$ ).

En tous les autres points du réseau une équation semblable peut être écrite. Le résidu se calcule à partir de valeurs quelconques de la fonction admises au préalable en tous les points du réseau. Dans l'équation (12) la somme s'étend seulement aux seuls points adjacents ( $i$ ) définis par cette équation. En augmentant la valeur de la fonction  $W_0$  de  $\Delta W_0$  ( $W_0 \rightarrow W_0 + \Delta W_0$ ), l'équation (12) devient

$$Z_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i W_i - \alpha_0 (W_0 + \Delta W_0) = R_0 + \Delta R_0 \quad (13)$$

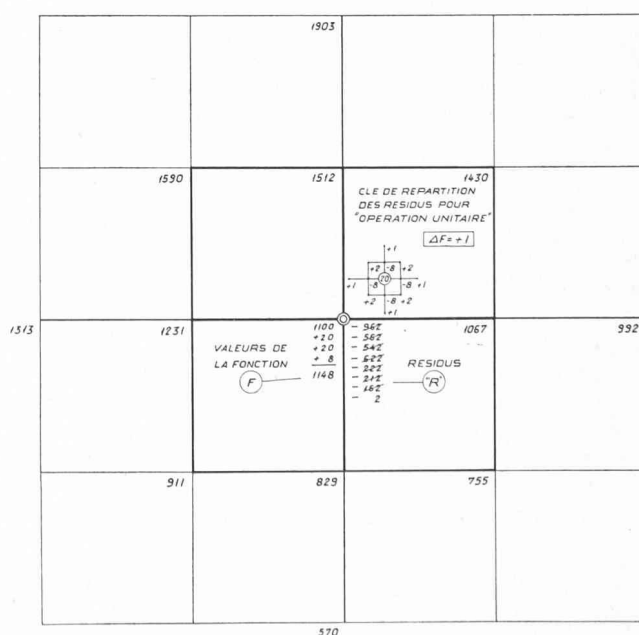


Fig. 9.

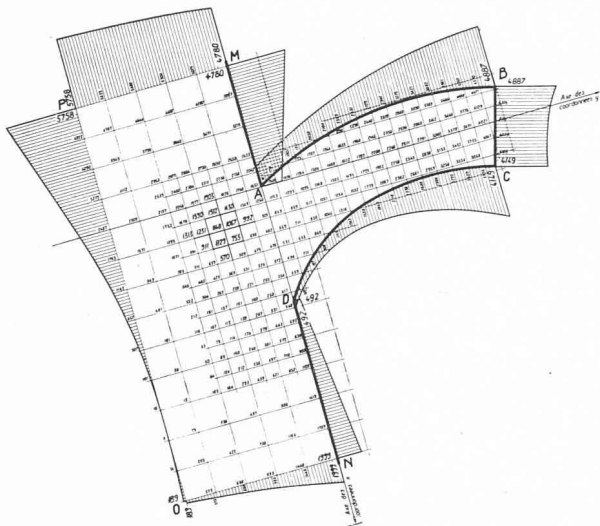


Fig. 10. — Valeurs de la fonction de contrainte —  $F \cdot 10^3$  sur le pourtour et à l'intérieur du domaine considéré.

En soustrayant membre à membre l'équation (13) de l'équation (12), il vient

$$\Delta R_0 = -\alpha_0 \Delta W_0 \quad (14)$$

Lorsque  $\alpha_0 = 1$  :  $\Delta R_0 = -\Delta W_0$  (14 a)

et nous constatons que l'augmentation de la fonction  $\Delta W_0$  n'entraîne qu'une variation du résidu, égale au produit de  $\Delta W_0$  par le coefficient  $-\alpha_0$ .

Aux points ( $i$ ) voisins du point 0 qui apparaissent dans l'équation (12) seuls les résidus subissent une modification mais non les valeurs de la fonction, comme les équations suivantes le démontrent.

Point (1) :

$$Z_1 + \sum_{i=0}^{i=k} \beta_i W_i - \beta_1 W_1 = R_1 \quad (i = 0, 2, 3, \dots k) \quad (15)$$

$$Z_1 + \sum_{i=0}^{i=k} \beta_i W_i + \beta_0 \Delta W_0 - \beta_1 W_1 = R_1 + \Delta R_1 \quad (16)$$

$$\text{d'où :} \quad \Delta R_1 = +\beta_0 \Delta W_0 \quad (17)$$

Cette équation reste inchangée pour  $\beta_1 = 1$ .

Les relations (14) et (17) sont les équations fondamentales de la méthode de relaxation définissant le mode de calcul lorsqu'on fait varier la valeur de la fonction en un point du réseau. En effet, la clé de répartition conduisant à la liquidation des résidus découle d'une opération unitaire  $\Delta W = 1$ . En appliquant ces relations à l'équation du disque  $\nabla^4 F = 0$ , base de notre problème, nous trouvons facilement la clé de répartition (fig. 7).

Cette clé de répartition des résidus doit être modifiée pour les points du domaine qui sont influencés par les conditions au contour. La méthode de relaxation consiste alors à liquider successivement les résidus en menant simultanément deux comptabilités (fig. 9), une relative à la modification des valeurs de la fonction et une autre à celle des résidus. Il est pratique de dessiner le quadrillage du domaine à une échelle suffisamment

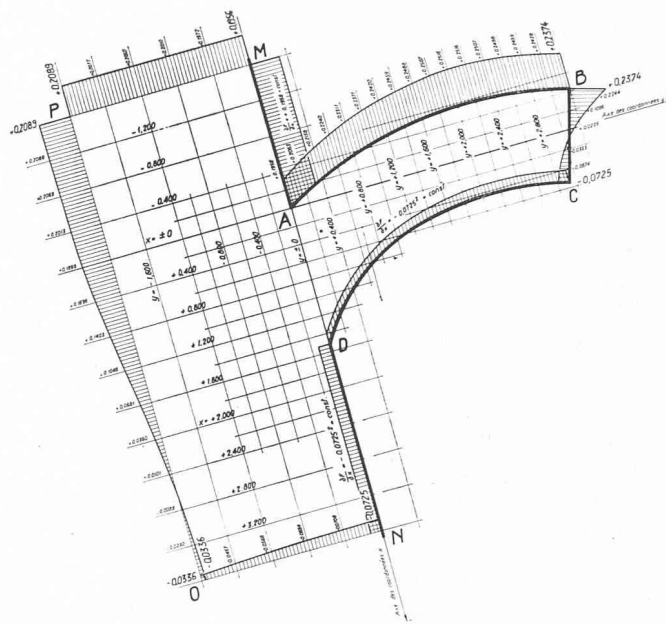


Fig. 11. — Valeurs du gradient  $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 10^{-1}$  sur le pourtour du domaine considéré.

grande pour indiquer schématiquement en chaque point du réseau la clé de répartition (fig. 8). Ce procédé permet de résoudre d'une manière commode le problème posé et même des problèmes plus compliqués que ceux caractérisés par une fonction biharmonique. Généralement on commence à corriger la fonction au point où le résidu est le plus grand. Le procédé de correction continue est convergent [2, 10]. Une accélération peut être réalisée en modifiant simultanément les valeurs de la fonction en plusieurs points (relaxation en bloc ou en groupe). Il est évident que le procédé de liquidation des résidus est fortement raccourci, si la première estimation des valeurs de la fonction est satisfaisante.

Abstraction faite des régions du domaine où se trouvent des points singuliers, la précision qu'on peut

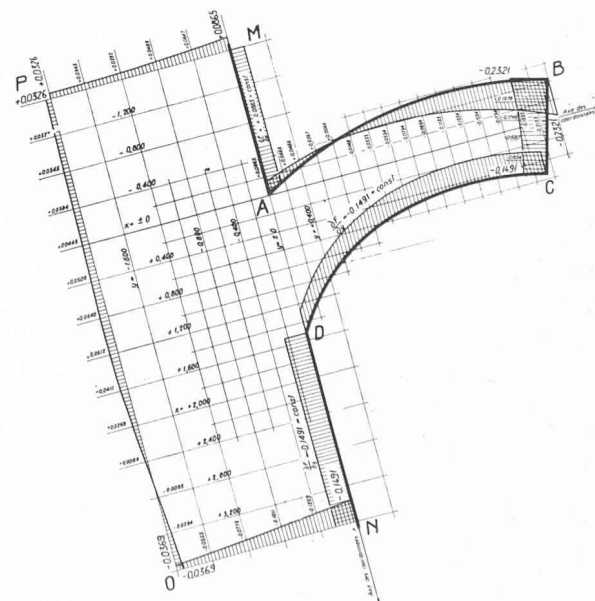


Fig. 12. — Valeurs du gradient  $\frac{\partial F}{\partial y} \cdot 10^{-1}$  sur le pourtour du domaine considéré.



atteindre à l'aide de la méthode de relaxation est d'environ 1 % de la plus grande valeur de la fonction pour les problèmes définis par un potentiel, et d'environ 5 % pour les problèmes biharmoniques. Dans notre cas particulier on peut estimer que l'erreur probable est de l'ordre de 3 % en admettant des résidus de  $\pm 50$  au maximum (voir figure 10).

#### Application pratique de la méthode

Le calcul a été effectué dans l'ordre suivant :

- 1) Choix d'un réseau à grandes mailles dans la fondation et à mailles plus serrées dans la partie de l'arc et la zone d'encastrement.
- 2) Détermination de la grandeur, de la direction et du point d'application de la réaction  $P$  sur la surface de contact arc-fondation.  
Calcul de la répartition des contraintes normales sur la section de clé  $BC$ .
- 3) Calcul des valeurs de la fonction  $F$  et de ses dérivées  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$  en tous les points du réseau situés sur le contour  $ABCD$  et AMPOND (fig. 10, 11 et 12).
- 4) Etablissement des équations aux différences finies liant les points extérieurs au contour  $ABCD$  aux points intérieurs.
- 5) Estimation des valeurs de la fonction  $F$  en tous les points du réseau à grandes mailles situés à l'intérieur du domaine considéré.
- 6) Application de la méthode de relaxation (relaxation sommaire, préliminaire) pour liquider les résidus aux nœuds du réseau à grandes mailles.
- 7) Calcul des valeurs de la fonction  $F$  aux nœuds du réseau à mailles plus serrées par interpolation cubique à partir de celles obtenues par le procédé de la relaxation sommaire.
- 8) Nouvelle application de la méthode de relaxation en corrigeant également les perturbations créées sur les valeurs des résidus du grand réseau par l'introduction du réseau plus serré jusqu'au moment où les résidus en tous les points sont devenus négligeables.
- 9) Calcul des contraintes selon les équations (2) en remplaçant les différentielles par les différences finies :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \rightarrow \frac{F_l - 2F_k + F_i}{\Delta y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \rightarrow \frac{F_{k+1} - 2F_k + F_{k-1}}{\Delta x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{F_{i+1} + F_{l-1} - F_{i-1} - F_{l+1}}{4 \Delta x \Delta y}\end{aligned}$$

- 10) Calcul des contraintes dans les sections choisies, en particulier les sections radiales de l'arc et les sections normales à la réaction sur appui,  $P$ , en utilisant les relations découlant du cercle de Mohr.

## V. Résultats et commentaires

### Section radiale de l'arc

Les graphiques de la figure 14 représentent le mode de transmission des efforts de l'arc au massif de fondation :

Dans les sections radiales de l'arc, jusqu'à une distance de l'encastrement égale approximativement à son

épaisseur, les contraintes normales  $\sigma_\phi$  sont distribuées d'une façon peu différente de la répartition linéaire. Ce sont les contraintes dominantes. Les contraintes tangentielles  $\tau_{\phi r}$  et les contraintes normales  $\sigma_r$ , comme on doit s'y attendre, sont nettement plus faibles.

Au voisinage de l'encastrement, les efforts sur les sections radiales tendent à se concentrer vers l'intrados, créant une augmentation de la compression, tandis que du côté de l'extrados, les compressions diminuent dans une zone très localisée à tel point que des tractions apparaissent. Ce sont des contraintes d'angle. Au voisinage de l'encastrement, la répartition des contraintes normales sur une section radiale diffère ainsi beaucoup de la répartition découlant de la règle de Navier.

Simultanément, les contraintes tangentielles sont plus élevées à l'intrados et leur répartition s'écarte de la répartition parabolique classique, telle qu'elle se présente dans les sections radiales éloignées de l'appui.

### Massif de fondation

Dans le massif de fondation, sur des sections normales à la résultante des efforts, on constate une concentration des contraintes au droit du contact de l'intrados avec la surface du rocher. La contrainte d'angle est très localisée. Dès que l'on s'écarte même très peu de l'angle intrados, elle diminue rapidement d'intensité. Vers l'extrados, elle s'évanouit à une distance égale à deux fois l'épaisseur de l'arc environ. En profondeur, les contraintes diminuent rapidement par suite de la diffusion des efforts.

### Section de contact arc-rocher

Les graphiques de la figure 13 donnent les contraintes sur des sections parallèles aux axes de coordonnées, et en particulier sur la ligne de contact. On voit que les contraintes normales sur cette section oblique de contact (fig. 13 a) diffèrent notablement de celles découlant de la règle de Navier ; si l'on fait abstraction des points très localisés (contraintes d'angle), le maximum se présente au milieu de la section. Les contraintes tangentielles (fig. 13 c) sont également très différentes de celles que l'on pourrait calculer par les méthodes classiques ; abstraction faite des pointes, on trouve des valeurs plus uniformes.

### Effet d'angle (Concentration des contraintes)

Dans la zone de contact des arcs et du rocher, les contraintes sont concentrées aussi bien à l'extrados qu'à l'intrados et quelles que soient l'inclinaison de la section d'encastrement, la position et la direction de la résultante. Le calcul théorique montre que, dans la région des angles vifs rentrants, aigus ou obtus, les contraintes devraient être infinies pour satisfaire aux conditions de compatibilité des déformations dans le stade élastique. Ces valeurs infinies ne peuvent pas être atteintes, la matière subissant des déformations plastiques. Dans les cas où, l'angle étant arrondi, le rayon du congé est trop petit, les contraintes dépasseront aussi sensiblement la limite d'élasticité de la matière provoquant également des déformations plastiques qui entraîneront une nouvelle répartition des contraintes. Toutefois, la zone où règnent ces contraintes très élevées est extrêmement limitée, et ces dernières

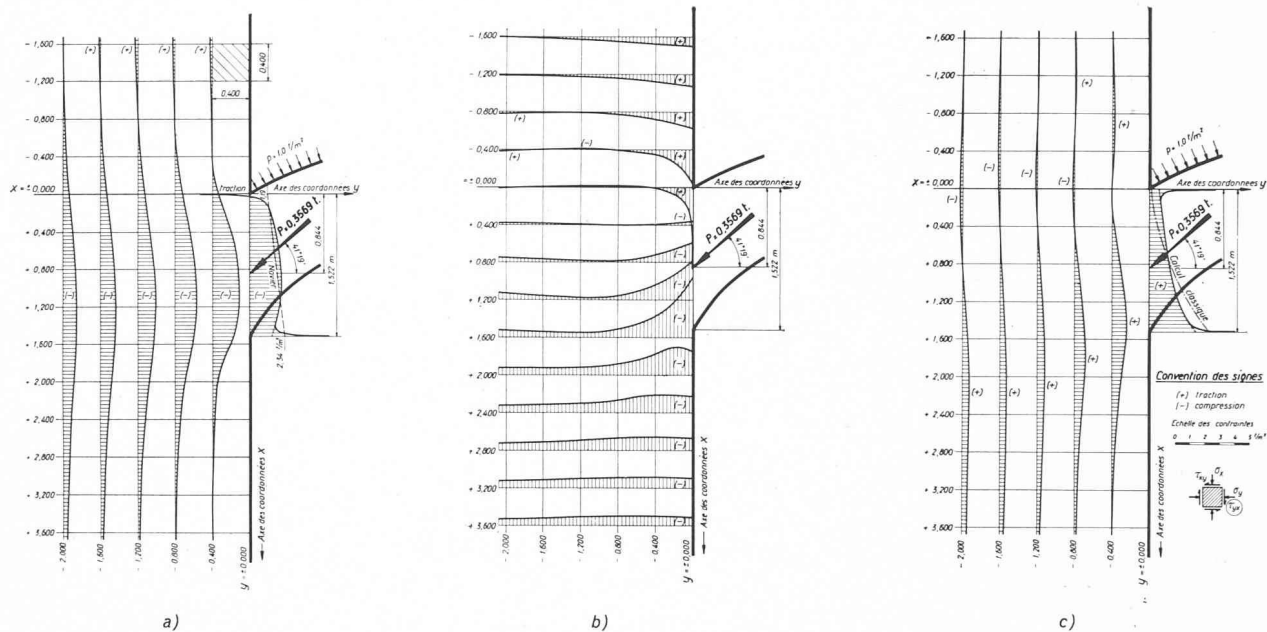


Fig. 13. — Contraintes dans le rocher en  $t/m^2$ .

- a) Contraintes normales  $\sigma_y$  sur des sections  $y = \text{const.}$   
b) Contraintes normales  $\sigma_x$  sur des sections  $x = \text{const.}$   
c) Contraintes tangentielle  $\tau_{xy}$  sur des sections  $y = \text{const.}$

ne seront pratiquement modifiées que dans cette zone. Les angles vifs forment des points singuliers qui échappent aux règles de l'élasticité. La nouvelle répartition des contraintes ne peut plus se calculer selon les méthodes de la théorie de l'élasticité, mais on conçoit facilement que les contraintes diminuent dans la zone où le fluage plastique a commencé et augmentent autour de la limite de cette zone. Comme les valeurs théoriques extrêmes se limitent à une zone très localisée, la modification de la répartition des contraintes calculée pour

un état élastique est petite et se fait sentir essentiellement dans cette zone, sans influencer beaucoup les contraintes dans les régions plus éloignées des angles. De ce fait, les contraintes d'angle (ou contraintes d'entaille) n'influencent que peu la répartition des contraintes d'ensemble assurant l'équilibre de la construction. Pour évaluer assez exactement ces contraintes locales, le calcul par différences finies exigerait une forte réduction de la maille, mais on voit, déjà avec la maille choisie, que les contraintes augmentent rapide-

Fig. 14. — Contraintes dans l'arc et dans le rocher en  $t/m^2$ .

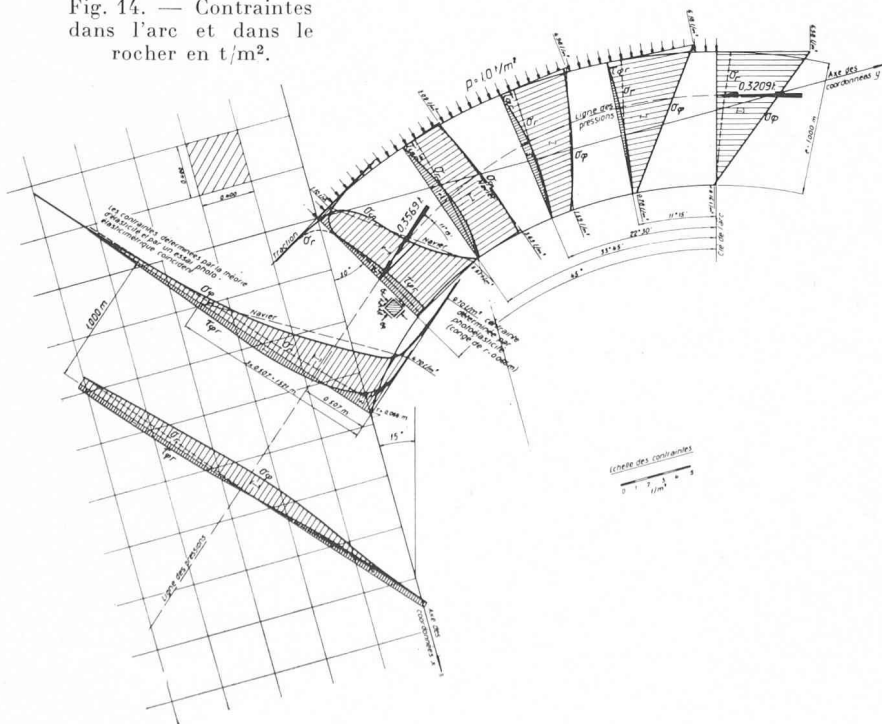
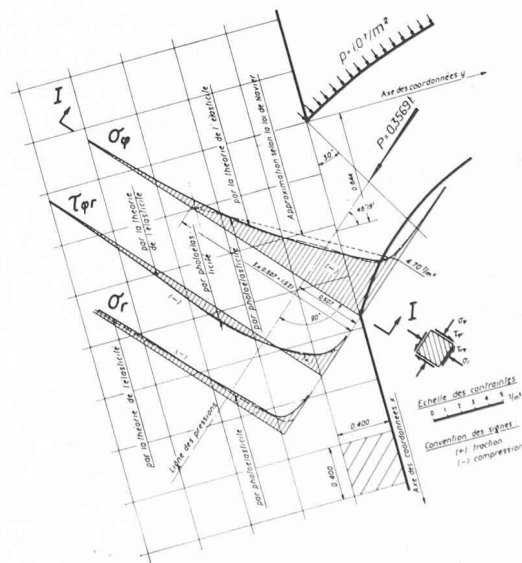


Fig. 15. — Comparaison entre les contraintes  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_r$ ,  $\tau_{\phi r}$  déterminées par la théorie de l'élasticité et par photoélasticité. Section I—I perpendiculaire à la direction de la résultante à la naissance.



ment vers le sommet de l'angle. Si l'on désire que les contraintes restent inférieures à la limite d'élasticité de la matière, il est nécessaire d'arrondir les coins formés par les angles.

A l'amont, la contrainte de pointe est une traction qui est nécessaire pour satisfaire aux conditions de compatibilité des déformations, mais non à l'équilibre. Elle n'est donc pas dangereuse, car si une fissure venait à se former, cette traction disparaîtrait. Par ailleurs, la fissure ne pourrait pas progresser derrière l'appui de l'arc puisqu'elle entrerait rapidement dans une zone comprimée dans tous les sens.

En réalité, l'état de contrainte se présente plus favorablement, car l'effet de la pression directe de l'eau sur les versants crée à l'intérieur du massif rocheux un état additionnel de contrainte constitué uniquement par des compressions. Ces contraintes, nettement plus petites que celles dues à la pression de l'arc peuvent être évaluées avec une bonne approximation selon les expressions des équations 9 et 10.

## VI. Conclusions

*Comparaison entre les résultats du calcul et les résultats des essais photoélastiques*

Les graphiques de la figure 15 permettent d'établir cette comparaison pour les contraintes considérées ici, soit celles qui agissent sur une section passant par le point de contact du parement intrados de l'arc avec le rocher, et normales à la résultante de l'arc. On constate que pour les trois contraintes  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_r$  et  $\tau_{\phi r}$ , la concordance est parfaite. On en déduit que les résultats des essais photoélastiques sont pratiquement équivalents à ceux du calcul.

*Estimation des contraintes dans le rocher à la retombée des arcs*

L'étude détaillée, par calculs et par essais, a porté sur l'arc 1830 du barrage de Mauvoisin, un des plus chargés. On peut se demander quelle est la valeur des contraintes sur le rocher à la retombée des autres arcs. Pour cela on a cherché à déduire des essais une méthode approximative commode, capable d'estimer la valeur des contraintes maximums de contact béton-rocher sur une section normale à la force. Les essais ont montré que lorsqu'on fait varier la force, le diagramme des contraintes normales conserve une forme sensiblement triangulaire et que la contrainte maximum peut alors se déduire des efforts appliqués et de la position de la force par rapport à l'arête intrados : cette contrainte maximum est pratiquement égale à deux fois la contrainte moyenne qui s'exercerait sur une section de largeur égale à trois fois la distance de la force à l'arête intrados.

## Conclusions

Le calcul par la théorie de l'élasticité, comme les essais photoélastiques, permettent de tirer les conclusions, suivantes :

- a) L'effet de l'obliquité de la section des arcs dans la région d'appui n'entraîne pas de perturbations importantes dans la répartition des contraintes de la section de naissance.

- b) Les concentrations de contraintes dans les angles sont indépendantes de l'obliquité de cette section. Elles se produisent essentiellement dans le béton et non dans le massif d'appui, où l'effort se diffuse très rapidement.
- c) Ces contraintes concentrées, très localisées, sont sans danger parce qu'elles ne sont pas nécessaires pour satisfaire à l'équilibre et parce qu'elles découlent uniquement de conditions locales de déformation.
- d) On peut évaluer, en première approximation, dans la section de retombée des arcs, les contraintes normales sur des sections perpendiculaires à la résultante, en admettant que leur distribution est triangulaire, et qu'elles se répartissent sur une largeur fictive égale à trois fois la distance de la force au bord du profil.
- e) Les efforts provenant de la poussée des arcs se diffusent fortement dans le massif rocheux d'appui, de sorte que les contraintes qui en résultent diminuent rapidement d'intensité en profondeur.

## VII. Résumé

A l'aide de la théorie de l'élasticité, nous avons déterminé l'état de contrainte dans la zone de l'encastrement d'un arc d'un barrage-voûte, et dans le massif rocheux de fondation. Le problème, ramené à un problème aux limites, a été résolu par la méthode de relaxation en introduisant des différences finies. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats d'essais photoélastiques effectués pour plusieurs positions et inclinaisons de la poussée de l'arc. Cette comparaison a permis de constater, une fois de plus, la bonne concordance des résultats découlant de la théorie de l'élasticité et de son partenaire la photoélasticité.

Le calcul par différences finies permet d'obtenir les résultats aussi précis qu'on le désire, mais non sans exiger beaucoup de temps. Par contre, il ne conduit pas directement à des résultats généraux permettant la discussion : pour chaque cas de charge différent le calcul doit être recommencé. Les essais photoélastiques permettent de multiplier facilement les cas de charge, et de trouver rapidement les valeurs des contraintes déterminantes, sans qu'il soit nécessaire de pousser l'analyse complètement. Les deux méthodes ont l'avantage de permettre de résoudre des problèmes d'élasticité non accessibles à une méthode analytique ; dans une certaine mesure, elles se complètent l'une l'autre.

Les résultats obtenus ont permis d'établir une méthode approximative commode pour estimer la répartition des contraintes maximums au contact du béton et du rocher ainsi que sur une section normale à la force et de tirer quelques conclusions pratiques.

A cette occasion, l'auteur remercie vivement M. le Professeur A. Stucky qui lui a suggéré d'entreprendre cette étude et qui l'a suivie avec un grand intérêt.

## BIBLIOGRAPHIE

1. BRAHTZ, J. H. A. : *The Stress Function and Photoelasticity applied to Dams*, Am. Soc. Civ. Eng. 1936, Paper n° 1949,

2. COURANT, R. : *Über Randwertaufgaben bei partiellen Differenzgleichungen*. Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 322.
3. FRÖHLICH, O. K. : *Druckverteilung im Baugrund*, Wien, Springer, 1934.
4. GIRKMANN, K. : *Flächentragwerke*. Wien, Springer, 1948 (2. Aufl.).
5. HOFACKER, K. : *Das Talsperrengewölbe. Allgemeine Untersuchung des kreisförmigen eingespannten Bogens nach der mathematischen Elastizitätstheorie*. Thèse, Zurich 1936.
6. MATHIEU, E. : *Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre*. Liouville J., 2, sér. 14, 378 (1869).
7. MICHELL, J. H. : *On the direct determination of stress in an elastic solid with application to the theory of plates*. Math. Soc. Proc. vol. 31, London 1899.
8. RESCHER, O.-J. : *Die Gewölbestaumauer. Berechnung einer Kreiszylinderschale mittels Relaxationsmethode*. Thèse, Wien, Dokumentationszentrum der Technik, Heft 1, 1951.
9. SOUTHWELL, R. V. : *Relaxation methods in engineering science*. Oxford, Clarendon Press, 1940.
10. SOUTHWELL, R. V. : *Relaxation methods in theoretical physics*. Oxford, Clarendon Press, 1946.
11. STUCKY A. : *Quelques problèmes relatifs aux fondations des grands barrages-réservoirs. Barrages du Mauvoisin et de la Grande-Dixence*. Comptes rendus du troisième congrès international de mécanique des sols et des travaux de fondations, Vol. III, 1953.
12. THIMOSHENKO, S. et GOODIER, J. N. : *Théorie de l'élasticité*. Paris et Liège, Ch. Béranger, 1961.
13. ZIENKIEWICZ, O. C. : *The Stress Distribution in Gravity Dams*. Journal of the Institution of Civil Engineers, No. 3, London Jan. 1947.

## DIVERS

### Note sur les canaux de forme géométrique et le profil cycloïdal fermé

par L.-A. DE DARDEL, ing. dipl. EPZ Suselectra Bâle

#### I. Le problème courant et sa résolution

Partons de la formule de Strickler, qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{Q}{kJ^{1/2}} = \frac{F^{5/3}}{P^{2/3}} \quad (1)$$

où  $Q$  est le débit,  $k$  le coefficient de rugosité,  $J$  la pente de la ligne d'énergie,  $F$  le profil hydraulique et  $P$  le périmètre mouillé. Le problème qui consiste à déterminer la section transversale d'un canal ne trouve généralement pas de solution immédiate : il n'y a de rapport simple entre  $F$  et  $P$ , ou entre  $F^{5/3}$  et  $P^{2/3}$  que si la section est circulaire et le canal en charge ; auquel cas le diamètre est

$$D = 1,5483 \left[ \frac{Q}{kJ^{1/2}} \right]^{3/8} \quad (2)$$

L'équation (1) exprime que l'eau coule dans un canal entièrement connu en ses dimensions longitudinales et transversales, et jusqu'en la nature de ses parois. Elle ne donne pas d'indication directe sur le profil transversal à adopter. Il faut choisir la forme et les dimensions de ce profil, puis examiner comment l'eau s'y comporte, c'est-à-dire comment varie le couple des valeurs  $F$  et  $P$ , ce qui permet en fin de compte de trouver la profondeur  $h$  de l'eau pour laquelle  $F$  et  $P$  satisfont à l'équation (1), et au besoin de modifier les valeurs  $Q$ ,  $k$  et  $J$  en conséquence.

Hors de toute considération constructive, le problème de la détermination du profil d'un canal comporte donc deux groupes d'opérations juxtaposées et dépendantes soumises ensemble à l'appréciation permanente de l'hydraulicien jusqu'à satisfaction :

1. Détermination ou choix du débit  $Q$ , de la pente  $J$  et du coefficient  $k$  de rugosité ; calcul des valeurs
2. Choix de la forme du profil transversal et d'une valeur des éléments  $F$  et  $P$  telle que

$$\Psi' = \frac{Q}{kJ^{1/2}} \quad \Psi = \frac{F^{5/3}}{P^{2/3}} = \Psi' \quad (3)$$

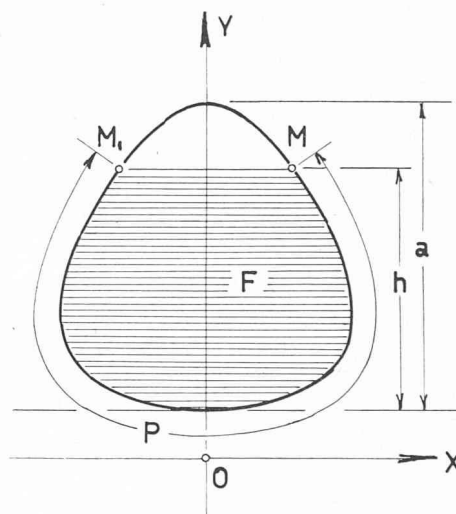


Fig. 1. — Profil symétrique quelconque.

#### II. Le problème auxiliaire

Le second problème énoncé se pose inéluctablement à tout praticien et complique souvent sa tâche. Considérons la figure 1, qui représente le profil transversal d'un canal de forme géométrique quelconque, mais symétrique par rapport à l'axe  $Oy$  du système rectangulaire  $xOy$  de référence. Dans ce profil supposé rigide, momentanément tout au moins, l'eau atteint le niveau  $MM_1$ . Les deux points  $M$  et  $M_1$  sont sur le pourtour et symétriques ; leurs coordonnées satisfont à une équation bien définie, celle de la courbe du pourtour. Nous nommerons éléments relatifs à  $M$  les quantités dont les expressions algébriques sont fonctions des coordonnées de  $M$ , telles que

$$h \propto F P \frac{F}{P} \left[ \frac{F}{P} \right]^{2/3} F \left[ \frac{F}{P} \right]^{2/3} = \frac{F^{5/3}}{P^{2/3}} = \Psi \quad (4)$$

De cette série, les éléments qu'il importe de connaître sont  $F$  et  $\Psi$ . L'on est donc le plus souvent amené à calculer l'une après l'autre les valeurs numériques de