Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 89 (1963)

Heft: 22

Artikel: Application de la théorie de l'équivalence en hyperstatique plane ou spatiale

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66356

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

APPLICATION DE LA THÉORIE DE L'ÉQUIVALENCE EN HYPERSTATIQUE PLANE OU SPATIALE

par A. ANSERMET, ing.-prof.

En hyperstatique des systèmes articulés, les praticiens disposent de diverses méthodes pour le calcul des tensions dans les barres ; un choix judicieux des variables joue un grand rôle, surtout si l'on veut étudier le système au point de vue des déformations. Certains auteurs choisissent comme inconnues les tensions dans les barres, d'autres les variations des coordonnées des nœuds, ce qui peut se concevoir de deux manières différentes. Dans sa publication de 1926 ([3] p. 52), B. Mayor calcule simultanément les tensions et les déplacements des nœuds ; ses équations aux déformations revêtent une forme simple en ce sens que les termes absolus sont implicitement contenus dans le groupe des termes variables ; à certains égards ce n'est pas un avantage, car ce groupe d'équations ne présente guère d'intérêt considéré isolément. La solution de B. Mayor n'en est pas moins judicieuse ; en représentation plane, une des variables devient angulaire pour chaque nœud.

Avant de poursuivre, rappelons l'étroite corrélation existant entre les systèmes hyperstatiques et les réseaux télémétriques ; un auteur s'est exprimé à ce sujet comme suit : « Im dreidimensionalen Raum stimmen der einknotige statisch beliebig unbestimmte Stabverband und der zugehörige überbestimmte Bogenschnitt völlig überein » (voir [2]). Les staticiens n'auront qu'à appliquer des formules ayant déjà fait leurs preuves en géodésie ; en particulier la théorie de l'équivalence est souvent à la base de celle de l'ellipse d'erreur (ou de l'ellipsoïde).

Dans les réseaux, on coupe les côtés surabondants provisoirement et dans les systèmes les barres surabondantes, moyennant que l'on applique des forces (1 tonne, par exemple) ; il en résulte un état qui sera initial pour les variations de coordonnées et déterminant pour les termes absolus f_i :

$$(1) \qquad v_i = f_i + a_i\,(dx_g - dx_h) + b_i\,(dy_g - dy_h) + c_i\,(dz_g - dz_h)$$

$$\text{poids } p_i\,;\ a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1.$$

Les i sont les indices pour les barres, g et h pour les nœuds.

$$p_i = \frac{E_i\,S_i}{L_i} \qquad v_i = \frac{T_i\,L_i}{E_i\,S_i} \qquad (T_i = \text{tension})$$

$$[pvv] = \Sigma\,(pvv) = \text{minimum}.$$

E_i est le coefficient d'élasticité ; S_i et L_i sont respectivement les sections transversales et les longueurs des barres. Le calcul peut être poussé fort loin sans connaître les f_i, comme les exemples le montreront. Le système d'équations aux déformations (1) suffit en général pour résoudre le problème.

Equivalence : Grâce à la théorie de l'équivalence on peut, dans certains cas et au point de vue des déformations, substituer à un système hyperstatique un autre, fictif, statiquement déterminé. Il y a équivalence entre deux systèmes d'équations aux déformations quand ils donnent lieu aux *mêmes valeurs pour les inconnues, leurs poids et pour les poids de fonctions des inconnues* ([6] p. 75). Certains auteurs basent la théorie des ellipses et ellipsoïdes d'erreur sur celle de l'équivalence ; ici on a des déformations. Les centres de ces courbes et surfaces se déduisent de la condition $[pvv] =$ $=$ minimum.

L'exemple numérique ci-après porte sur diverses solutions : dans le système à quatre barres, on calcule les poids des inconnues et les poids P_i des barres à posteriori (poids des $(-f_i + v_i)$) ; on obtient ainsi des paires de plans tangents mutuellement parallèles et distants du centre de $\pm\, m_o \sqrt{1 : P_i}$; mais $m_o^2 = 0 : 0$ quand il n'y a plus d'éléments surabondants. L'échelle de l'ellipsoïde de déformation moyen n'est pas connue si m_o^2 n'est pas déterminé d'une autre façon ; le système est devenu statiquement déterminé et, de plus, trois plans tangents suffisent pour calculer l'ellipsoïde si les trois points de contact coïncident avec les extrémités de trois diamètres mutuellement conjugués. Il n'y a plus de barre surabondante.

Dans le second exemple traité ci-après, on s'est affranchi de deux barres sur trois ; dans le plan, deux tangentes à l'ellipse de déformation suffisent si elles sont parallèles à deux diamètres conjugués. Ici encore on réalise l'équivalence ; on verra de plus, dans les deux exemples traités, que des propriétés d'invariance existent entre les poids à posteriori des barres. Elles traduisent des propriétés géométriques connues.

Un contrôle judicieux consiste à former les quotients $(p_i : P_i)$ des poids à priori et à posteriori des barres (dans les réseaux télémétriques des côtés) ; la somme $[p_i : P_i]$ *est égale au nombre des inconnues* ([6] p. 68). Dans le second exemple traité, on a : $[p_i : P_i]_1^7 = 4$ puis, pour le système équivalent fictif : $[p_i : P_i]_1^5 = 4$; en d'autres termes les poids sont, en moyenne, amplifiés $7 : 4 = 1{,}75$ fois, puis $5 : 4 = 1{,}25$ fois. Ces valeurs constituent des maxima ; c'est un critère de la méthode des moindres carrés. Pour l'étude des déformations des systèmes hyperstatiques, on combinera avec avantage la solution basée sur les équations aux déformations (1) et la théorie de l'équivalence ; cette méthode qui a fait ses preuves pour les réseaux télémétriques est aussi à appliquer aux systèmes articulés.

Exemple : Nœud 1 libre ; $dx_h = dy_h = dz_h = 0$.

Barres	a_i	b_i	c_i	p_i	P_i
1-2	+ 0,817	0,00	+ 0,577	0,64	0,915
1-3	0,00	— 0,817	+ 0,577	0,96	1,20
1-4	— 0,817	0,00	+ 0,577	0,64	0,915
1-5	0,00	+ 0,817	+ 0,577	0,96	1,20

Equations normales (forme implicite) :

$$[pav] = [pbv] = [pcv] = 0$$

Coefficients : $[paa]$, $[pbb]$ ... $[pbc]$

$$1 : 0{,}915 = 1{,}093\ ;\quad 1 : 1{,}20 = 0{,}833$$

Termes absolus : $[paf]$, $[pbf]$, $[pcf]$

Les matrices des équations normales et aux coefficients de poids sont inverses et diagonales :

$$\begin{bmatrix} 0{,}854 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 1{,}28 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}067 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}170 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}781 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}937 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

$m_o^2 = [p\upsilon\upsilon] : 1.$

$1 : P_1 = 1 : P_3 = \overline{0{,}817}^2 \times 1{,}17 + \overline{0{,}577}^2 \times 0{,}937 = 1{,}093$

de même : $1 : P_2 = 1 : P_4 = 0{,}833$ (voir [1]).

Contrôle :

$[p_i : P_i]_1^4 = 2\,(0{,}64 \times 1{,}093 + 0{,}96 \times 0{,}833) = 3{,}00 = u$

Les longueurs des axes principaux sont proportionnelles à $\sqrt{1{,}17}$, $\sqrt{0{,}781}$, $\sqrt{0{,}937}$ mais dans ce cas particulier ; en général ces valeurs fournissent des plans tangents normaux aux axes de coordonnées. Si l'orientation de ces axes varie, les Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} varient aussi mais pas la somme $(Q_{11} + Q_{22} + Q_{33})$, ce qui traduit une propriété connue (sphère orthoptique). Toutes ces paires de plans tangents parallèles sont distants du centre de la surface de quantités :

$$\pm\, m_o \sqrt{Q_{11}}\,,\ \pm\, m_o \sqrt{Q_{22}}\,,\ \pm\, m_o \sqrt{Q_{33}}\,,\ \pm\, m_o \sqrt{1 : P_i}\,.$$

$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

Ces perpendiculaires abaissées sur les plans tangents sont des rayons vecteurs de la surface podaire de l'ellipsoïde par rapport au centre (voir [8]).

Equivalence : Il n'y a plus que trois barres ; les poids p_i et P_i sont les mêmes. Quant aux matrices réciproques ci-dessus, elles subsistent. Développons deux des solutions, toujours pour le nœud libre 1 :

	Barres	a_i	b_i	c_i	$p_i = P_i$
$\begin{cases} \upsilon_1 = 0 \\ \upsilon_2 = 0 \\ \upsilon_3 = 0 \end{cases}$	1-2′ 1-3′ 1-4′	+ 0,653 0,00 — 0,653	+ 0,490 — 0,817 + 0,490	+ 0,577 + 0,577 + 0,577	1,00 1,20 1,00
		$m_o^2 = 0 : 0$			
$\begin{cases} \upsilon_1 = 0 \\ \upsilon_2 = 0 \\ \upsilon_3 = 0 \end{cases}$	1-2″ 1-3″ 1-4″	+ 0,633 + 0,633 0,00	+ 0,775 — 0,775 0,00	0,00 0,00 + 1,00	1,067 1,067 1,067

Il y a une propriété d'invariance entre les poids fictifs :

$1{,}0 + 1{,}20 + 1{,}0 = 3 \times 1{,}067 = 0{,}854 + 1{,}28 + + 1{,}067 = 3{,}20$

Cette invariance traduit une propriété de géométrie spatiale ([8] p. 72) :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}$$

où r, s, t sont les distances du centre de l'ellipsoïde aux trois plans tangents ayant leurs points de contact respectifs aux extrémités de trois diamètres mutuellement conjugués. Les $2a$, $2b$, $2c$ sont les axes principaux. Les termes absolus f_i sont aussi calculés pour réaliser l'équivalence.

En statique, comme en géodésie, on pourra en général connaître m_o d'une autre façon ; ce n'est pas l'élément le plus important.

Equivalence dans le plan : Ici encore, un exemple très simple sera choisi, mais permettant le calcul de m_o ; on a :

$$(2) \qquad -f_i + \upsilon_i = a_i\,(dx_g - dx_h) + b_i\,(dy_g - dy_h)$$

$$(\text{poids } p_i\,;\ a_i^2 + b_i^2 = 1)$$

avec les équations normales sous forme implicite : $[pa\upsilon] = [pb\upsilon] = 0$.

f_i est encore la déformation révélée après la coupure des barres surabondantes. A partir de cet état, on fait varier les coordonnées, ce qui distingue cette solution de celle de B. Mayor ; ces barres sont remplacées par des forces (1 tonne).

Si on admet les liaisons : $dx_h = 0$ et $dy_h = 0$, l'ellipse de déformation au point g a pour équation :

$[paa]\,dx^2 + 2\,[pab]\,dx.dy + [pbb]\,dy^2 =$ constante.

Le centre est le point pour lequel $[p\upsilon\upsilon] =$ minimum ; c'est l'origine de ces nouveaux dx, dy. C'est le même problème qu'en télémétrie ; dans la citation non traduite en première page, on lira : « espace à deux dimensions ».

La solution la plus usuelle consiste encore à inverser la matrice des équations normales ; pour chaque ellipse, il faut déterminer deux coefficients aux poids Q_{ii} et Q_{jj} et Q_{ij} non quadratique (voir [1]).

En d'autres termes, au point de vue des déformations et grâce à l'équivalence, on peut escamoter certaines barres tandis que le système est modifié. En statique c'est, sauf erreur, une notion nouvelle. Le système initial et l'autre, équivalent mais fictif, donnent lieu aux mêmes équations normales, aux mêmes poids pour les inconnues ou pour des fonctions des inconnues.

Exemple numérique : Considérons une paire de nœuds N et N' donnant un système :

$$-f_i + \upsilon_i = a_i\,dx + b_i\,dy + c_i\,dx' + d_i\,dy'$$

$$(\text{poids } p_i\,;\ a_i^2 + b_i^2 = c_i^2 + d_i^2 = 1)$$

Le nombre de barres sera réduit se sept à cinq (une barre surabondante).

La valeur m_o dans le système équivalent n'est donc pas indéterminée. On exprime l'équivalence entre les matrices des équations normales puis on forme la matrice réciproque ; ces matrices ne sont pas diagonales.

Les axes principaux des deux ellipses sont respectivement parallèles et normaux à NN' ;

en N, leurs longueurs sont $2m_o\sqrt{0{,}485}$, $2m_o\sqrt{0{,}667}$;

en N' : $2m_o\sqrt{0{,}430}$, $2m_o\sqrt{0{,}556}$.

Poids à posteriori P_1 des barres : Bornons-nous au système équivalent à cinq barres :

$1 : P_1 = \overline{0{,}8}^2 \times 0{,}485 + \overline{0{,}6}^2 \times 0{,}667 = 0{,}55$;

de même $1 : P_2 = 0{,}60$

$1 : P_3 = 0{,}485 + 0{,}430 - 2 \times 0{,}149 = 0{,}617$;

$1 : P_4 = 1 : P_5 = \overline{0{,}707}^2 (0{,}430 + 0{,}556) = 0{,}493$

Contrôle : $[p_i : P_i]_1^5 = 1{,}5\,(0{,}55 + 0{,}60) + 0{,}8 \times$

$\times 0{,}617 + 1{,}8\,(0{,}493 + 0{,}493) = 4{,}00 = u.$

De plus :

$0{,}485 + 0{,}667 = 0{,}55 + 0{,}60$ et

$0{,}430 + 0{,}556 = 0{,}493 + 0{,}493.$

Barres	a_i	b_i	c_i	d_i	p_i	Barres	a_i	b_i	c_i	d_i	p_i	P_i	
$N-1$	+ 0,342	+ 0,940			1,0	$N-1'$	+ 0,8	+ 0,6			p_1	P_1	Système équivalent
$N-2$	+ 0,643	— 0,766			1,0	$N-2'$	+ 0,6	— 0,8			p_1	P_2	
$N-3$	— 0,985	— 0,174			1,0	$N-N'$	+ 1,00		— 1,00		0,8	P_3	
$N-N'$	+ 1,00		— 1,00		0,8	$N'-3'$			+ 0,707	+ 0,707	p_2	P_4	
$N'-4$			+ 0,375	+ 0,927	1,2	$N'-4'$			+ 0,707	— 0,707	p_2	P_5	
$N'-5$			+ 0,616	— 0,788	1,2								
$N'-6$			— 0,990	— 0,139	1,2								

$$\begin{bmatrix} 2,3 & 0,0 & -0,8 & 0,0 \\ 0,0 & 1,5 & 0,0 & 0,0 \\ -0,8 & 0,0 & 2,6 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1+0,8 & 0,0 & -0,8 & 0,0 \\ 0,0 & p_1 & 0,0 & 0,0 \\ -0,8 & 0,0 & p_2+0,8 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,485 & 0,0 & +0,149 & 0,0 \\ 0,0 & 0,667 & 0,0 & 0,0 \\ +0,149 & 0,0 & 0,430 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,556 \end{bmatrix}$$ matrice aux coefficients de poids

d'où $p_1 = 1,5, \quad p_2 = 1,8, \quad Q_{11} = 0,485, \quad Q_{22} = 0,667 \quad \ldots \quad Q_{13} = +0,149$

Ces égalités expriment la propriété connue : les rectangles circonscrits à une ellipse sont inscrits dans un même cercle. On constate en outre jusqu'à quel point les calculs peuvent être poussés sans que les termes absolus f_i interviennent. Il y a cinq valeurs fictives f_i pour réaliser l'équivalence, y compris celle de m_o. Quant aux sept termes absolus des équations aux déformations initiales, donc non fictives, leur détermination est facile. Si le système était spatial, on pourrait appliquer la représentation plane d'après B. Mayor pour le calcul de ces termes.

En *conclusion*, on voit que l'application de la théorie de l'équivalence fournit dans certains cas une solution nouvelle ; on peut même s'affranchir de barres surabondantes. Les inconnues sont encore les variations des coordonnées des nœuds ; la notion d'ellipses ou ellipsoïdes de déformation subsiste. La forme et la position de ces courbes et surfaces peuvent jouer un rôle en hyperstatique.

LITTÉRATURE

[1] Baeschlin, C. F. : *Ausgleichungsrechnung* (Cours ETH).
[2] Friedrich, K. : *Beweise für die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet* (Zeitschr. für Vermessungswesen, 1943).
[3] Mayor, B. : *Introduction à la statique des systémes de l'espace* (Payot, Lausanne).
[4] Salles, F. : *Initiation à la théorie de l'énergie élastique* (Dunod, Paris).
[5] Stüssi, F. : *Baustatik I, II* (Birkhäuser, Bâle).
[6] Wolf, H. : *Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate* (Hamburg).
[7] Ansermet, A. : *Analogie entre les ellipsoïdes d'erreur et ceux de déformation* (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, 1963, nº 6).
[8] Ansermet, A. : *Théorie de l'équivalence* (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, 1960, mars).
[9] Ansermet, A. : *Calcul des déformations en hyperstatique spatiale* (Bulletin technique, 1963).

BIBLIOGRAPHIE

Le système international de mesures. Grandeurs physiques, unités, dimensions, par *Raymond Allard*. Paris, Gauthier-Villars, 1963. — Un volume 21 × 27 cm, 64 pages. Prix : broché, 9 F.

Dans la préface de cet ouvrage, le professeur Escande dit notamment :

« ... Consacré à la présentation des règles d'énonciation et d'écriture correctes du langage scientifique, particulièrement en ce qui concerne les grandeurs des sciences physiques, les unités, les symboles, ce formulaire, rempli de renseignements pratiques, est, avant tout, un instrument de travail.

C'est en effet un outil dont ne peuvent se passer tous ceux qui s'occupent de science et de technique. Son actualité et son importance ont été amplifiées par la promulgation en France du décret du 3 mai 1961 rendant seul légal et obligatoire le Système international de Mesures, irrévocablement universel et abrogeant toutes les unités non cohérentes.

Il s'adresse donc aux professeurs, aux ingénieurs, aux physiciens, aux techniciens, et enfin aux élèves des grandes écoles, des facultés et de l'enseignement technique. Il doit être pour chacun d'eux la base de toute normalisation de l'expression scientifique et technique... »

Sommaire :

Tableau des espèces physiques. — Définitions, unités, dimensions : Grandeurs fondamentales, de la géométrie, de la cinématique, de la statistique, de la dynamique, de la thermodynamique, de l'électricité, de l'électromagnétisme, de la photométrie énergétique, de la photométrie physiologique, de l'acoustique énergétique, concernant les mélanges, titres, concentrations PH, de la radio-activité et de l'atomistique.

Grandeurs physiques et définitions normalisées de leur unité : Longueur, masse, temps, intensité de courant électrique. Température, intensité lumineuse. Angle plan, angle solide, fréquence, force, énergie, puissance. Viscosité dynamique, viscosité cinématique. Tension électrique, quantité d'électricité, résistance. Capacité, inductance, conductance, flux et induction magnétiques. Chaleur. Luminance, flux lumineux, éclairement. Vergence, gain.

Tableaux d'équivalence entre unités de même espèce : Longueurs. Aires, surfaces. Volumes, capacités. Masses. Vitesses. Vitesses angulaires. Angles plans, angles solides. Forces, poids. Pressions, contraintes, taux de travail. Energie. Puissances.

Constantes physiques universelles : Propriétés du vide absolu. Relativité. Atomistique. Physique moléculaire. Thermodynamique. Rayonnement énergétique.

Hydrologie de surface, par *M. Roche*, ingénieur hydrologue à l'Electricité de France, en coédition avec l'ORSTOM. Ed. Gauthier-Villars, Paris. — Un volume 18 × 26 cm, 430 pages, tableaux, figures et photographies (1963). Prix : cartonné, 75 F.

L'ouvrage est avant tout destiné aux spécialistes de l'hydrologie et plus spécialement de l'hydrologie tropicale. Les différents problèmes relatifs à cette discipline y sont traités dans la double optique de l'organisme d'études appliquées et de recherche fondamentale d'une part, du « Service hydrologique » à vocation organisationnelle d'autre part.

La rédaction de l'ouvrage est toutefois suffisamment claire et simple pour que ce dernier puisse être utilisé avec profit par tous les professionnels qui s'intéressent de près ou de loin aux problèmes de l'écoulement naturel des eaux, en particulier les spécialistes de l'agriculture, du génie rural, des travaux publics et des aménagements hydro-électriques. Il est indispensable aux étudiants qui veulent s'initier aux méthodes d'investigation modernes concernant l'hydrologie de surface.