Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 89 (1963)

Heft: 19

Artikel: Sur la propagation des vibrations transversales le long d'une poutre prismatique où la section subit une discontinuité sans changement du moment de résistance

Autor: Favre, Henry

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66352

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

89e année Lausanne, 21 septembre 1963 N° 19

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)
de la Section genevoise de la S.I.A.
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Garde, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre, arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION
D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua, architecte
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 34.—	Etranger	Fr. 38.—
Sociétaires	»	» 28.—	»	» 34.—
Prix du numéro	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande », N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES
Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 350.—
1/2 »	» 180.—
1/4 »	» 93.—
1/8 »	» 46.—

Adresse: Annonces Suisses S. A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales

SOMMAIRE

Sur la propagation des vibrations transversales le long d'une poutre prismatique où la section subit une discontinuité sans changement du moment de résistance, par Henry Favre, professeur à l'EPF, Zurich.
Actualité industrielle (25). — Bibliographie. — Divers. — Les congrès. — Société suisse des ingénieurs et des architectes. Documentation générale. — Nouveautés, informations diverses.

SUR LA PROPAGATION DES VIBRATIONS TRANSVERSALES LE LONG D'UNE POUTRE PRISMATIQUE OÙ LA SECTION SUBIT UNE DISCONTINUITÉ SANS CHANGEMENT DU MOMENT DE RÉSISTANCE

par Henry FAVRE, professeur à l'EPF, Zurich *

§ 1. Introduction

Lorsqu'une vibration transversale sinusoïdale se propage le long d'une poutre prismatique ou d'une barre cylindrique, et arrive en un point où la section subit une discontinuité, elle se décompose en une vibration réfléchie et une vibration transmise, toutes deux du même type que la première (en abrégé, nous parlerons de l'onde incidente et des ondes réfléchie et transmise). En outre, les différentes parties de la poutre — surtout celles voisines de la discontinuité — sont en général animées d'un mouvement périodique transversal, non amorti. Il s'agit d'une sorte d'*onde stationnaire*, qui vient se superposer aux trois *ondes progressives* dont nous venons de parler.

Ce phénomène a été mis en évidence par Mugiono [1] qui, dans un mémoire paru en 1955, a établi un système d'équations générales, permettant d'étudier l'influence de la discontinuité de la section d'une barre sur la propagation d'une vibration transversale incidente. Cet auteur a en outre examiné en détail, dans le mémoire cité, le cas particulier des *barres prismatiques, de section rectangulaire*, où la discontinuité consiste en une *brusque variation de la hauteur de cette section, la largeur restant par contre constante*. Des expériences adéquates lui ont permis de vérifier l'exactitude de ses calculs.

Ripperger et Abramson [2] ont étudié ensuite, à l'aide des mêmes équations générales, le cas des *barres circu-*

* Etude tirée de la « Plaquette du centenaire de la Section genevoise » de la Société suisse des ingénieurs et des architectes. 1963.

[1] Mugiono: *Messungen der Reflexion von Biegewellen an Querschnittssprüngen auf Stäben.* Acustica, Vol. 5, 1955, p. 182-186.

[2] E. A. Ripperger and H. Norman Abramson: *Reflection and Transmission of Elastic Pulses in a Bar at a Discontinuity in Cross Section.* Proc. of the Third Midwestern Conf. on Solid Mechanics, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1957, p. 135-145.

laires, où la discontinuité est due à une *variation du rayon de la section*. Ils ont également vérifié par des expériences les résultats de leurs calculs.

Dans la présente étude, qui est purement théorique, nous allons examiner un troisième cas particulier, celui de la propagation de vibrations transversales sinusoïdales le long d'une *barre prismatique, où les deux dimensions a, h de la section, supposée rectangulaire, subissent en un point de l'axe des variations* Δa, Δh *de signes contraires, choisies de façon que le moment de résistance reste constant*, c'est-à-dire telles que

$$\frac{1}{6}(a+\Delta a)(h+\Delta h)^2 = \frac{1}{6}ah^2, \tag{1}$$

h désignant la dimension parallèle à la vibration.

Ce cas présente un triple intérêt. D'abord, si un ingénieur doit — pour une raison ou une autre — prévoir une variation brusque de la section d'une poutre ou d'une pièce prismatique de machine qu'il projette, il a un avantage évident à maintenir le moment de résistance constant le long de l'axe, afin d'*éviter des discontinuités des tensions normales* $(\sigma_x)_{\substack{\max\\ \min}}$ *engendrées par une flexion d'origine quelconque*. De telles discontinuités risqueraient en effet d'entraîner des valeurs inacceptables pour ces tensions. Ensuite, dans le cas particulier étudié, nous verrons que *l'onde stationnaire définie plus haut n'existe pas*, ce qui évite une autre cause d'augmentation des tensions σ_x. Enfin, *le calcul des vibrations transversales se révèle beaucoup plus simple*, si la condition (1) est satisfaite, que lorsqu'elle ne l'est pas.

Après avoir rappelé quelques points essentiels de la théorie des vibrations transversales des barres (§ 2), nous établirons les formules relatives au cas d'une seule discontinuité satisfaisant à l'équation (1), et les discuterons (§ 3). Pour terminer, nous donnerons, dans le paragraphe 4, les formules relatives au cas où, en deux points de la barre, existent des discontinuités identiques, mais de sens inverses, satisfaisant chacune à la condition (1).

La présente étude a été faite dans le cadre de recherches expérimentales sur la propagation des ondes dans les solides, exécutées par le Laboratoire de Photoélasticité de l'E.P.F. et subventionnées par le Fonds national suisse de la recherche scientifique.

§ 2. Rappel de quelques points essentiels de la théorie des vibrations transversales des barres prismatiques

Soit tout d'abord une barre cylindrique ou prismatique, symétrique par rapport au plan x, z et faite d'une matière homogène et isotrope, satisfaisant à la loi de Hooke (fig. 1). Si cette barre est animée d'une vibration transversale parallèle au plan de symétrie, la ligne élastique est constamment située dans ce plan et peut être représentée par la fonction

$$\zeta = \zeta(x, t), \tag{2}$$

qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{EI}{\rho S}\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \tag{3}$$

où E désigne le module d'élasticité, ρ la masse spécifique, S l'aire de la section droite et I le moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe central y, perpendiculaire à l'axe de symétrie z.

Dérivons les deux membres de (3) par rapport au temps t et désignons par $V(x, t) = \partial\zeta/\partial t$ la vitesse transversale des points de la barre, nous obtenons l'équation :

$$\frac{EI}{\rho S}\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Remarquons d'abord que (4) admet la solution particulière [3] :

$$V = Ce^{i(pt - fx + \varepsilon)} = C[\cos(pt - fx + \varepsilon) + i\sin(pt - fx + \varepsilon)], \tag{5}$$

où

$$f = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}}\, p^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

La fonction (5) représente une « onde sinusoïdale de vitesse » se propageant dans le sens des x croissants. Les quantités $p/(2\pi)$, $f/(2\pi) = 1/\lambda$ et ε désignent respectivement la fréquence de la vibration, l'inverse de la longueur d'onde λ, et la phase initiale pour $x = 0$. C est une constante réelle ou imaginaire. Cette onde se propage avec une vitesse

$$c = \frac{p}{f} = \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho S}}\, p^{\frac{1}{2}} = 2\pi\sqrt[2]{\frac{EI}{\rho S}}\,\lambda^{-1}, \tag{7}$$

qui dépend de la pulsation p ou de la longueur d'onde λ : il y a *dispersion* [4].

Cherchons ensuite une solution plus générale, en posant

$$V(x, t) = v(x)\, e^{ipt}. \tag{8}$$

En substituant dans (4), on obtient après division par e^{ipt}, pour la fonction $v(x)$, l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{EI}{\rho S}\frac{d^4 v}{dx^4} = p^2 v. \tag{9}$$

[3] Ce sont — il va de soi — les *parties réelles* des quantités imaginaires utilisées dans les calculs, qui représentent effectivement les grandeurs intervenant dans le problème étudié.

[4] L'équation (4) et la solution (5) supposent essentiellement que la longueur d'onde λ soit grande par rapport aux dimensions de la section, ce que nous admettrons constamment dans la suite de ce mémoire.

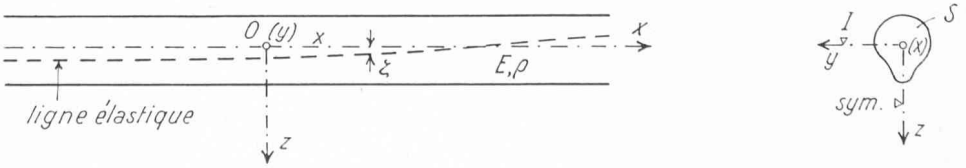

Fig. 1. — Vibration transversale ζ — d'une barre cylindrique ou prismatique — parallèle au plan de symétrie x, z.

dont la solution générale est

$$v(x) = A_1 e^{-ifx} + A_2 e^{+ifx} + B_1 e^{-fx} + B_2 e^{+fx}, \quad (10)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant des constantes arbitraires, réelles ou imaginaires. En introduisant cette valeur dans (8), nous obtenons :

$$V(x, t) = A_1 e^{i(pt-fx)} + A_2 e^{i(pt+fx)} + \quad (11)$$
$$+ B_1 e^{-fx}(\cos pt + i \sin pt) + B_2 e^{+fx}(\cos pt + i \sin pt).$$

Le premier des quatre termes du second membre représente une onde (de vitesse) se propageant dans le sens des x croissants, le deuxième terme, une onde se propageant dans le sens contraire [5]. Le troisième terme correspond à une onde stationnaire (de vitesse) dont l'amplitude tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment. Enfin, le quatrième représente une onde stationnaire dont l'amplitude tend vers zéro lorsque x décroît.

— Examinons maintenant la transformation subie par une onde incidente, se propageant dans le sens des x croissants, lorsqu'elle arrive en un point O ($x = 0$), où la section subit une discontinuité (fig. 2). Nous supposerons que la première partie de la barre ($x \leqq 0$) et la seconde ($x \geqq 0$) admettent le même plan de symétrie x, z.

Désignons respectivement par E_1, ρ_1, S_1, I_1 et E_2, ρ_2, S_2, I_2 les constantes caractéristiques de ces parties et par $v_1(x), v_2(x)$ les fonctions $v(x)$ relatives à chacune d'elles. Nous basant sur la solution (10), nous pouvons poser :

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= e^{-if_1x} + Re^{+if_1x} + R'e^{+f_1x}, \\ v_2 &= De^{-if_2x} + D'e^{-f_2x}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

où $$f_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho_1 S_1}{E_1 I_1}}\, p^{\frac{1}{2}}, \qquad f_2 = \sqrt[4]{\frac{\rho_2 S_2}{E_2 I_2}}\, p^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

et où R, R', D, D' désignent des constantes. Les deux parties de la barre sont supposées suffisamment longues pour qu'aucune réflexion à leurs extrémités opposées au point O n'intervienne dans le phénomène étudié.

Le terme e^{-if_1x} représente, au facteur e^{ipt} près, *l'onde de vitesse incidente donnée, dont on suppose l'amplitude égale à l'unité.* Les termes Re^{+if_1x} et De^{-if_2x} représentent respectivement — toujours au facteur e^{ipt} près — *l'onde réfléchie par la discontinuité dans la première partie de la barre* et *l'onde transmise dans la seconde.* Quant aux termes $R'e^{+f_1x}$, $D'e^{-f_2x}$, ils correspondent à *l'onde stationnaire* dont il a déjà été question § 1, et qui est esquissée dans la figure 3.

Pour déterminer les coefficients R, R', D, D' (qui sont en général imaginaires, exceptionnellement réels ou nuls), remarquons d'abord que, pour toute section d'abscisse x, positive ou négative, existent les relations :

$$\omega = \frac{dv}{dx}, \quad M = -\frac{EI}{ip}\frac{d^2v}{dx^2}, \quad Q = -\frac{EI}{ip}\frac{d^3v}{dx^3}, \quad (14)$$

où $\omega(x)$ désigne — au facteur e^{ipt} près — la vitesse de rotation de la section, $M(x)$ le moment fléchissant et $Q(x)$ l'effort tranchant.

D'autre part, en affectant comme précédemment de l'indice 1 les grandeurs concernant la partie $x \leqq 0$ de la barre, et de l'indice 2 celles concernant la partie $x \geqq 0$, nous avons, pour $x = 0$, les quatre conditions :

$$v_1 = v_2, \quad \omega_1 = \omega_2, \quad M_1 = M_2, \quad Q_1 = Q_2. \quad (15)$$

[5] Soulignons qu'il s'agit ici — comme dans toute la suite de ce mémoire — d'*ondes de vitesse* et non des ondes de déplacement qui se produisent simultanément, les secondes étant liées aux premières par la relation $V = \partial\eta/\partial t$. Le choix de la vitesse V, et non du déplacement η, comme principale inconnue du problème, est justifié par le fait que l'énergie transmise par une onde sinusoïdale quelconque se propageant le long d'une barre est directement proportionnelle à $(V^2)_{max}$.

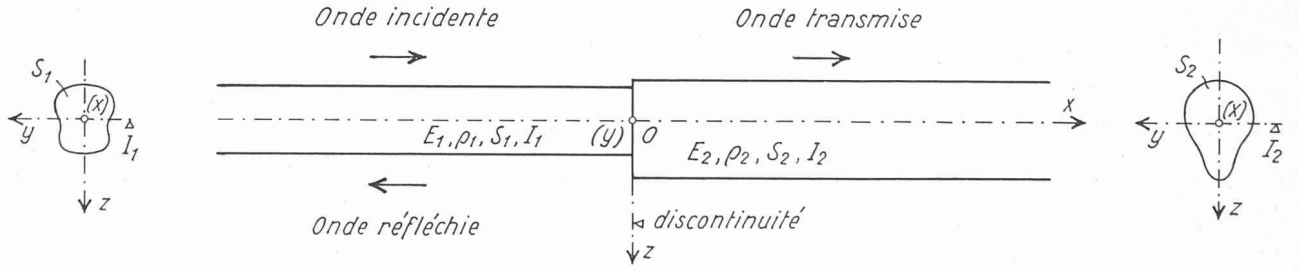

Fig. 2. — Barre cylindrique ou prismatique, symétrique par rapport à un plan x, z, et dont la section droite subit une discontinuité en un point O de l'axe.

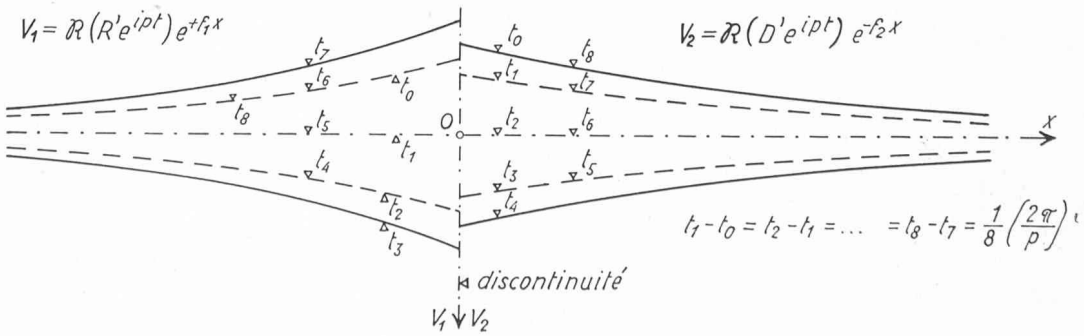

Fig. 3. — Onde stationnaire produite, au voisinage du point O où la section de la barre est discontinue, par une vibration incidente transversale.

Si l'on introduit successivement les valeurs (12) de v_1, v_2 dans les formules (14), puis les valeurs de ω_1, ω_2, M_1, M_2, Q_1, Q_2 ainsi obtenues, ainsi que celles de v_1, v_2, dans les conditions (15), on obtient finalement le système de quatre équations algébriques linéaires [6] :

$$\left.\begin{aligned} R + R' - D - D' &= -1, \\ iR + R' + iKD + KD' &= i, \\ -R + R' + \psi D - \psi D' &= 1, \\ -iR + R' - iK\psi D + K\psi D' &= -i, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

où $$K = \frac{f_2}{f_1} = \sqrt[4]{\rho_2 S_2 E_1 I_1 / (\rho_1 S_1 E_2 I_2)}, \quad (17)$$

$$\psi = \frac{f_2^2 E_2 I_2}{f_1^2 E_1 I_1} = \sqrt[2]{\rho_2 S_2 E_2 I_2 / (\rho_1 S_1 E_1 I_1)}. \quad (18)$$

En substituant dans les relations (12) les valeurs de R, R', D, D' tirées du système (16), on obtient, après multiplication par e^{ipt}, les fonctions $V_1(x, t)$, $V_2(x, t)$, dont les parties réelles représentent la solution du problème. On remarquera que les coefficients R et D étant en général imaginaires, les vibrations engendrées, au point O, par les ondes réfléchie et transmise, n'auront — sauf dans certains cas exceptionnels — pas la même phase que celle de la vibration engendrée en ce point par l'onde incidente.

§ 3. Cas où la section d'une barre prismatique rectangulaire subit une discontinuité sans changement du moment de résistance, et où les deux parties de la barre sont faites de la même matière

Désignons par a_1, h_1 la largeur et la hauteur de la section droite de la première partie ($x \leq 0$) de la barre, et par a_2, h_2 les quantités analogues relatives à la seconde partie ($x \geq 0$). Nous avons ici (fig. 4) :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{6}{1} a_1 h_1^2 = \frac{1}{6} a_2 h_2^2, \quad E_1 = E_2 = E, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho, \\ &S_1 = a_1 h_1, \quad I_1 = \frac{a_1 h_1^3}{12}, \quad S_2 = a_2 h_2, \quad I_2 = \frac{a_2 h_2^3}{12}, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

et les formules (17), (18) donnent, pour les constantes K et ψ, les valeurs :

$$K = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/4}, \quad (20) \qquad \psi = \frac{a_2 h_2^2}{a_1 h_1^2} = 1. \quad (21)$$

[6] Voir par exemple Mugiono, *loc. cit.*, équations (9).

En posant $\psi = 1$ dans les équations (16), et en résolvant ce système par rapport aux coefficients cherchés R, R', D, D', on obtient :

$$R = \frac{1-K}{1+K}, \quad D = \frac{2}{1+K}, \quad R' = D' = 0, \quad (22)$$

et les expressions des vitesses V_1, V_2 deviennent, en vertu de (8), (12), (13), (19) et (22) :

$$\left.\begin{aligned} V_1(x, t) &= v_1(x)\, e^{ipt} = e^{i(pt - f_1 x)} + \frac{1-K}{1+K} e^{i(pt + f_1 x)}, \\ V_2(x, t) &= v_2(x)\, e^{ipt} = \frac{2}{1+K} e^{i(pt - f_2 x)}, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

où $$f_1 = \left(\frac{3\rho}{E}\right)^{1/4} \left(\frac{2p}{h_1}\right)^{1/2}, \quad f_2 = \left(\frac{3\rho}{E}\right)^{1/4} \left(\frac{2p}{h_2}\right)^{1/2}. \quad (24)$$

Aux signes près, les coefficients R et D représentent les *amplitudes des ondes (de vitesse) réfléchie et transmise*, l'amplitude de l'onde incidente étant choisie comme unité de vitesse.

Ainsi, et comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, il n'y a *pas d'onde stationnaire* (puisque $R' = D' = 0$). De plus, le coefficient D étant réel et positif, *la phase de la vibration transversale, engendrée au point O par l'onde transmise, est la même que celle de la vibration engendrée en ce point par l'onde incidente. Les phases des vibrations transversales analogues, engendrées au point O par les ondes incidente et réfléchie, sont les mêmes si* $0 < K < 1$ (car R est dans ce cas réel et positif) ; *elles diffèrent par contre de* $\pm \pi$, *si* $1 < K < \infty$ (R étant alors réel et négatif).

Les deux courbes de la figure 5 représentent, d'après (22), les valeurs des coefficients R et D, c'est-à-dire des amplitudes des ondes (de vitesse) réfléchie et transmise, en fonction du rapport $K = (h_1/h_2)^{1/2} = (a_2/a_1)^{1/4}$. Il va de soi qu'une faible partie de ces courbes interviendra dans les applications, où K est nécessairement de l'ordre de 1 (pour la barre représentée figure 4, on a $K = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$).

Il est maintenant facile de calculer, pour l'unité de temps, *l'énergie E_r réfléchie* par la discontinuité et *l'énergie E_t transmise* par celle-ci. *Si l'on prend comme unité l'énergie incidente arrivant par seconde à la discontinuité*, on a :

$$E_r = R^2 = \left(\frac{1-K}{1+K}\right)^2, \quad E_t = 1 - E_r = \frac{4K}{(1+K)^2}. \quad (25)$$

On peut aussi calculer cette dernière grandeur en utilisant les relations (20), (22), (24) et en remarquant que

$$E_t = D^2 \frac{S_2}{S_1} \frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{2}{1+K}\right)^2 \frac{a_2 h_2}{a_1 h_1} \frac{f_1}{f_2} = \frac{4K}{(1+K)^2},$$

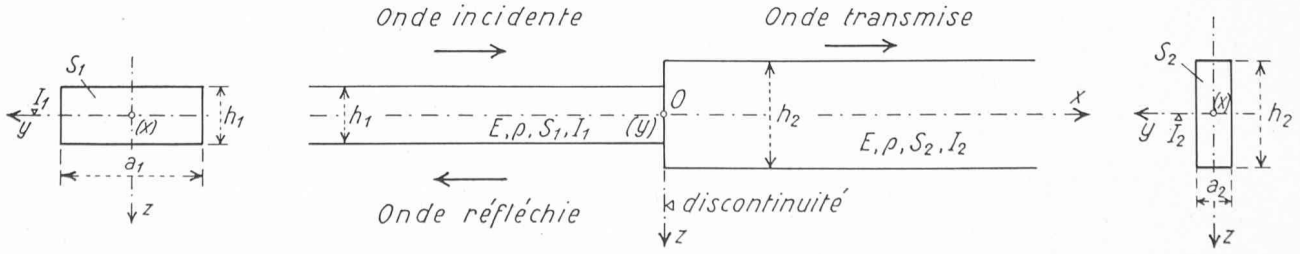

Fig. 4. — Barre prismatique rectangulaire, symétrique par rapport au plan x, z, et dont la section droite subit, au point O de l'axe, une discontinuité sans changement du moment de résistance.

où $c_2 = p/f_2$, $c_1 = p/f_1$ désignent les vitesses de propagation des ondes dans les deux parties de la barre. L'énergie, par unité de temps, propagée par une vibration transversale sinusoïdale le long d'une barre est en effet proportionnelle au carré de la vitesse maximum (1, R ou D) des particules. Elle est en outre proportionnelle à l'aire de la section, à la vitesse de propagation et à la masse spécifique (qui a ici la même valeur pour les deux parties). On a évidemment $0 \leq E_r \leq 1$, $0 \leq E_t \leq 1$. Les valeurs de E_r et E_t sont représentées graphiquement, en fonction de K, par les deux courbes de la figure 6. Ici également, seules les portions des courbes dont les abscisses diffèrent peu de l'unité interviendront dans les applications.

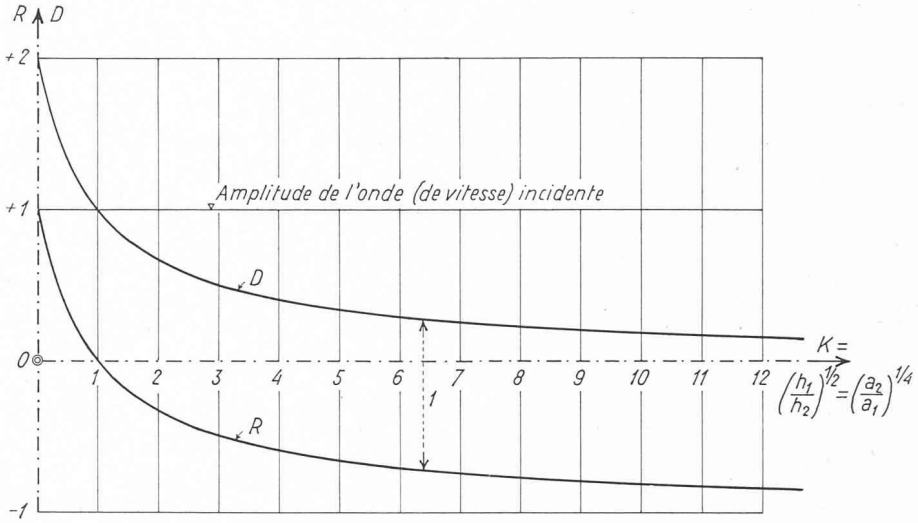

Fig. 5. — Amplitudes R et D des ondes (de vitesse) réfléchie et transmise par la discontinuité définie § 3, en fonction du rapport $K = (h_1/h_2)^{1/2} = (a_2/a_1)^{1/4}$ (l'amplitude de l'onde incidente a été choisie comme unité de vitesse).

— Pour permettre au lecteur d'apprécier la simplicité des formules (22), obtenues en posant $\psi = 1$, voici, à titre de comparaison, les valeurs des coefficients R et D relatives au cas général, où ψ est différent de l'unité [7] :

$$R = \frac{2\psi(1-K^2) - iK(1-\psi)^2}{2\psi(1+K^2) + K(1+\psi)^2}, \tag{26}$$

$$D = \frac{1+\psi}{2\psi(1+K^2)} \Big\{ (1+K)(1+B^*) + A^*(1-K) + \\ + i\,[(1-K)(1+B^*) - A^*(1+K)] \Big\}, \tag{27}$$

où
$$A^* = \frac{2\psi(1-K^2)}{2\psi(1+K^2) + K(1+\psi)^2},$$

$$B^* = \frac{-K(1-\psi)^2}{2\psi(1+K^2) + K(1+\psi)^2}.$$

Ces valeurs de R et D sont imaginaires, et on verrait qu'il en est de même de R' et D'. Ceci confirme le fait que, lorsque ψ est différent de l'unité (cas général), il existe une onde stationnaire, et les vibrations engendrées en O par les ondes incidente, réfléchie et transmise, n'ont pas la même phase.

[7] Voir Ripperger et Abramson, *loc. cit.*, form. (23) et (28). La première de ces deux formules a déjà été publiée en 1955 par Mugiono, *loc. cit.*, form. (10).

Relevons encore le fait que les formules (22), (23) et (25) ne sont pas seulement applicables au cas particulier défini par la figure 4 et les relations (19), mais qu'*elles le sont aussi toutes les fois que la constante* ψ *est égale à l'unité*, ce qui exige simplement, d'après (18), que :

$$\psi = \sqrt[2]{\rho_2 S_2 E_2 I_2 / (\rho_1 S_1 E_1 I_1)} = 1. \tag{28}$$

Le cas traité ici répond donc à une définition plus générale que celle que nous avons donnée au début de ce paragraphe.

Remarque. E_r et E_t peuvent aussi être considérés comme les *coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie, par la discontinuité.* Or E_r et E_t ne changent pas de valeur si l'on remplace K par $1/K$ dans les formules (25). Cela signifie que les coefficients en question restent les mêmes si l'onde incidente, au lieu d'arriver au point O en se propageant de gauche à droite dans la partie de la barre située à gauche de ce point (fig. 4), y arrive en se propageant (en sens contraire) dans la partie de la barre située à droite de O. En d'autres termes, *les coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie par la discontinuité sont indépendants de la partie de la barre où se propage l'onde incidente.* En calculant d'autre part $E_r = |R|^2$ et $E_t = 1 - |R|^2$ à l'aide de l'expression générale (26), on s'aperçoit que $E_r(K, \psi) = E_r(K^{-1}, \psi^{-1})$, $E_t(K, \psi) = E_t(K^{-1}, \psi^{-1})$,

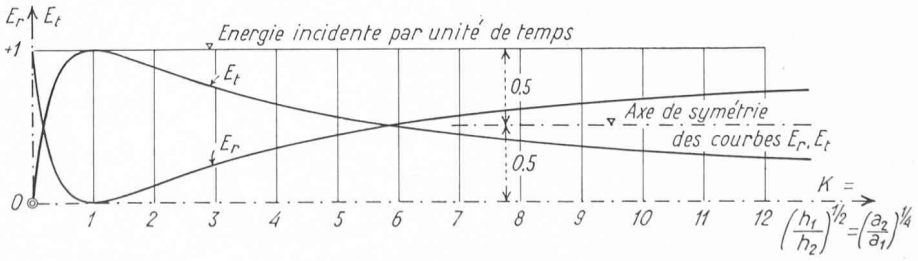

Fig. 6. — Energies réfléchie et transmise E_r, E_t (par unité de temps) par la discontinuité définie § 3, en fonction du rapport $K = (h_1/h_2)^{1/2} = (a_2/a_1)^{1/4}$ (l'énergie incidente a été choisie comme unité).

ce qui montre que *la propriété énoncée est également applicable au cas de la barre représentée figure* 2. Elle l'est d'ailleurs aussi dans le cas des *vibrations longitudinales* se propageant le long d'une barre cylindrique ou prismatique, et dans celui des *vibrations de torsion* se propageant le long d'une barre circulaire, lorsque la section est discontinue en un point de l'axe, comme on le reconnaît immédiatement en appliquant les formules classiques relatives à ces deux cas, formules qui sont identiques à (25), à la signification de K près.

§ 4. Cas où la section d'une barre prismatique rectangulaire subit, en deux points de l'axe, des discontinuités égales, mais de sens inverses, sans changement du moment de résistance, et où les trois parties de la barre sont faites de la même matière

La figure 7 est une vue de la barre, dont chacune des trois parties est un prisme de section rectangulaire. Cette figure montre le système d'axes choisi et précise les notations utilisées. La première et la troisième parties ont la même section ($a_1 = a_3$, $h_1 = h_3$). La longueur de la partie intermédiaire est désignée par l.

Nous avons ici :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{6} a_1 h_1^2 = \frac{1}{6} a_2 h_2^2 = \frac{1}{6} a_3 h_3^2, \quad E_1 = E_2 = E_3 = E, \\ &\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho, \quad S_1 = S_3 = a_1 h_1, \quad I_1 = I_3 = \frac{a_1 h_1^3}{12}, \\ &S_2 = a_2 h_2, \qquad I_2 = \frac{a_2 h_2^3}{12}, \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

et nous pouvons poser, en nous basant sur la solution générale (10) [8] :

$$\left.\begin{aligned} v_1(x) &= e^{-if_1 x} + R_1 e^{+if_1 x} + C_1 e^{+f_1 x}, \\ v_2(x) &= A_2 e^{-if_2 x} + R_2 e^{+if_2 x} + C_2 e^{-f_2 x} + C_2' e^{f_2(x-l)}, \\ v_3(x) &= A_3 e^{-if_3(x-l)} + C_3 e^{-f_3(x-l)}, \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

où les fonctions v_1, v_2, v_3 désignent — au facteur e^{ipt} près — les vitesses transversales des points des trois parties $x \leqq 0$, $0 \leqq x \leqq l$, $x \geqq l$, et où $R_1, C_1, A_2, R_2, C_2, C_2', A_3, C_3$ sont des coefficients constants, imaginaires ou réels. Quant aux quantités f_1, f_2, f_3, elles ont les valeurs suivantes (voir aussi les formules (24)) :

[8] Voir aussi MUGIONO, *loc. cit.*, formules (12).

$$f_1 = f_3 = \left(\frac{3\rho}{E}\right)^{1/4} \left(\frac{2p}{h_1}\right)^{1/2}, \quad f_2 = \left(\frac{3\rho}{E}\right)^{1/4} \left(\frac{2p}{h_2}\right)^{1/2}. \quad (31)$$

Les deux parties extrêmes de la barre sont supposées suffisamment longues pour qu'aucune réflexion aux extrémités opposées aux points O et O' n'intervienne dans le phénomène étudié.

En substituant successivement les expressions (30) de $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$ dans les formules (14), puis en appliquant des conditions analogues à (15) à chacun des points de discontinuité O et O', à savoir :

$$\left.\begin{aligned} &v_1 = v_2, \quad \omega_1 = \omega_2, \quad M_1 = M_2, \quad Q_1 = Q_2, \quad (\text{pour } x = 0) \\ &v_2 = v_3, \quad \omega_2 = \omega_3, \quad M_2 = M_3, \quad Q_2 = Q_3, \quad (\text{pour } x = l) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

on obtient un système de huit équations algébriques linéaires, permettant de déterminer les coefficients inconnus $R_1, \ldots, C_3$. On trouve pour ces derniers, sans négliger aucun terme dans les équations :

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= D^{-1} (1 - K^2) (e^{-if_2 l} - e^{+if_2 l}), \\ A_2 &= -2D^{-1} (1 + K) e^{+if_2 l}, \\ R_2 &= 2 D^{-1} (1 - K) e^{-if_2 l}, \qquad A_3 = -4 K D^{-1}, \\ C_1 &= C_2 = C_2' = C_3 = 0 ; \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

où $$D = (1 - K)^2 e^{-if_2 l} - (1 + K)^2 e^{+if_2 l}, \quad (34)$$

et où, d'autre part :

$$K = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/4} = \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{1/4} \quad (35)$$

(pour les deux discontinuités, la constante ψ, définie par la relation (18), est égale à l'unité).

On constate qu'ici également, *il n'y a pas d'onde stationnaire* (ni au voisinage de l'une, ni au voisinage de l'autre discontinuité), puisque C_1, C_2, C_2' et C_3 sont nuls. Par contre, les coefficients R_1, A_2, R_2, A_3 étant imaginaires, les vibrations engendrées au point O par les deux ondes progressives sinusoïdales arrivant en ce point et les deux ondes du même type qui en partent, auront en général des phases différentes les unes des autres. Il en sera de même pour les vibrations engendrées au point O' par l'onde qui arrive en ce point et par les deux ondes qui en partent. A l'aide des formules (33) et (34), il serait facile de déterminer les amplitudes et les phases de toutes ces vibrations.

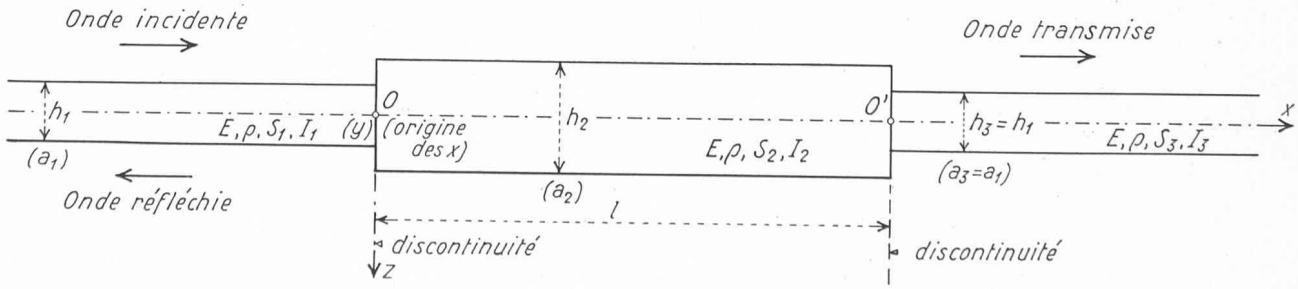

Fig. 7. — Barre prismatique rectangulaire, symétrique par rapport au plan x, z, et dont la section droite subit, aux points O et O', des discontinuités égales, mais de sens inverses, sans changement du moment de résistance.

Nous nous contenterons de calculer, pour l'unité de temps, l'énergie E_r réfléchie, dans la première partie de la barre, par la discontinuité O, et l'énergie E_t transmise, dans la troisième partie, par la discontinuité O', en prenant l'énergie de l'onde incidente arrivant en O comme unité. Les deux grandeurs E_r et E_t sont ici respectivement égales aux carrés des amplitudes des ondes (de vitesse) correspondantes, c'est-à-dire égales aux carrés des modules des coefficients complexes R_1 et A_3, et ont pour valeurs :

$$\left.\begin{aligned} E_r &= |R_1|^2 = \frac{(1-K^2)^2 \sin^2(f_2 l)}{4K^2 + (1-K^2)^2 \sin^2(f_2 l)}, \\ E_t &= |A_3|^2 = \frac{4K^2}{4K^2 + (1-K^2)^2 \sin^2(f_2 l)}. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

On peut vérifier que l'on a bien $E_r + E_t = 1$ (énergie incidente par unité de temps), comme l'exige le principe de conservation de l'énergie. Il est également intéressant de constater que $E_r = 0$, si $f_2 l = k\pi$ (k étant un nombre entier positif), c'est-à-dire — puisque $f_2/(2\pi) = 1/\lambda_2$ — si $l = k(\lambda_2/2)$. Pour de telles valeurs de l, on a $E_t = 1$. *Tout se passe donc — en ce qui concerne la réflexion et la transmission de l'énergie — comme si les deux discontinuités n'existaient pas.* L'énergie réfléchie est aussi nulle, et l'énergie transmise égale à l'unité, lorsque $K = 1$, ce qui est évident, car dans ce cas *il n'y a effectivement pas de discontinuité.* Remarquons encore que pour $l = k(\lambda_2/2) + \lambda_2/4$, on a $f_2 l = k\pi + \pi/2$, $\sin^2(f_2 l) = 1$, et E_r, E_t passent par les valeurs extrêmes :

$$(E_r)_{\max} = \left(\frac{1-K^2}{1+K^2}\right)^2, \qquad (E_t)_{\min} = \frac{4K^2}{(1+K^2)^2}. \quad (37)$$

En comparant ces valeurs à celles données par les formules (25) du § 3, on constate que si $l = k(\lambda_2/2) + \lambda_2/4$, *tout se passe, en ce qui concerne la réflexion et la transmission de l'énergie, comme si la section de la barre n'avait qu'une seule discontinuité, mais où le rapport K aurait la valeur K^2.*

Relevons pour terminer que les principales formules obtenues, à savoir (33), (34) et (36), ne sont pas seulement applicables au cas particulier défini par la figure 7 et les relations (29), *mais qu'elles le sont aussi toutes les fois que la constante ψ, définie par (18), est égale à 1 pour les deux discontinuités,* c'est-à-dire lorsque :

$$\begin{aligned} \psi &= \sqrt[2]{\rho_2 S_2 E_2 I_2 / (\rho_1 S_1 E_1 I_1)} = \\ &= \sqrt[2]{\rho_2 S_2 E_2 I_2 / (\rho_3 S_3 E_3 I_3)} = 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Zurich, le 31 janvier 1963.

0.61.3 (494)

ACTUALITÉ INDUSTRIELLE (25)

Journées 1963 du Mont-Pèlerin

Aspects scientifiques et économiques de la recherche

Organisées conjointement, les 4 et 5 mai, par :

— la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes de Lausanne ;
— le Groupe des ingénieurs de l'industrie de la SIA, section genevoise, Genève ;
— la Société d'études économiques et sociales, Lausanne ;
— le Cercle d'études économiques et sociales du Haut-Léman, Vevey,

ces Journées 1963 du Mont-Pèlerin ont connu un très beau succès, puisque plus de 80 personnes y participèrent.

Rappelons que les Journées du Mont-Pèlerin ont été créées en 1959 par le Groupe des ingénieurs de l'industrie de la SIA, section genevoise, et qu'elles ont eu lieu ensuite chaque année, répondant à un réel besoin et traitant successivement les thèmes suivants :

1959 : L'ingénieur suisse et l'Europe.
1960 : L'Automatique et l'homme.
1961 : L'interdépendance de l'économie et de la technique.
1962 : L'ingénieur et l'économiste dans l'entreprise, leur formation et leur collaboration.

Les Journées 1964 auront lieu les 25 et 26 avril et traiteront du planning dans l'entreprise.

Nous donnons un compte rendu de ces journées, en rappelant que le texte intégral des conférences et des interventions sera publié dans la *Revue économique et sociale*, qui présentera, à cet effet, un numéro spécial, comme ce fut le cas ces deux dernières années.

Introduction de M. Eric Choisy, Dr h. c., ingénieur, président de Grande-Dixence S.A., Lausanne.

M. Choisy montre que « Capital et Travail » ne suffisent plus à expliquer la croissance économique que connaît actuellement notre société ; d'autres facteurs interviennent, dont notamment la recherche, qui conditionne le même progrès.

Notre industrie, clef de voûte de notre économie (machines et chimie), ne pourrait se maintenir sans la recherche. On constate, cependant, un certain ralentissement dû à ce qu'on pourrait appeler la fin de la « période artisanale de la recherche scientifique ».

Il est actuellement indispensable pour la recherche de disposer de moyens financiers importants, d'où intervention nécessaire de l'État, ce qui implique quelques dangers (application militaire, aspects spectaculaires au détriment de branches plus discrètes, par exemple la biologie).

Les crédits consacrés à la recherche doivent être attribués non par des politiciens mais par des savants.

Malgré ces précautions, il existe des « privilégiés » ; par exemple, on dispose de crédits considérables pour les recherches sur la matière mais de fort modestes crédits pour le développement des villes et pour les études sur l'alimentation.

En passant, on peut signaler que ces études sur l'alimentation — qui devraient porter sur la production, les moyens de conservation et la protection des aliments — occupent actuellement en Suisse environ 500 chercheurs.

Dans la recherche fondamentale, la liberté de recherche apparaît comme une condition nécessaire. Par contre, on peut envisager une certaine orientation ou coordination dans la recherche appliquée.

Il y a lieu également de remarquer que certaines recherches, qui présentent un intérêt général, méritent amplement d'être développées sur le plan international ; comme par exemple les recherches sur la corrosion des coques de navires, la pollution de l'atmosphère, la documentation.

L'un des caractères de la recherche actuelle est la polyvalence, dans le sens qu'un résultat obtenu dans un domaine