Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 89 (1963)

Heft: 14

Artikel: Dynamique de la chaîne linéaire mono-atomique dans l'approximation

harmonique

Autor: Vittoz, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66343

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BULLETIN TECHNIQUE **DE LA SUISSE ROMANDE**

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.) de la Section genevoise de la S.I.A. de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique

de l'Université de Lausanne) et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève Membres:

Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du «Bulletin technique»

Membres: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre, arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION

D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua,

Rédaction et Editions de la S. A. du «Bulletin technique»

Tirés à part, renseignements Avenue de Cour 27, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 34.—	Etranger	Fr. 38.—
Sociétaires	>>	» 28.—	>>	» 34.—
Priv du numéro	**	w 1.60		

Chèques postaux: «Bulletin technique de la Suisse romande », N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à : Imprimerie La Concorde Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES

Tar	if des	aı	nn	on	ce	s:		
1/1	page						Fr.	350.—
1/2							>>	180.—
1/4	>>						>>	93.—
1/8	>>		٠		٠		>>	46.—



Adresse: Annonces Suisses S. A. Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales

Dynamique de la chaîne linéaire mono-atomique dans l'approximation harmonique, par B. Vittoz, professeur à l'EPUL, La couverture de l'orangerie du nouvel établissement horticole de la ville de Lausanne à la Bourdonnette, par G. Roubakine, ingénieur EPUL.

Les congrès. — Organisation et formation professionnelle. — Carnet des concours.

Documentation générale. Nouveautés, informations diverses.

DYNAMIQUE DE LA CHAÎNE LINÉAIRE MONO-ATOMIQUE DANS L'APPROXIMATION HARMONIOUE

par B. VITTOZ, professeur à l'Ecole polytechnique de Lausanne *

1. Introduction

L'étude de la dynamique des cristaux est extrêmement importante pour les propriétés thermiques, électriques et évidemment dynamiques des solides. Afin de simplifier, nous considérons un réseau cristallin à une dimension constitué d'un seul type d'atomes, c'est la chaîne linéaire mono-atomique. L'article qui suit est une partie d'un exposé fait le 2 mars à l'EPUL à un colloque de Physique du solide et de Résonance nucléaire.

Comme références de base, citons Ziman 1, Peierls 2 et Brillouin 3.

2. Chaîne mono-atomique et conditions cycliques

La chaîne contient N atomes identiques repérés par l'indice m. A l'équilibre, la position de chaque atome

$$(1) x_m = \stackrel{\rightarrow}{ma} \quad \text{ou} \quad x_m^0 = ma$$

a = distance interatomique = dimension de lamaille élémentaire.

 $m = \text{nombre entier} + 1, \dots, N.$

Dans l'espace à trois dimensions et pour un réseau primitif (1 atome par maille élémentaire), nous aurions :

(1 bis)
$$\vec{x_m}^0 = m^i \vec{a_i}$$
; somme sur $i = 1, 2, 3$

où $a_i = \text{vecteurs de base} = \text{côtés de la maille élémen-}$

Si les atomes sont déplacés de leur position d'équilibre, on a:

(2)
$$x_m = ma + u_m$$
 ou $(2 bis) \overrightarrow{x}_m = m \overrightarrow{a}_i + \overrightarrow{u}_m$

Périodicité des positions d'équilibre : Elle n'est possible que si la chaîne est infinie afin de négliger l'effet des extrémités et de pouvoir considérer que tous les

* Cette étude est tirée du Recueil de travaux offert au professeur A. Stucky, en hommage de reconnaissance, sur l'initiative ciation amicale des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de Lausanne, le 27 octobre 1962, l'année de son 70e anniversaire.

atomes sont identiquement placés dans le réseau (mêmes voisins). Pour cela, on répète périodiquement à gauche et à droite de la chaîne initiale un nombre infini de chaînes identiques et on pose pour les déplacements et les moments conjugués :

(3)
$$\begin{cases} u_{m \pm N} = u_m \\ p_{m \pm N} = p_m \end{cases}$$
 conditions cycliques

On peut se représenter ces conditions cycliques en refermant la chaîne initiale sur elle-même selon une boucle : l'atome N+1 sera l'atome 1, l'atome N+m sera l'atome m^* . Nous supposons les conditions cycliques (3) satisfaites quel que soit le modèle utilisé. L'hamiltonien du système sera :

(4)
$$H(u_m, p_m) = E_c(p_m) + V(u_m)$$

où: E_c = énergie cinétique totale. V = énergie potentielle totale.

L'état du système sera représenté par la fonction d'onde ψ :

$$|\psi\rangle = |u_1 \ldots u_m \ldots u_N\rangle$$

Si l'on effectue une permutation cyclique des déplacements, c'est-à-dire attribuer le déplacement u_2 à l'atome n° 1, le déplacement u_{m+1} à l'atome n° m, etc., l'hamiltonien (4) reste inchangé, ainsi que l'état du système. Mais deux états identiques sont représentés par deux fonctions ψ identiques à un facteur de phase près :

$$|u_1 \ldots u_m \ldots u_N\rangle = |u_2 \ldots u_{m+1} \ldots u_{N+1}\rangle e^{2i\pi q}$$

et pour une translation m' quelconque:

(5)
$$| u_1 \dots u_m \dots u_N > =$$

= $| u_{1+m'} \dots u_{m+m'} \dots u_{m'+N} > e^{2 i \pi q m}$

Nous dirons que la fonction obéissant à la relation (5) appartient au mode q, qui, pour l'instant, est un nombre quelconque (non entier, car (5) serait une identité évidente). Mais si l'on opère une translation N, on retrouve identiquement la chaîne primitive $(u_{m+N} = u_m)$:

$$e^{2i\pi qN}=1$$

d'où:

(6)
$$q = \frac{n}{N}$$
 ; $n = \text{entier}$

donc les modes q sont quantifiés:

$$(7) \Delta q_{min} = {}^{1}/_{N}$$

Ajoutons à q un nombre entier quelconque h:

$$(8) q' = q + h$$

Si la relation (5) est vérifiée pour le mode q, elle l'est encore pour le mode q' (car hm' =entier); donc le mode q + h est le même que le mode q. On peut donc limiter le domaine de définition de q à tout intervalle de longueur unité. Par souci de symétrie, on prend :

(9)
$$-\frac{1}{2} < q \le \frac{1}{2}$$

Le mode -1/2 est le même que le mode +1/2, car ces modes diffèrent d'un nombre entier. Dans l'espace à

trois dimensions, qm devient q_im^i , où la sommation doit s'effectuer sur l'indice identique répété haut et bas.

Posons:

$$qm \stackrel{\rightarrow}{=} \stackrel{\rightarrow}{q} \stackrel{\rightarrow}{.m}$$
 ou $q_i m^i = \stackrel{\rightarrow}{q} \stackrel{\rightarrow}{.m}$ pour le réseau à trois dimensions.

Avec:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{ma} = \overrightarrow{m^ia_i} \quad \overrightarrow{q} = \overrightarrow{qb} = \overrightarrow{q_ib^i}$$
(7) $\Delta q_{min} = {}^1/{}_N \quad \text{ou} \quad \Delta q_{i,min} = {}^1/{}_{Ni}$

$$N_i = \text{nombre de mailles selon } x^i.$$

On a donc:

$$\overrightarrow{q}.\overrightarrow{m} = q_i.m^i = q_i\overrightarrow{b}^i.m^j\overrightarrow{a}_j$$

Il faut alors:

(10)
$$\overrightarrow{b^i}.\overrightarrow{a_j} = \delta_{j^i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j; \end{cases}$$
$$\delta_{j^i} = \text{symbole de Kronecker}$$

 $\vec{a_j}$ = définit la maille élémentaire, donc le réseau.

 $\vec{b^i}$ = vecteurs de base du réseau réciproque par définition de (10).

Pour le réseau linéaire : b=1/a= maille réciproque. Dans l'espace à trois dimensions, la relation (8) devient :

(8 bis)
$$\overrightarrow{q'} = \overrightarrow{q} + \overrightarrow{h}$$

avec

$$\vec{h} = h_i \vec{b}^i$$
 ; $h_i = \text{entier}$

Les vecteur \overrightarrow{h} définissent le réseau réciproque. Les modes \overrightarrow{q} et $\overrightarrow{q} + \overrightarrow{h}$ sont identiques car:

$$\overrightarrow{h}.\overrightarrow{m}' = h_i m'^i = \text{entier}$$
. Et $e^{2i\pi \overrightarrow{q}.\overrightarrow{m}}$ ne change pas.

On peut donc également limiter le domaine de définition de \overrightarrow{q} dans l'espace réciproque à un volume centré sur l'origine et qui contient à la limite les vecteurs \overrightarrow{h} les plus courts : c'est la première zone de Brillouin B(fig. 1).

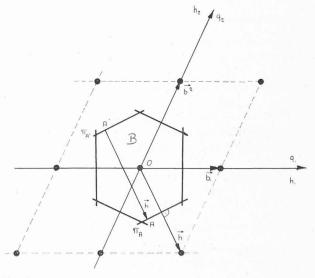


Fig. 1.

. = réseau réciproque (à deux dimensions) B= première zone de Brillouin

^{*} Un autre modèle possible est constitué par la répétition infinie de chaînes identiques à gauche et à droite de la chaîne initiale.

Au point limite A de la zone, il doit correspondre un autre point limite A' tel que :

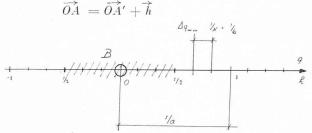


Fig. 2.
. = réseau linéaire
+ = réseau réciproque

Donc A est sur le plan π_A bissecteur du vecteur h centré en O. La zone B est un polyèdre défini par l'ensemble des plans π_A , et son volume est le même que celui de la maille élémentaire du réseau réciproque.

Le domaine (9) de définition de q considéré pour le réseau linéaire devient pour le réseau spatial :

$$(9 \ bis) \qquad \stackrel{\rightarrow}{q} \in B$$

La figure 2 représente le réseau linéaire et son réseau réciproque.

Comme $\Delta q_{min} = {}^{1}/_{N}$ et comme les modes q occupent un intervalle unité, le nombre de modes différents possibles est égal à N, qui est aussi le nombre de cellules élémentaires et le nombre de degrés de liberté du solide.

3. Spectre de Fourier et coordonnées principales

Pour satisfaire aux conditions cycliques (3) on est amené à poser:

$$u_m \sim e^{-2i\pi nm/N}$$
 avec *n* entier quelconque.

Ce qui satisfait bien à :

$$u_{m+N} = u_m$$

Or d'après (6):
$$q = n/N$$
, donc:

 $u_m \sim e^{-2i\pi qm}$

Pour toutes les valeurs de q possibles selon (6), on aura une combinaison linéaire :

$$u_m = rac{1}{\sqrt{N}} \sum_q u_q e^{-2i\pi q m} \;\; ext{pour les N valeurs de q.}$$

 $1/\sqrt{N}$ est un facteur de normalisation. Or :

(11)
$$\sum_{m=1}^{N} e^{2i\pi qm} = N \delta_{q,h} = N \delta_{q,\theta}$$

en tenant compte de (6) q = n/N:

(12)
$$\sum_{\eta} e^{2i\pi_{\eta} m} = N \delta_{m,m'} \text{ avec } m' = 0 \text{ ou } N$$

Au moyen de (11), on obtient :

$$\sum_{m} u_{m}e^{2i\pi qm} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q',m} U_{q'}e^{-2i\pi m (q'-q)} =$$

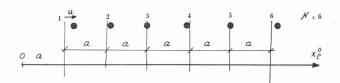
$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q'} \underbrace{U_{q'} \sum_{m} e^{-2i\pi m (q'-q)}}_{N \delta_{p'-q,h}} = \sqrt{N} \sum_{q'} U_{q'} \delta_{q'-q,o} =$$

$$= \sqrt{N} U_{q} = N \delta_{q'-q,o} \quad \text{car } |q'-q| < 1$$

donc:

$$U_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m u_m e^{2i\pi qm}$$

C'est le théorème d'inversion de Fourier qui donne le spectre U_q de la distribution u_m .



Nous avons done:

(13)
$$u_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q U_q e^{2i\pi q m}; U_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m u_m e^{2i\pi q m}$$

Pour les moments conjugués p_m , nous aurons également :

(14)
$$p_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q P_q e^{2i\pi q m} \; ; \; P_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m p_m e^{-2i\pi q m}$$

Les opérateurs correspondant aux variables canoniquement conjugués u_m et p_m doivent vérifier les relations de commutation :

(15)
$$[u_m u_{m'}] = 0 [p_m p_{m'}] = 0 \text{ et } [u_m p_{m'}] = ih\delta_{mm}$$

On vérifie ensuite que les opérateurs coordonnées principales U_q et P_q satisfont aux mêmes relations de commutation.

(15 bis)
$$[U_q U_{q'}] = 0$$
 $[P_q P_{q'}] = 0$ $[U_q P_{q'}] = ih\delta_{qq'}$

On remarque que U_q satisfait à la relation de translation (5), ce qui est une raison de plus de passer à la transformation de Fourier.

4. Hamiltonien dans l'approximation harmonique

L'hamiltonien s'écrit:

(16)
$$H = \frac{1}{2M} \sum_{m} p^{2}_{m} + V(u_{1} \dots u_{m} \dots u_{N})$$

où M= masse d'un atome de la chaîne.

Pour le réseau linéaire, nous sommes obligés de prendre le potentiel entre deux atomes m et m+n ne dépendant que de la distance entre ces deux atomes. A trois dimensions, cela signifierait que les atomes interagissent par des forces centrales, ce qui n'est pas toujours le cas.

Posons:

f(r) = potentiel entre deux atomes distants de r.

Alors:

 $V_{m,m+n} = f(|x_{m+n} - x_m|) = \text{potential entre atomes}$ m+n et m.

Le potentiel total s'écrira:

$$V = \sum_{m,n>o} f(|x_{m+n} - x_m|)$$

Grâce aux conditions cycliques (3), la somme sur n peut se faire de n=1 à N-1 quel que soit l'atome m dans la chaîne, ce qui assure l'équilibre du système pour les positions régulières :

 $x_m = x^o_m = ma$ ou $u_m = 0$ quel que soit l'atome m.

Développant f(r) en série de Taylor, on trouve en s'arrêtant aux termes du deuxième degré en u:

(17) $V = \frac{1}{2} G^{mm'} u_m u_{m'}$; sommation sur indices identiques.

C'est l'approximation harmonique.

Les coefficients de couplages G sont :

$$\begin{cases}
G^{mm} = G(0) = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2 m} \Big|_{\theta} = 2 \sum_{n>\theta} f''(na) = 2g \\
G^{mm'} = G^{m'm} = \frac{\partial^2 V}{\partial u_m \partial u_{m'}} = -f''(|m - m'|a) = \\
= G(|m - m'|)
\end{cases}$$

L'hamiltonien devient :

(19)
$$H = \frac{1}{2M} \sum_{m} p^{2}_{m} + \frac{1}{2} G^{mm'} u_{m} u_{m'}$$

Si l'on se limite à l'interaction d'un atome sur ses deux plus proches voisins, le tenseur de couplages G devient :

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} G(o) = 2f''(a) = 2g \\ G(m) = 0 \quad \text{si } |m| > 1 \\ G(m) = -f''(a) = -g \quad \text{si } |m| = 1 \end{array} \right.$$

g est alors la constante de rappel du ressort fictif reliant deux atomes voisins.

Sans se limiter à cette approximation, appliquons les développements de Fourier (13) et (14) à l'hamiltonien (19):

$$(21) \begin{cases} H = \frac{1}{2M} \sum_{q} P_q \overline{P}_q + \frac{1}{2} \sum_{q} M \omega_q^2 U_q \overline{U}_q \\ H = E_c + V_2 \end{cases}$$

avec:

 E_c = énergie cinétique.

 V_2 = potentiel harmonique.

 $\overline{P}_q = P_{-q} = \text{complexe conjugué de } P_q \text{ (voir (14))}.$

$$\overline{U}_q = U_{-q} = \text{complexe conjugué de } U_q \text{ (voir (13))}.$$

Les coefficients ω^2_q sont donnés par :

(22)
$$\begin{cases} \omega^{2}_{q} = \frac{2}{M} \sum_{m \geq o} G_{m} \cos 2\pi qm & = \text{ spectre des coefficients de couplage harmoniques } G_{m}. \\ G_{o} = \frac{1}{2} G(o) = \frac{1}{2} G^{mm} = g \\ G_{m} = G(m) = G^{m',m'+m} \end{cases}$$

5. Energies propres

L'hamiltonien s'écrivait :

(21)
$$H = \frac{1}{2M} \sum_{q} P_q \overline{P}_q + \frac{1}{2} \sum_{q} M \omega^2 q U_q \overline{U}_q = \sum_{q} H_q$$

Avec

$$(23) \quad H_q = \frac{1}{2M} \; P_q \overline{P}_q \; + \; \frac{M}{2} \; \omega^2_q U_q \overline{U}_q = \overline{H}_q$$

(hamiltonien hermitien)

H est l'hamiltonien d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques de pulsations ω_q . En effet, les équations canoniques de Hamilton s'écrivent :

$$\begin{split} \dot{U}_q &= \frac{\partial H}{\partial P_q} = \frac{1}{M} \; \overline{P}_q \\ \dot{P}_q &= -\frac{\partial H}{\partial U_q} = -M \omega_q^2 \overline{U}_q \end{split}$$

$$(25) \qquad \dot{\overline{P}}_q = --M\omega^2_q U_q$$

D'après (24), l'équation (25) devient :

$$(26) \quad \ddot{U}_q + \omega^2 U_q = 0$$

qui est bien l'équation classique d'un oscillateur harmonique dont la pulsation est ω_q . La solution classique est:

$$U_q = C_q e^{i\omega_q t}$$

d'où les déplacements (13) pour un seul mode q:

$$u_{m,q} = \frac{1}{\sqrt{N}} c_q e^{i(\omega_q t \cdot 2\pi q m)}$$
 = onde progressive.

Comme:

$$2\pi q m = 2\pi \frac{q}{a} x^o_m \quad \text{car} \quad x^o_m = ma$$

le nombre d'ondes K vaut :

$$K = \frac{2\pi q}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

et la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{a}{q}$$
; mais (9) $|q| \leq \frac{1}{2}$ entraı̂ne $\lambda \geq 2a$

Le déplacement total u_m vaut d'après (13):

Pour déterminer l'énergie propre E_q du mode q, il faut résoudre l'équation d'onde :

$$H_q \mid \psi_q > = E_q \mid \psi_q >$$

On pose selon Dirac 4:

(27)
$$\begin{cases} a_q = (2Mh\omega_q)^{-1/2} & (P_q - iM\omega_q \overline{U}_q) ; h = 2\pi h = \\ & \text{constante de Planck} \\ \overline{a}_q = (2Mh\omega_q)^{-1/2} & (\overline{P}_q + iM\omega_q U_q) \end{cases}$$

et l'on obtient:

(28)
$$\begin{cases} H = \frac{1}{2} \sum_{q} h \omega_{q} (a_{q} \overline{a_{q}} + a_{q} \overline{a_{q}}) = \sum_{q} H'_{q} \\ E_{q} = \left(n_{q} + \frac{1}{2}\right) \overline{h} \omega_{q} & n_{q} = \text{entier} \ge 0 \end{cases}$$

On dit que le mode q contient n_q phonons d'énergie $h\omega_q$. La fonction d'onde correspondante sera $|n_q\rangle$:

(29)
$$H'_q | n_q > = E_q | n_q > = \left(n_q + \frac{1}{2} \right) h \omega_q | n_q >$$

L'hamiltonien total H étant la somme des hamiltoniens partiels H_q , l'équation de Schödinger

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

est à variables séparables :

(30)
$$\begin{cases} |\psi\rangle = |n_{q1}\rangle |n_{q2}\rangle \dots |n_{qN}\rangle \\ \text{et:} \\ E = \sum_{q} E_{q} = \sum_{q} \left(n_{q} + \frac{1}{2}\right) \overline{h} \omega_{q} = \\ = \text{énergie totale.} \end{cases}$$

D'après l'équation (29), l'hamiltonien partiel H'_q ne peut pas modifier le nombre de phonons du mode q; l'état $\mid n_q >$ est stationnaire. Donc l'énergie de chaque mode est constante, ce qui entraîne que l'énergie totale est également constante. En s'arrêtant à l'approximation harmonique, il ne peut pas y avoir de dissipation d'énergie dans un mode.

On peut le montrer d'une autre façon en étudiant de plus près les opérateurs a_q et $\overline{a_q}$; on trouve:

(31)
$$a_q | n_q > = \sqrt{n_q} | n_q - 1 >$$

 $a_q=$ opérateur d'annihilation. Il fait passer l'état $\mid n_q>$ contenant n_q phonons en l'état $\mid n_q-1>$ où un phonon a disparu.

(32)
$$\overline{a}_q | n_q > = \sqrt{n_q + 1} | n_q + 1 >$$

 $\overline{a_q} = \text{opérateur de production. Il a créé un phonon dans le mode } q.$

Mais dans H_q , il intervient l'opérateur $a_q.\overline{a_q}$ par exemple qui, appliqué sur l'état | $n_q>$ donne :

$$a_q \overline{a_q} \mid n_q > = a_q \sqrt{n_q + 1} \mid n_q + 1 > =$$

= $\sqrt{n_q + 1} \cdot \sqrt{n_q + 1} \mid n_q >$

Le nombre de phonons n_q reste donc stationnaire. Il ne peut pas y avoir d'interactions phonon-phonon dans l'approximation harmonique.

RÉFÉRENCES

- ¹ J.-M. Ziman: Electrons and Phonons (Oxford, 1960).
- ² R.-E. Peierls: Quantum Theory of Solids (Oxford, 1955).
- ³ L. Brillouin: Wave Propagation in Periodic Structures (Mc Graw-Hill, 1946).
- ⁴ P. A. M. DIRAC: The Principles of Quantum Mechanics, pg. 136 (Oxford, 3^e édition, 1947).

LA COUVERTURE DE L'ORANGERIE DU NOUVEL ÉTABLISSEMENT HORTICOLE DE LA VILLE DE LAUSANNE A LA BOURDONNETTE

par G. ROUBAKINE, ing. EPUL 1

Dans le groupe de constructions constituant le nouvel établissement horticole que le service des parcs et promenades de la Direction des travaux de Lausanne a érigé dans la région de Vidy, figure une orangerie, c'està-dire une serre de grandes dimensions destinée à l'hivernage des grandes plantes décoratives (palmiers, lauriers, orangers).

La couverture de cette serre est constituée par une coque autoportante, dont la forme très particulière, assemblage de plusieurs formes simples (et qui résulte d'ailleurs d'un programme fort précis élaboré par M. A. Desarzens, chef du service des parcs et promenades) a ceci de particulier qu'elle échappe totalement au calcul et que, de ce fait, l'auteur du projet s'est trouvé entièrement à la merci des résultats d'essais sur maquette.

On sait que certains voiles dont la forme simple peut être définie par des équations de la géométrie analytique (surfaces de révolution, conoïdes, paraboloïdes hyperboliques, par ex.) sont calculables avec une approximation suffisante sans recours à des essais de laboratoire. D'autres formes (coupoles elliptiques, absides semisphériques, etc.), tout en exigeant des essais sur maquette, permettent un calcul très approximatif qui peut fournir les bases d'un premier dimensionnement et permet d'autre part un certain contrôle des résultats d'essais.

L'orangerie de la Bourdonnette appartient à une troisième catégorie : tout calcul approché que l'on pourrait tenter conduirait à des résultats complètement erronés. La seule voie possible consiste à réaliser un modèle, à l'essayer et à le modifier ensuite, voire même à le recommencer, de manière à obtenir des efforts intérieurs et des déformations compatibles avec le matériau utilisé et le type de construction étudié. Le prix d'une maquette et celui des essais étant élevés, il est important de réduire au minimum ces tâtonnements.

La première condition pour cela est que le projeteur possède une certaine « intuition statique » qui lui évitera de se lancer dans une voie sans issue. Il peut être très utile, d'autre part, de réaliser d'abord une maquette très primitive en carton, qui pourra donner une première idée de la rigidité et de la stabilité des formes choisies. (A ce point de vue, il est intéressant d'utiliser des surfaces développables.) Il sera possible ensuite de passer à la construction d'une maquette de laboratoire, en prenant soin de prévoir d'emblée des modifications simples permettant d'éviter la réalisation d'un second, voire même d'un troisième modèle.

Programme et conception générale de l'orangerie

Le programme de cette serre avait été défini ainsi : couvrir une surface de 400 m², sans appuis intérieurs, par une construction aux façades entièrement vitrées.

¹ Cette étude est tirée du Recueil de travaux offert au professeur A. Stucky, en hommage de reconnaissance, sur l'initiative de l'Association amicale des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de Lausanne, le 27 octobre 1962, l'année de son 70° anniversaire.