

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 89 (1963)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Résolution de quelques problèmes de statique à l'aide d'une calculatrice électronique  
**Autor:** Blanc, Ch. / Tran Hoang, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66290>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraisant tous les 15 jours

## ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes  
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)  
de la Section genevoise de la S.I.A.  
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique  
de l'Université de Lausanne)  
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole  
polytechnique fédérale de Zurich)

## COMITÉ DE PATRONAGE

Président: J. Calame, ing. à Genève  
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne  
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève  
Membres:

Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.  
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgrain, arch.; E. Martin, arch.  
J.-C. Ott, ing.  
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.  
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.  
Vaud: A. Chevallier, ing.; A. Gardel, ing.;  
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

## CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »  
Président: D. Bonnard, ing.  
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre,  
arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.  
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

## SOMMAIRE

Résolution de quelques problèmes de statique à l'aide d'une calculatrice électronique, par Ch. Blanc, professeur à l'EPUL, et H. Tran Hoang, ingénieur physicien.  
Considérations générales sur le conditionnement d'air des piscines couvertes, par R. Ossent, ingénieur EPUL.  
Bibliographie. — Documentation générale. — Informations diverses.

## RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE STATIQUE À L'AIDE D'UNE CALCULATRICE ÉLECTRONIQUE

par CH. BLANC, professeur à l'EPUL<sup>1</sup> et H. TRAN HOANG, ingénieur physicien, assistant à l'Institut de mathématiques appliquées de l'EPUL

La mise en œuvre de calculatrices électroniques exige une adaptation parfois assez poussée des méthodes de calcul. C'est le cas notamment en statique: en effet, les méthodes que l'on a utilisées traditionnellement avaient souvent pour but d'éviter de longues séries d'opérations fastidieuses, comme par exemple la résolution de grands systèmes d'équations linéaires; en calcul automatique au contraire, on recherche une simplification du schéma opératoire, quitte à la payer d'un accroissement peut-être notable des calculs formels, que la machine exécute très rapidement.

L'Institut de mathématiques appliquées de l'EPUL a établi, pour sa calculatrice ZEBRA, des programmes pour quelques problèmes concrets de statique. La méthode utilisée revient en fait à remplacer les équations différentielles par des équations aux différences, en passant pour cela par des propriétés d'extremum; on a montré en effet [1] que cette façon de procéder est particulièrement avantageuse.

L'étude des déformations d'un corps élastique (et des contraintes qui leur sont liées) conduit, dans les cas

## RÉDACTION

D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua, architecte  
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »  
Tirés à part, renseignements  
Avenue de Cour 27, Lausanne

## ABONNEMENTS

1 an . . . . . Suisse Fr. 34.— Etranger Fr. 38.—

Sociétaires . . . . . » 28.— » 34.—

Prix du numéro . . . . . » 1.60

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,  
N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au  
numéro, changements d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie  
La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

## ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page . . . . . Fr. 360.—

1/2 » . . . . . » 180.—

1/4 » . . . . . » 93.—

1/8 » . . . . . » 46.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.

Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales



les plus généraux, à des calculs d'une complexité telle qu'il n'est guère concevable de les aborder d'une manière uniforme. Si le corps est de révolution, et si les contraintes présentent la symétrie voulue, le problème se simplifie beaucoup. La présente étude correspond à une circonstance encore plus particulière, celle où le corps a la forme d'un cylindre creux, d'épaisseur éventuellement variable mais toujours assez petite vis-à-vis du rayon du cylindre. La méthode décrite est appliquée à deux cas : celui d'un réservoir cylindrique rempli de liquide et celui d'un tube encastré à l'une de ses extrémités et sollicité à l'autre. La méthode est du reste générale et le programme élaboré peut être facilement adapté à d'autres cas.

L'Institut de mathématiques appliquées a également élaboré un programme, utilisant la même méthode, et valable pour le cas général des corps de révolution : il fera l'objet d'une publication ultérieure.

## Déformation d'un cylindre creux d'épaisseur variable

Le problème envisagé ici a été déjà traité par de nombreuses méthodes et la solution que nous en donnons

<sup>1</sup> Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne.

n'est nouvelle ni dans sa conception, ni dans son application. Elle se fonde sur les propriétés de minimum d'une certaine expression, qui représente la différence entre l'énergie de déformation du cylindre et le travail (virtuel) des forces extérieures. Pour la théorie générale de la déformation des surfaces, on peut toujours se reporter à l'ouvrage classique de Love [2] ; dans le cas qui nous occupe ici, voir par exemple [4], p. 429 et suiv.

Nous allons d'abord examiner le problème sous sa forme « rigoureuse » ; il conduit, à la recherche de fonctions rendant minimum une intégrale, donc à un problème de *calcul des variations*. Ce problème peut se transformer en un problème d'équations différentielles, malheureusement en général dépourvues d'intégrales de nature élémentaire. Il est alors nécessaire de résoudre le problème par une méthode approchée. Nous indiquerons une méthode qui s'adapte particulièrement bien au calcul électronique.

Soit un corps élastique, en forme de cylindre de révolution creux, d'épaisseur variable. Introduisons les notions suivantes (sans fixer le système d'unités choisi ; nous supposons seulement qu'il est cohérent) :

- $H$  longueur du cylindre ;
- $x$  abscisse le long de l'axe ;
- $a$  rayon moyen du cylindre ;
- $h$  épaisseur de la paroi à l'abscisse  $x$  ; on suppose que  $h$  est assez petit vis-à-vis de  $a$  ;
- $u$  déformation longitudinale ;
- $w$  déformation radiale (positive vers l'extérieur) ;
- $E$  module d'élasticité ;
- $\nu$  inverse du module de Poisson ;
- $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  ;
- $M$  moment de flexion, rapporté à l'unité de longueur sur un parallèle, compté positivement s'il donne lieu à une courbure interne convexe ;
- $Q$  effort tranchant, rapporté à l'unité de longueur sur un parallèle ;
- $S$  effort annulaire, rapporté à l'unité de longueur sur un méridien.

On suppose que les forces qui agissent et les liaisons appliquées ont toutes la symétrie cylindrique (d'où il résulte qu'il n'y a pas de déformation dans la direction d'un cercle parallèle).

Soient les forces appliquées :

- $f(x) dx$  force répartie le long d'un méridien, par unité de longueur d'un parallèle ;
- $Q_i$  effort tranchant sur le parallèle à l'abscisse  $x_i$ , par unité de longueur de ce parallèle ;
- $M_j$  moment d'un couple appliqué au parallèle à l'abscisse  $x_j$ , par unité de longueur de ce parallèle ;
- $F_k$  force longitudinale (effort normal) exercée sur le parallèle à l'abscisse  $x_k$ , par unité de longueur de ce parallèle.

De plus, on suppose que l'on a imposé au cylindre des liaisons de caractère géométrique (par exemple encastrement), donnant lieu à des conditions pour  $u$  et  $w$ , notées « conditions  $G$  ». Alors les fonctions  $u$  et  $w$ , qui décrivent la déformation du cylindre, sont celles qui rendent *minimum* la fonctionnelle :

$$J[u, w] = \int_0^H \left[ \frac{D}{2} w''^2 + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left( u' - \frac{\nu}{a} w \right)^2 + \frac{Eh}{2a^2} w^2 - f(x) w \right] dx - \sum_i Q_i \cdot w(x_i) - \sum_j M_j \cdot w'(x_j) - \sum_k F_k \cdot u(x_k),$$

les fonctions concurrentes devant satisfaire aux conditions  $G$  définies par les liaisons géométriques (par exemple  $u = 0$ ,  $w = 0$ ,  $w' = 0$  s'il y a encastrement).

Par les équations d'Euler-Lagrange, ce problème de calcul de variation peut se ramener à l'intégration d'un système d'équations différentielles avec conditions aux limites ; ce système est linéaire, et peut s'intégrer exactement lorsque l'épaisseur est constante (et dans quelques cas très particuliers qu'il est inutile d'examiner ici). Dans le cas d'une épaisseur variable, il faut donc recourir à une méthode approchée. On en peut imaginer de nombreuses, parfois très ingénieuses, mais dont le défaut est souvent de se prêter fort mal au calcul automatique. En effet, si l'on veut utiliser rationnellement une calculatrice électronique, il faut rechercher des algorithmes pouvant se décrire assez simplement, et surtout n'exigeant pas de fréquentes interventions intermédiaires ; alors qu'il est raisonnable, lorsqu'on calcule à la main, de rechercher tous les moyens d'alléger le volume des opérations formelles, il sera au contraire favorable d'adopter, en calcul automatique, une voie qui comporte peut-être beaucoup d'opérations, mais d'un type aussi standard que possible. La méthode que nous voulons exposer ici (et qui, répétons-le, n'est pas nouvelle), consiste à ramener la recherche du minimum à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires, système dont les coefficients sont calculés automatiquement par la calculatrice elle-même et dont la résolution se fait rapidement même si le nombre des inconnues est relativement élevé.

Supposons qu'il n'y a pas de forces  $F_k$ , donc pas de forces longitudinales, et que le cylindre n'est fixé que pour une valeur de  $x$ , soit par exemple pour  $x = x_0$ . La fonction  $u$  ne figure dans la fonctionnelle  $J$  que par le terme  $\left( u' - \frac{\nu}{a} w \right)^2$ , dont la contribution est forcément supérieure ou égale à zéro ; le minimum exige donc que l'on ait, pour tout  $x$ ,

$$u' - \frac{\nu}{a} w = 0 ;$$

lorsque  $w$  aura été déterminé, on obtiendra ainsi  $u$  par une quadrature, la constante étant fixée par la donnée pour  $x = x_0$ . Il reste donc à rendre minimum la fonctionnelle

$$J[w] = \int_0^H \left( \frac{D}{2} w''^2 + \frac{Eh}{2a^2} w^2 - f w \right) dx - \sum_i Q_i w(x_i) - \sum_j M_j w'(x_j).$$

Dans le cas où il n'y a pas de forces ou de couples concentrés sur certains parallèles (donc si les termes en  $P_i$  et  $M_j$  sont absents), l'équation d'Euler-Lagrange de ce problème de variation est

$$(Dw'')'' + \frac{Eh}{a^2} w = f ;$$

s'il y a des forces ou des couples appliqués sur certains parallèles, cette équation est encore valable entre ces parallèles, le raccordement des solutions se faisant avec des discontinuités qui résultent des valeurs des  $P_i$  et  $M_j$ ; nous renonçons à développer ici ce point, car la méthode que nous utiliserons fait abstraction de l'équation différentielle et permet de tenir compte sans aucune difficulté des forces concentrées.

Pour rendre le problème résoluble par des moyens élémentaires, on opère une *discrétisation*, qui consiste simplement à remplacer l'intégrale de  $J$  par une somme, et à substituer ainsi à la recherche de la fonction inconnue  $w$  la recherche des valeurs (approchées) de cette fonction en un nombre fini de points de l'intervalle  $[0, H]$ .

Nous traiterons ainsi deux cas : tout d'abord celui d'un réservoir cylindrique à axe vertical encastré au bas et rempli d'un liquide pesant; nous traiterons ensuite le problème d'un tube cylindrique, encastré à une extrémité et soumis à l'autre extrémité à un couple de moment donné. L'épaisseur pourra toujours varier selon une loi quelconque.

#### Réervoir à axe vertical, rempli d'un liquide pesant

Comptons les abscisses  $x$  depuis le haut; il n'y a pas ici, par hypothèse, de forces ou de couples concentrés donnés; en désignant par  $\gamma$  le poids spécifique du liquide, on a simplement :

$$J[w] = \int_0^H \left( \frac{D}{2} w''^2 + \frac{Eh}{2a^2} w^2 - \gamma xw \right) dx$$

avec  $w(H) = 0$ ,  $w'(H) = 0$ . Faisons quelques changements d'écriture (voir [4]); en remplaçant  $D$  par sa valeur, on a

$$J[w] = \frac{E}{12(1-v^2)} \int_0^H \left[ \frac{h^3}{2} w''^2 + \frac{12(1-v^2)}{2a^2} w^2 - \frac{12(1-v^2)}{E} \gamma xw \right] dx;$$

posons  $x = H\xi$ ,

$$k = \frac{12(1-v^2)H^4}{a^2}, \quad l = \frac{12(1-v^2)\gamma H^5}{E};$$

on a alors :

$$J[w] = \frac{EH}{12(1-v^2)} \int_0^1 \left[ \frac{h^3}{2H^4} \cdot \left( \frac{d^2w}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{kh}{2H^4} w^2 - \frac{l\xi}{H^4} w \right] d\xi,$$

donc, en laissant de côté un facteur  $\frac{E}{12H^3(1-v^2)}$ , qui ne joue pas de rôle ici, on a à rendre minimum la fonctionnelle :

$$A[w] = \int_0^1 \left[ \frac{h^3}{2} \left( \frac{d^2w}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{kh}{2} w^2 - l\xi w \right] d\xi,$$

avec  $w = 0$  et  $w' = 0$  pour  $\xi = 1$ .

Ce problème de variation ne pouvant pas être résolu sous forme finie, sauf dans des cas très particuliers, on va le traiter par une méthode approchée : on divise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  intervalles égaux; soit  $\xi_j$  l'abscisse du point milieu du  $j$ -ème intervalle, donc

$\xi_j = \frac{2j-1}{2n}$ ; posons encore  $\xi_0 = -\frac{1}{2n}$  et  $\xi_{n+1} = 1 + \frac{1}{2n}$ . Soit enfin  $w(\xi_j) = w_j$ ; on a, d'une manière approchée, si  $n$  est assez grand,

$$\frac{d^2 w(\xi_j)}{d\xi^2} = n^2 (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1});$$

la condition d'enca斯特ment peut être remplacée (toujours approximativement) par  $w_n = w_{n+1} = 0$ ; la fonctionnelle donnée est donc remplacée par l'expression approchée

$$A^*(w_i) = n^3 \sum_{i=1}^N \left[ \frac{h_i^3}{2} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})^2 + \frac{kh_i}{2n^4} w_i^2 - \frac{l(2i-1)}{2n^5} w_i \right]$$

avec  $w_n = w_{n+1} = 0$ , ou encore, en explicitant les sommes,

$$A^*(w_i) = n^3 \left[ \begin{aligned} & \left[ \frac{h_1^3}{2} (w_0 - 2w_1 + w_2)^2 + \frac{h_2^3}{2} (w_1 - 2w_2 + w_3)^2 + \dots \right. \\ & \left. + \frac{kh_1}{2n^4} w_1^2 + \frac{kh_2}{2n^4} w_2^2 + \dots \right. \\ & \left. - \frac{l}{2n^5} w_1 - \frac{3l}{2n^5} w_2 - \dots \right]; \end{aligned} \right]$$

c'est donc une fonction quadratique des  $n$  inconnues  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ ; ces  $w_i$  doivent rendre  $A^*$  minimum; on les obtient donc en annulant les dérivées de  $A^*$  par rapport aux inconnues. En dérivant par rapport à  $w_0$  on obtient (après division par la constante  $n^3$ )

$$h_1^3 w_0 - 2h_1^3 w_1 + h_1^3 w_2 = 0$$

puis en dérivant par rapport à  $w_1$ :

$$\begin{aligned} & -2h_1^3 w_0 + \left( 4h_1^3 + h_2^3 + \frac{kh_1}{n^4} \right) w_1 - \\ & - 2(h_1^3 + h_2^3) w_2 + h_2^3 w_3 = \frac{l}{2n^5}; \end{aligned}$$

d'une manière générale, en annulant la dérivée par rapport à  $w_i$  ( $2 \leq i \leq n-3$ ), on a

$$\begin{aligned} & h_{i-1}^3 w_{i-2} - 2(h_{i-1}^3 + h_i^3) w_{i-1} + \\ & + \left( h_{i-1}^3 + 4h_i^3 + h_{i+1}^3 + \frac{kh_i}{n^4} \right) w_i - \\ & - 2(h_i^3 + h_{i+1}^3) w_{i+1} + h_{i+1}^3 w_{i+2} = \frac{2i-1}{2} \frac{l}{n^5}; \end{aligned}$$

(pour  $i = n-2$  et  $i = n-1$ , on a des équations semblables, où il faut simplement remplacer  $w_n$  et  $w_{n+1}$  par zéro à cause de l'encastration). On constate immédiatement que ce système a une forme particulière : il est symétrique (ce qui résulte du fait qu'on l'a obtenu en dérivant une fonction quadratique) et de plus il a la forme *pentadiagonale*, c'est-à-dire que les seuls coefficients non nuls se situent sur la diagonale principale et sur les deux paires de codiagonales adjacentes. Ces circonstances entraînent une grosse économie de place dans la mémoire de la machine et de temps dans la résolution du système.

Le programme qui a été confectionné pour ce problème effectue les opérations suivantes :

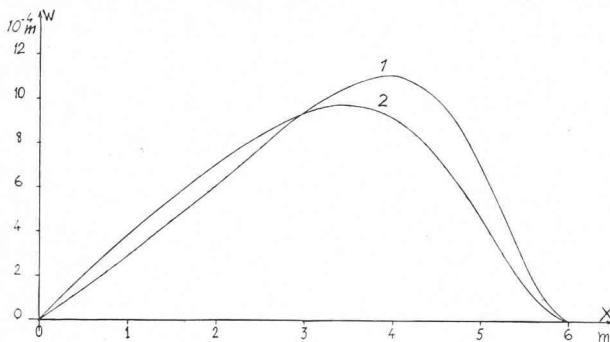


Fig. 1. — Déformée d'un réservoir cylindrique en béton.

Cas 1 : Réservoir à épaisseur constante.

Cas 2 : Réservoir à épaisseur variant linéairement.

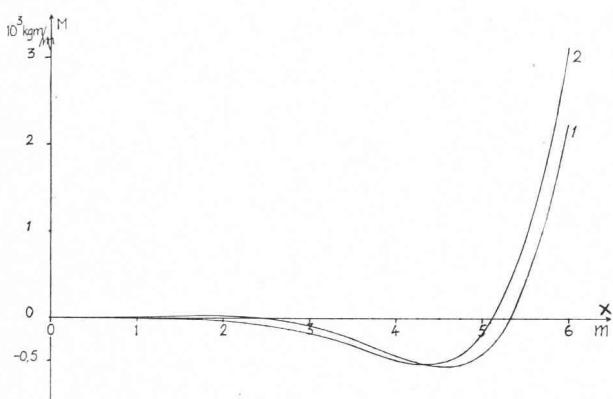


Fig. 3. — Répartition du moment fléchissant pour un réservoir cylindrique en béton.

Cas 1 : Réservoir à épaisseur constante.

Cas 2 : Réservoir à épaisseur variant linéairement.

- calcul, à partir des données géométriques et physiques, des coefficients des équations ;
- résolution des équations, donc calcul des  $\omega_i$  ;
- calcul, à partir des  $\omega_i$ , du moment

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \frac{d^2 w}{dx^2}$$

d'où

$$M_i = \frac{Eh_i^3}{12(1-v^2)} \cdot \frac{1}{H^2} \cdot \frac{d^2 \omega_i}{d\xi^2} \#$$

$$\# \frac{Eh_i^3 n^2}{12(1-v^2) H^2} (\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1});$$

- calcul de l'effort tranchant  $Q$  à partir de la relation

$$Q = -\frac{dM}{dx} = -\frac{1}{H} \frac{dM}{d\xi};$$

on calcule une valeur approchée de  $Q$  en remplaçant la dérivée par un quotient de différences

$$Q \# -\frac{n}{H} (M_{j+1} - M_j) \quad \text{où } j = 1, 2, \dots, n-1;$$

l'effort tranchant est ainsi calculé aux  $(n-1)$  points de subdivision de l'intervalle  $[0, H]$  ; il est évidemment utile de le connaître aussi pour  $x = 0$  et pour  $x = H$ . Dans notre cas, il est nul pour  $x = 0$  ; pour  $x = H$ , il peut se calculer en considérant l'équilibre statique du système. On a en effet, pour chaque valeur de  $\xi$ ,

$$\frac{d^2 M}{d\xi^2} + \frac{EH^2}{a^2} h\omega = \gamma H^3 \xi$$

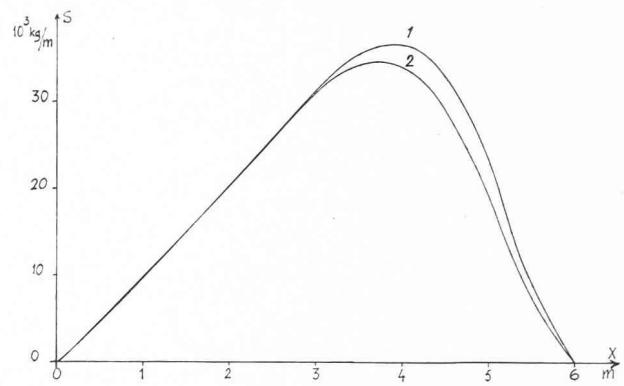


Fig. 2. — Répartition de l'effort annulaire pour un réservoir cylindrique en béton.

Cas 1 : Réservoir à épaisseur constante.

Cas 2 : Réservoir à épaisseur variant linéairement.

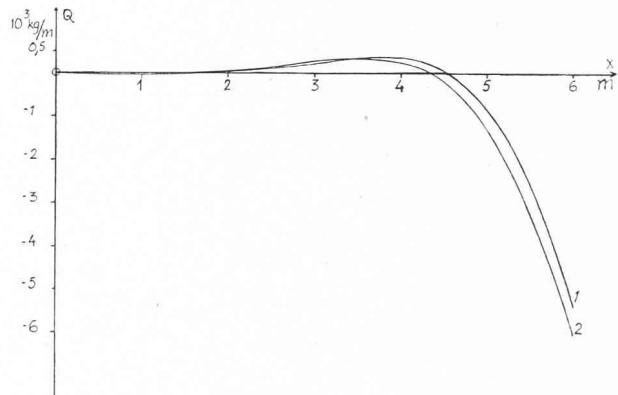


Fig. 4. — Répartition de l'effort tranchant pour un réservoir cylindrique en béton.

Cas 1 : Réservoir à épaisseur constante.

Cas 2 : Réservoir à épaisseur variant linéairement.

donc

$$\frac{dQ}{d\xi} = \frac{EH}{a^2} \omega - \gamma H^2 \xi$$

et comme  $Q(0) = 0$ , il reste

$$Q_{\xi=1} = \frac{EH}{a^2} \int_0^1 h\omega d\xi - \frac{\gamma H^2}{2};$$

en remplaçant l'intégrale par une somme, on a

$$Q_{\xi=1} \# \frac{EH}{a^2 n} \sum_{i=1}^n h_i \omega_i - \frac{\gamma H^2}{2};$$

- calcul de l'effort annulaire ; on a, pour l'effort annulaire  $S$  rapporté à l'unité de longueur

$$S = \frac{Eh}{a} \omega;$$

il se calcule donc directement à partir des  $\omega_i$ , pour les points  $x_i$ .

#### Exemples numériques

*Exemple 1.* — Réservoir cylindrique en béton, d'épaisseur constante ; données numériques :

$$\begin{aligned} H &= 6,0 \text{ m} \\ a &= 9,65 \text{ m} \\ h &= 0,16 \text{ m (constant)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2 \\ v &= 0,2 \\ \gamma &= 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ (eau)} \end{aligned}$$

TABLEAU 1

Abscisse m	Déformation $10^{-3}$ m	Effort annulaire kg/m	Moment de flexion kgm/m	Effort tranchant kg/m
0	+ 0,018	+ 609	0	0
0,2	+ 0,079	+ 2 617	+ 1,5	— 7,4
0,4	+ 0,140	+ 4 628	+ 4,1	— 3,1
0,6	+ 0,200	+ 6 646	+ 7,6	— 17,2
0,8	+ 0,262	+ 8 679	+ 11,5	— 19,5
1,0	+ 0,324	+ 10 733	+ 15,4	— 19,6
1,2	+ 0,386	+ 12 815	+ 18,8	— 17,2
1,4	+ 0,450	+ 14 933	+ 21,1	— 11,6
1,6	+ 0,515	+ 17 090	+ 21,5	— 2,1
1,8	+ 0,582	+ 19 287	+ 19,1	+ 12,1
2,0	+ 0,649	+ 21 520	+ 12,7	+ 31,9
2,2	+ 0,717	+ 23 777	+ 1,2	+ 57,9
2,4	+ 0,785	+ 26 036	— 17,0	+ 90,7
2,6	+ 0,852	+ 28 263	— 43,0	+ 130,3
2,8	+ 0,917	+ 30 410	— 78,2	+ 176,0
3,0	+ 0,977	+ 32 411	— 123,5	+ 226,3
3,2	+ 1,031	+ 34 181	— 179,1	+ 278,0
3,4	+ 1,074	+ 35 618	— 244,4	+ 326,4
3,6	+ 1,104	+ 36 599	— 317,3	+ 364,6
3,8	+ 1,115	+ 36 988	— 393,9	+ 383,1
4,0	+ 1,105	+ 36 642	— 467,8	+ 369,7
4,2	+ 1,068	+ 35 424	— 529,7	+ 309,1
4,4	+ 1,002	+ 33 218	— 566,3	+ 183,3
4,6	+ 0,903	+ 29 955	— 560,7	— 28,2
4,8	+ 0,773	+ 25 647	— 491,2	— 347,4
5,0	+ 0,616	+ 20 422	— 332,0	— 795,8
5,2	+ 0,440	+ 14 578	— 53,5	— 1392,6
5,4	+ 0,260	+ 8 635	+ 376,6	— 2150,4
5,6	+ 0,102	+ 3 393	+ 990,9	— 3071,5
5,8	0	0	+ 1819,1	— 4141,2
6,0	0	0	+ 2292,2	— 5321,4

Exemple 2. — Même problème, mais avec une épaisseur variant suivant une loi linéaire :

$$h = 0,10 + 0,12 x/H \text{ [m].}$$

Dans les deux cas, le calcul a été fait en divisant la hauteur totale en 30 tranches égales, donc en faisant  $n = 30$ . Les résultats numériques sont reportés aux tableaux 1 et 2, et sur les figures 1 à 4. La durée des calculs (y compris la sortie des résultats) est, pour chacun de ces exemples, inférieure à 4 min. On remarquera que, du fait de la méthode employée, l'effort tranchant est calculé aux points de subdivision de la hauteur totale, alors que les autres grandeurs sont calculées aux points milieux des intervalles de subdivision.

Il convient de noter qu'il n'est pas nécessaire que l'épaisseur  $h$  soit exprimée analytiquement : il suffit de donner ses valeurs au milieu de chacun des  $n$  intervalles de subdivision du cylindre. Si  $h$  varie peu, il suffira de prendre  $n$  de l'ordre de 20 ou 30 ; pour une épaisseur plus irrégulière, il conviendra de choisir  $n$  plus grand (le programme permet d'aller jusqu'à  $n = 200$ ).

TABLEAU 2

Abscisse m	Déformation $10^{-3}$ m	Effort annulaire kg/m	Moment de flexion kgm/m	Effort tranchant kg/m
0	+ 0,069	+ 1 451	0	0
0,2	+ 0,140	+ 3 086	— 2,0	+ 10,1
0,4	+ 0,212	+ 4 831	— 4,8	+ 14,0
0,6	+ 0,282	+ 6 674	— 7,6	+ 14,1
0,8	+ 0,352	+ 8 606	— 10,1	+ 12,5
1,0	+ 0,420	+ 10 617	— 12,3	+ 10,8
1,2	+ 0,486	+ 12 700	— 14,5	+ 10,8
1,4	+ 0,551	+ 14 848	— 17,3	+ 14,1
1,6	+ 0,614	+ 17 053	— 21,7	+ 21,8
1,8	+ 0,675	+ 19 303	— 28,7	+ 35,2
2,0	+ 0,733	+ 21 581	— 39,8	+ 55,3
2,2	+ 0,788	+ 23 858	— 56,3	+ 82,6
2,4	+ 0,839	+ 26 097	— 79,7	+ 117,0
2,6	+ 0,885	+ 28 246	— 111,3	+ 157,9
2,8	+ 0,923	+ 30 242	— 151,9	+ 203,3
3,0	+ 0,953	+ 32 004	— 201,9	+ 250,1
3,2	+ 0,972	+ 33 438	— 260,6	+ 293,4
3,4	+ 0,978	+ 34 440	— 326,0	+ 326,4
3,6	+ 0,968	+ 34 901	— 393,9	+ 340,2
3,8	+ 0,941	+ 34 710	— 458,7	+ 262,9
4,0	+ 0,895	+ 33 768	— 511,2	+ 142,8
4,2	+ 0,830	+ 31 997	— 539,8	+ 54,1
4,4	+ 0,746	+ 29 357	— 529,0	+ 345,7
4,6	+ 0,643	+ 25 862	— 459,8	+ 749,7
4,8	+ 0,526	+ 21 602	— 309,9	+ 1282,0
5,0	+ 0,400	+ 16 763	— 53,5	+ 1954,5
5,2	+ 0,273	+ 11 651	+ 337,4	+ 2773,1
5,4	+ 0,154	+ 6 716	+ 892,0	+ 3733,9
5,6	+ 0,058	+ 2 567	+ 1638,8	+ 4820,7
5,8	0	0	+ 2602,9	+ 6000,7
6,0	0	0	+ 3144,0	

Tube encastré à une extrémité et soumis à l'autre extrémité à un moment de flexion et à un effort tranchant.

On désignera par

$M_0$  le moment de flexion par unité de longueur de circonférence (à l'origine) ;

$Q_0$  l'effort tranchant par unité de longueur de circonférence (à l'origine).

Nous supposons de plus qu'il n'y a pas de forces dans le sens longitudinal ; on doit donc rendre minimum la fonctionnelle

$$J[\omega] = \int_0^H \left( \frac{D}{2} \omega''^2 + \frac{Eh}{2a^2} \omega^2 \right) dx - Q_0 \omega(0) - M_0 \omega'(0) ;$$

faisons le même changement de variable que dans le premier problème, et introduisons les mêmes notations ; on a ainsi la fonctionnelle

TABLEAU 3

Abscisse mm	Déformation mm	Effort annulaire kg/mm	Moment de flexion kgmm/mm	Effort tranchant kg/mm
0	+ 1225	+ 404 740	+ 241 760	— 21 978
20	+ 995	+ 328 860	+ 540 530	— 14 939
40	+ 783	+ 258 670	+ 724 920	— 9 219
60	+ 593	+ 196 110	+ 819 340	— 4 721
80	+ 430	+ 142 160	+ 845 550	— 1 310
100	+ 294	+ 97 116	+ 822 310	+ 1 162
120	+ 184	+ 60 721	+ 765 290	+ 2 852
140	+ 98	+ 32 378	+ 687 150	+ 3 907
160	+ 34	+ 11 265	+ 597 750	+ 4 470
180	— 11	— 3 559	+ 504 420	+ 4 666
200	— 40	— 13 076	+ 412 340	+ 4 604
220	— 55	— 18 254	+ 324 810	+ 4 377
240	— 60	— 20 015	+ 243 620	+ 4 059
260	— 58	— 19 212	+ 169 400	+ 3 711
280	— 50	— 16 628	+ 101 860	+ 3 377
300	— 39	— 12 971	+ 40 102	+ 3 088
320	— 27	— 8 893	— 17 144	+ 2 862
340	— 15	— 4 994	— 71 296	+ 2 708
360	— 6	— 1 846	— 123 710	+ 2 621
380	0	0	— 175 480	+ 2 589
400	0	0	— 201 370	+ 2 589

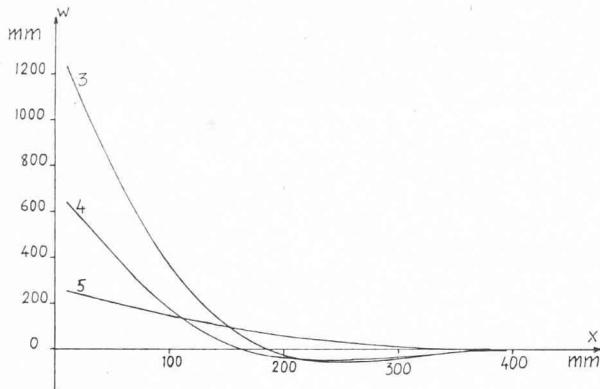


Fig. 5. — Déformée d'un tube en acier.

Cas 3 : Tube à épaisseur constante  $h = 19$  mm.  
 Cas 4 : Tube à épaisseur variable.  
 Cas 5 : Tube à épaisseur constante  $h = 56$  mm.

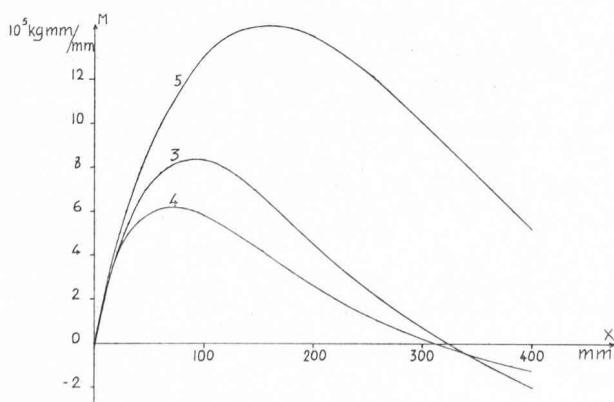


Fig. 7. — Répartition du moment fléchissant pour un tube en acier.

Cas 3 : Tube à épaisseur constante  $h = 19$  mm.  
 Cas 4 : Tube à épaisseur variable.  
 Cas 5 : Tube à épaisseur constante  $h = 56$  mm.

TABLEAU 4

Abscisse mm	Déformation mm	Effort annulaire kg/mm	Moment de flexion kgmm/mm	Effort tranchant kg/mm
0	+ 639	+ 566 290	+ 241 760	— 21 978
20	+ 527	+ 380 090	+ 484 340	— 12 129
40	+ 415	+ 238 650	+ 594 720	— 5 519
60	+ 308	+ 136 660	+ 622 100	— 1 369
80	+ 208	+ 68 802	+ 601 940	+ 1 008
100	+ 128	+ 42 255	+ 557 850	+ 2 204
120	+ 65	+ 21 577	+ 499 070	+ 2 939
140	+ 19	+ 6 151	+ 432 780	+ 3 315
160	— 14	— 4 722	+ 364 340	+ 3 421
180	— 35	— 11 762	+ 297 560	+ 3 339
200	— 47	— 15 671	+ 234 860	+ 3 135
220	— 52	— 17 109	+ 177 610	+ 2 862
240	— 50	— 16 678	+ 126 320	+ 2 565
260	— 45	— 14 919	+ 80 825	+ 2 275
280	— 37	— 12 308	+ 40 520	+ 2 015
300	— 28	— 9 272	+ 44 967	+ 1 801
320	— 19	— 6 188	— 28 302	+ 1 640
340	— 10	— 3 402	— 58 948	+ 1 532
360	— 4	— 1 236	— 88 411	+ 1 473
380	0	0	— 117 440	+ 1 452
400	0	0	— 131 960	+ 1 452

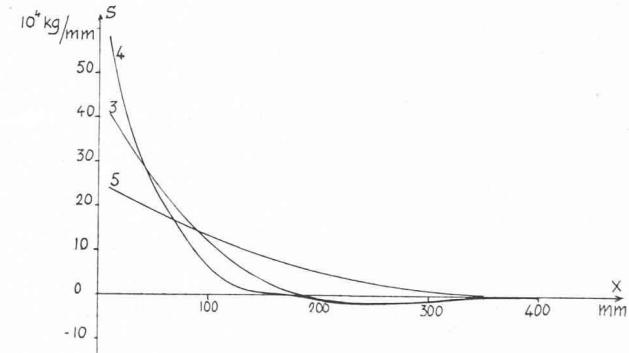


Fig. 6. — Répartition de l'effort annulaire pour un tube en acier.

Cas 3 : Tube à épaisseur constante  $h = 19$  mm.  
 Cas 4 : Tube à épaisseur variable.  
 Cas 5 : Tube à épaisseur constante  $h = 56$  mm.

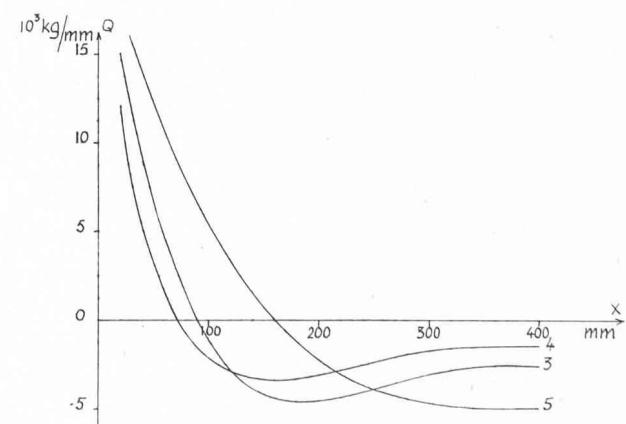


Fig. 8. — Répartition de l'effort tranchant pour un tube en acier.

Cas 3 : Tube à épaisseur constante  $h = 19$  mm.  
 Cas 4 : Tube à épaisseur variable.  
 Cas 5 : Tube à épaisseur constante  $h = 56$  mm.

TABLEAU 5

Abscisse mm	Déformation mm	Effort annulaire kg/mm	Moment de flexion kgmm/mm	Effort tranchant kg/mm
0	+ 246	+ 239 940	+ 241 760	- 21 978
20	+ 220	+ 214 580	+ 597 850	- 17 805
40	+ 195	+ 189 950	+ 879 310	- 14 073
60	+ 171	+ 166 380	+ 1 094 700	- 10 769
80	+ 148	+ 144 140	+ 1 252 200	- 7 876
100	+ 127	+ 123 410	+ 1 359 600	- 5 369
120	+ 107	+ 104 330	+ 1 424 100	- 3 223
140	+ 89	+ 86 978	+ 1 452 200	- 1 408
160	+ 73	+ 71 382	+ 1 450 100	+ 104
180	+ 59	+ 57 543	+ 1 423 200	+ 1 346
200	+ 47	+ 45 427	+ 1 376 300	+ 2 346
220	+ 36	+ 34 979	+ 1 313 600	+ 3 137
240	+ 27	+ 26 121	+ 1 238 700	+ 3 745
260	+ 19	+ 18 764	+ 1 154 700	+ 4 199
280	+ 13	+ 12 805	+ 1 064 200	+ 4 525
300	+ 8	+ 8 135	+ 969 190	+ 4 748
320	+ 5	+ 4 639	+ 871 390	+ 4 890
340	+ 2	+ 2 198	+ 771 980	+ 4 970
360	+ 1	+ 6 921	+ 671 810	+ 5 009
380	0	0	+ 571 400	+ 5 021
400	0	0	+ 521 190	+ 5 020

$$A[\omega] = \int_0^1 \left[ \frac{h^3}{2} \left( \frac{d^2\omega}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{kh}{2} \omega^2 \right] dx$$

$$- \frac{12(1-v^2)H^2}{E} M_0 \left( \frac{d\omega}{d\xi} \right)_{\xi=0} - \frac{12(1-v^2)H^3}{E} Q_0 \omega_{\xi=0}$$

avec  $\omega = 0$  et  $\omega' = 0$  pour  $\xi = 1$ .

Le problème sera résolu d'une façon approchée en remplaçant l'intégrale par une somme ; on remplacera

$$\left( \frac{d\omega}{d\xi} \right)_{\xi=0} \text{ par } n(\omega_1 - \omega_0)$$

et

$$\omega_{\xi=0} \text{ par } \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_1).$$

On obtient ainsi l'expression à rendre minimum

$$A^*(\omega_i) = n^3 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{h_i^3}{2} (\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1})^2 + \frac{kh_i}{2} \omega_i^2 \right]$$

$$- \frac{12(1-v^2)H^2n}{E} M_0 (\omega_1 - \omega_0) - \frac{12(1-v^2)H^3}{2E} Q_0 (\omega_0 + \omega_1);$$

ici encore, on annule les dérivées de cette expression par rapport aux  $\omega_i$  ; on obtient ainsi un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues, dont la matrice est strictement la même que celle que l'on a trouvée dans le problème du réservoir ; seuls les seconds membres sont changés ; ils sont

$$\frac{12(1-v^2)H^2}{E} \left( \frac{H Q_0}{2} - n M_0 \right)$$

pour la première équation,

$$\frac{12(1-v^2)H^2}{E} \left( \frac{H Q_0}{2} + n M_0 \right)$$

pour la seconde équation,

0 pour toutes les autres équations.

Le calcul ne diffère donc peu de celui qui a été fait plus haut. On calcule de la même manière la déformée  $\omega$ , puis  $M$ ,  $Q$  et  $S$ .

### Exemples numériques

*Exemple 3.* — Données numériques :

$$\begin{aligned} H &= 400 \text{ mm} \\ a &= 1150 \text{ mm} \\ h &= 19 \text{ mm (constant)} \\ E &= 2 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2 \text{ (acier)} \\ v &= 0,3 \\ M_0 &= 2,19778 \cdot 10^4 \text{ kgmm/mm} \\ Q_0 &= 2,19778 \cdot 10^4 \text{ kg/mm} \end{aligned}$$

*Exemple 4.* — Mêmes données, à part l'épaisseur  $h$  qui est variable :

$$h = \begin{cases} (7,4833 - 0,034715 x)^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 90 \text{ mm} \\ 19 \text{ mm} & \text{pour } x \geq 90 \text{ mm} \end{cases}$$

*Exemple 5.* — Mêmes données, à part l'épaisseur  $h$  qui est constante :

$$h = 56 \text{ mm}$$

On a fait le calcul en subdivisant la longueur en  $n = 20$  parties égales ; les résultats numériques sont donnés aux tableaux 3, 4 et 5 ; ils sont reportés sur les figures 5 à 8. Ces trois exemples sont repris d'une étude due au professeur J. Paschoud [3], où ils ont été traités par une méthode tout à fait différente ; on remarquera que l'accord des résultats est excellent.

La durée des calculs pour chacun de ces exemples est inférieure à 3 minutes ; on doit faire à propos de la variation de l'épaisseur  $h$  la même remarque que pour le cas du réservoir cylindrique.

### Conclusions

Les problèmes envisagés ici ne peuvent être résolus, en général, d'une manière exacte (ce qui constituerait au reste une exigence inutile du point de vue pratique). La méthode exposée a l'avantage de se prêter mieux que d'autres au calcul automatique ; c'est pour cette raison qu'elle nous paraît devoir être préférée.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ENGELI, GINSBURG, RUTISHAUSER, STIEFEL : *Refined iterative Methods for Computation of the Solution and the Eigenvalues of self-adjoint boundary value Problems*. Mit. aus dem Inst. für ang. Math. ETH, Birkhäuser, Bâle 1959.
- [2] LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, 1920.
- [3] J. PASCHOUD : *Recherche de l'élastique d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur variable*. Bull. Techn. de la Suisse romande, nos 15 et 16, 28 juillet 1945.
- [4] PÖSCHL, TH. : *Berechnung von Behältern*, Springer, Berlin 1926.