Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 88 (1962)

Heft: 24

Artikel: Étude théorique de l'influence d'une discontiniuité de la section droite d'une barre conique sur la propagation des vibrations élastiques longitudinales

Autor: Favre, Henry

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-771856

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

88e année Lausanne, 1er décembre 1962 N° 24

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.
de la Section genevoise de la S.I.A.
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: † J. Calame, ing. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; E. Martin, arch. J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre, arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION
Vacat
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 28.—	Etranger	Fr. 32.—
Sociétaires	»	» 23.—	»	» 28.—
Prix du numéro	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande », N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES
Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 330.—
1/2 »	» 168.—
1/4 »	» 86.—
1/8 »	» 42.50

Adresse: Annonces Suisses S. A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales

SOMMAIRE

Etude théorique de l'influence d'une discontinuité de la section droite d'une barre conique sur la propagation des vibrations élastiques longitudinales, par Henry Favre, professeur à l'EPF, Zurich.
Bibliographie. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Informations diverses.

ÉTUDE THÉORIQUE DE L'INFLUENCE D'UNE DISCONTINUITÉ DE LA SECTION DROITE D'UNE BARRE CONIQUE SUR LA PROPAGATION DES VIBRATIONS ÉLASTIQUES LONGITUDINALES

par HENRY FAVRE, professeur à l'EPF, Zurich

§ 1. Introduction

On sait qu'une barre rectiligne peut être le siège de trois types de vibrations élastiques : 1° des *vibrations longitudinales*, où le déplacement — supposé petit — d'un point quelconque est constamment parallèle à l'axe ; 2° des *vibrations de torsion*, où toute section droite effectue une petite oscillation autour de cet axe ; et 3° des *vibrations transversales*, où les points d'une même section droite subissent, dans tout intervalle infinitésimal de temps, de petits déplacements, égaux et parallèles, dans une direction perpendiculaire à l'axe. Chacun de ces types peut être encore divisé en deux catégories : celle des *ondes progressives* et celle des *ondes stationnaires*.

Les vibrations des *barres cylindriques* ou *prismatiques* ont été l'objet de très nombreuses études, non seulement théoriques, mais aussi expérimentales [1]. Mais on a également entrepris un certain nombre de recherches relatives au cas de *barres, où la section varie d'une façon continue le long de l'axe* [2]. Par contre, très peu d'études ont été faites jusqu'à présent en supposant que *la section subisse une discontinuité*. Et dans ces dernières recherches, on a toujours, à notre connaissance, admis que les deux parties de la barre, situées de part et d'autre de la discontinuité, étaient cylindriques ou prismatiques [3].

Nous nous proposons d'étudier ici l'*influence d'une discontinuité de la section d'une barre conique sur la propagation des vibrations longitudinales sinusoïdales (ondes progressives sinusoïdales) le long de cette barre*. Nous traiterons en réalité un problème plus général, celui où la barre est formée de deux troncs de cône coaxiaux, solidaires, d'angles solides différents, mais très petits, en supposant que les propriétés mécaniques de la matière de chacune de ces parties soient différentes (comme nous le verrons, les seules constantes physiques intervenant ici sont les masses spécifiques et

[1] Voir par exemple [1], Ch. VII et VIII ; [2], Ch. I à IV ; [3], Ch. V et VI ; [4], Ch. XX ; [5], Ch. III à VIII. Les crochets [ ] se rapportent à la bibliographie placée à la fin de ce mémoire.
[2] Citons [2], p. 32-34 et 118-124 ; [3], p. 385-392 ; [5], p. 75-79 et 193-194.
[3] Voir principalement [1], p. 250 et 251 ; [6] ; [7].

les modules d'élasticité de ces deux parties, supposées homogènes et isotropes). Au point de jonction et dans le cas le plus général, non seulement la section, mais aussi l'angle solide des deux parties coniques et les propriétés mécaniques de la matière subiront donc des discontinuités. Les calculs seront basés sur la théorie élémentaire de la propagation des petites vibrations longitudinales élastiques dans une barre conique. Cette théorie suppose que les points appartenant à toute section droite subissent, dans chaque intervalle de temps, des déplacements égaux entre eux. En outre, elle néglige l'influence des frottements internes.

Après avoir rappelé quelques équations fondamentales (§ 2), nous établirons les formules générales pour le calcul de l'onde réfléchie et de l'onde transmise, produites par les discontinuités définies ci-dessus, et provenant d'une onde incidente sinusoïdale (§ 3). Dans le paragraphe 4, nous ferons plusieurs remarques essentielles sur ces formules, puis nous étudierons un certain nombre de cas particuliers intéressants (§ 5).

La présente étude théorique a été faite dans le cadre de recherches expérimentales sur la propagation des ondes élastiques dans les solides, exécutées par le Laboratoire de photoélasticité de l'EPF et subventionnées par le Fonds national suisse de la recherche scientifique.

§ 2. Rappel des équations régissant la propagation des vibrations élastiques longitudinales le long d'une barre conique, d'angle solide très petit

Désignons par Ω l'angle solide, E le module d'élasticité et ρ la masse spécifique de la barre (fig. 1). Soit encore r la distance, avant la vibration, d'une section droite [4] au sommet O, u la valeur, au temps t, du petit déplacement, sensiblement parallèle à l'axe de la barre, d'un point quelconque de cette section, pendant le mouvement.

Le déplacement u doit satisfaire à l'équation [5] :

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \tag{1}$$

dont la solution générale est :

$$u = \frac{1}{r}\left[\Phi(ct - r) + \varphi(ct + r)\right], \tag{2}$$

où Φ et φ désignent des fonctions quelconques représentant, la première, une onde se propageant en s'éloignant du sommet O, la seconde, une onde se dirigeant vers ce point. Ces deux ondes Φ, φ, qui ont la même vitesse de propagation

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{3}$$

ne se déforment pas en se propageant. Le déplacement u résulte des deux ondes Φ/r, φ/r, qui se déforment par contre en se propageant, par suite de la présence du facteur $1/r$.

La tension normale σ dans le section r est donnée par la loi de Hooke

[4] Il s'agit en réalité d'une section sphérique, mais qui peut être assimilée ici à une surface plane, Ω étant supposé très petit.

[5] Voir par exemple [5], p. 77.

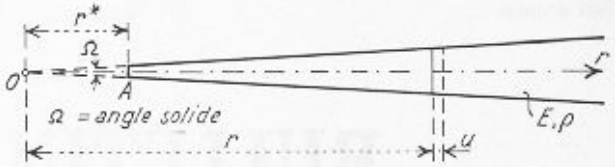

Fig. 1. — Vibrations élastiques longitudinales u, dans une barre conique.

$$\sigma = E\frac{\partial u}{\partial r}, \tag{4}$$

d'où :

$$\sigma = -\frac{E}{r}\Phi'(ct - r) - \frac{E}{r^2}\Phi(ct - r) + \\ + \frac{E}{r}\varphi'(ct + r) - \frac{E}{r^2}\varphi(ct + r). \tag{5}$$

Dans le cas d'une *onde sinusoïdale s'éloignant du sommet O*, par exemple, on peut poser :

$$u = \frac{C}{r}\sin(pt - fr + \varepsilon), \tag{6}$$

où C est l'amplitude de la vibration pour $r = 1$, ε la phase initiale pour $r = O$, $p/2\pi$ la fréquence, et où

$$f = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{c} = p\sqrt{\frac{\rho}{E}}, \tag{7}$$

λ étant la longueur d'onde. Nous mettrons la fonction (6) de préférence sous la forme [6] :

$$u = \frac{A}{r}\sin(pt - fr) + \frac{\overline{A}}{r}\cos(pt - fr), \tag{8}$$

où :

$$A = C\cos\varepsilon, \quad \overline{A} = C\sin\varepsilon. \tag{9}$$

Si A et $\overline{A}$ sont donnés, on calculera l'amplitude C (que l'on choisira positive) et la phase ε $(-\pi \leq \varepsilon \leq \pi)$ à l'aide des formules suivantes, tirées du système (9) :

$$C = \sqrt{A^2 + \overline{A}^2}, \quad \sin\varepsilon = \frac{\overline{A}}{C}, \quad \cos\varepsilon = \frac{A}{C}. \tag{10}$$

Remarquons que si l'onde sinusoïdale s'approchait du sommet O au lieu de s'en éloigner, les relations (7), (9), (10) resteraient applicables ; par contre, dans les arguments de (6) et (8), le terme $-fr$ devrait être remplacé par $+fr$.

En introduisant l'expression (8) de u dans la relation (4), on obtient, en remarquant encore que, en vertu de (7),

[6] Les calculs que nous ferons plus loin, basés sur des formules analogues à (8), pourraient aussi être faits en utilisant des fonctions exponentielles, avec exposants imaginaires. L'emploi de telles fonctions étant surtout justifié lorsque des facteurs amortissants réels interviennent, ce qui ne sera pas le cas ici, nous n'avons pas jugé indiqué de les utiliser. Ajoutons que si nous avons préféré représenter une onde sinusoïdale par la relation (8) plutôt que par la relation (6), c'est que les formules donnant les valeurs de A et $\overline{A}$ que nous obtiendrons plus loin pour les ondes réfléchie et transmise sont plus simples que celles donnant les valeurs de C et ε relatives à ces ondes.

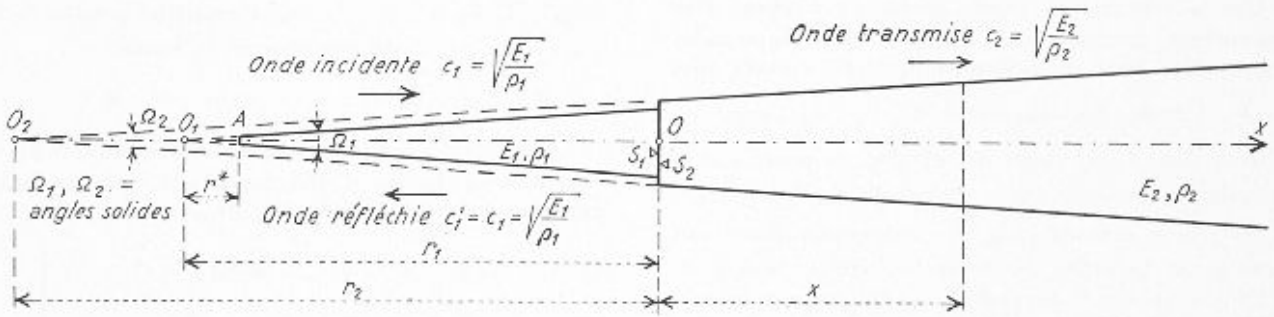

Fig. 2. — Cas général d'une barre conique, formée de deux parties de caractéristiques différentes (§§ 3, 4), et cas particulier 1, § 5.

$$Ef = \sqrt{E\rho}\, p\,; \tag{11}$$

$$\sigma = -A\sqrt{E\rho}\, pr^{-1}\cos(pt - fr) - AEr^{-2}\sin(pt - fr) + \\ + \bar{A}\sqrt{E\rho}\, pr^{-1}\sin(pt - fr) - \bar{A}Er^{-2}\cos(pt - fr). \tag{12}$$

On remarquera que, par suite de la présence des termes où figure le facteur r^{-2}, l'*onde de tension* (12) se déforme, en se propageant, selon une loi différente de celle régissant la déformation de l'*onde de déplacement* (8).

Les formules (8) et (12) — ou les formules analogues que nous utiliserons plus loin — ne sont valables que si, dans le domaine r considéré, les dimensions des sections droites sont partout petites par rapport à la longueur d'onde λ[7]. En outre, et pour des raisons évidentes, ces formules seront d'autant plus exactes que la section droite sera plus voisine d'un cercle. Un polygone régulier satisfera par exemple d'autant mieux à cette condition que le nombre de ses côtés sera plus grand. Enfin, les formules en question ne sont pas applicables au voisinage du point O, u et σ devenant infiniment grands si, dans (8) et (12), on fait tendre r vers zéro. C'est pourquoi nous limiterons l'application de ces formules à des barres où l'une des extrémités — celle correspondant à la plus petite section — est en un point A, où $r = r^*$ (fig. 1), ce point étant choisi de façon que, dans le tronc de cône $r^* \leq r \leq \infty$, la tension σ soit partout et à chaque instant inférieure à la limite de proportionnalité de la matière.

§ 3. Formules générales pour le calcul de l'onde réfléchie et de l'onde transmise, produites par des discontinuités en un point d'une barre conique, et provenant d'une vibration incidente sinusoïdale

Une coupe longitudinale de la barre est représentée figure 2. Nous désignons par r_1, r_2 les distances, au point de discontinuité O, des sommets O_1, O_2 des deux parties coniques, par x l'abscisse d'une section quelconque (r_1, r_2 sont positifs, x est par contre négatif pour les sections situées à gauche de O dans la figure, positif pour les sections situées à droite de ce point).

Soient encore Ω_1, Ω_2, E_1, E_2, ρ_1, ρ_2 les angles solides, les modules d'élasticité et les masses spécifiques des deux parties de la barre.

[7] Voir [5], p. 76.

Supposons qu'une *onde incidente sinusoïdale donnée*, de fréquence $p/2\pi$, se propage le long du tronc de cône AO de sommet O_1, à partir du point A. Le déplacement u_1 (élongation), au temps t, d'un point d'une section d'abscisse x $[-(r_1 - r^*) \leq x \leq 0]$ peut être représenté par la fonction[8] :

$$u_1 = \frac{A_1}{r_1 + x}\sin(pt - f_1 x), \tag{13}$$

où A_1 désigne une constante donnée, que nous supposerons positive, et où

$$f_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{p}{c_1} = p\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, \qquad E_1 f_1 = \sqrt{E_1\rho_1}\, p, \tag{14}$$

λ_1 étant la longueur d'onde de la vibration incidente et $c_1 = (E_1/\rho_1)^{1/2}$ sa vitesse de propagation.

Au point O, la vibration (13) se transforme en une *onde réfléchie* et une *onde transmise*, dont les élongations u_1', u_2 peuvent être respectivement représentées par les fonctions[9] :

$$u_1' = \frac{A_1'}{r_1 + x}\sin(pt + f_1 x) + \frac{\bar{A}_1'}{r_1 + x}\cos(pt + f_1 x), \tag{15}$$

$$u_2 = \frac{A_2}{r_2 + x}\sin(pt - f_2 x) + \frac{\bar{A}_2}{r_2 + x}\cos(pt - f_2 x), \tag{16}$$

où A_1', $\bar{A}_1'$, A_2, $\bar{A}_2$ désignent des constantes (cherchées) et où

$$f_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{p}{c_2} = p\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}, \quad E_2 f_2 = \sqrt{E_2\rho_2}\, p, \tag{17}$$

λ_2 étant la longueur d'onde de la vibration transmise u_2 et $c_2 = (E_2/\rho_2)^{1/2}$ la vitesse de propagation de cette onde (les quantités f_1, λ_1, c_1, relatives à l'onde réfléchie u_1', sont les mêmes que celles de l'onde incidente). La formule (15) concerne la partie $-(r_1 - r^*) \leq x \leq 0$ de la barre, la formule (16), la partie $x \geq 0$.

[8] On admet ici que la *phase initiale* de la vibration incidente est nulle au point O ($x = 0$), où la section est discontinue. La vibration (13) peut être engendrée en donnant à l'extrémité A un déplacement $(u_1)_A = A_1(r^*)^{-1}\sin[pt - f_1(r^* - r_1)]$.

[9] Si le phénomène étudié dure suffisamment longtemps, aux ondes (13), (15) et (16) viendront s'ajouter celles provenant des réflexions successives à l'extrémité A et au point O. Les calculs qui suivent n'ont pas à tenir compte de ces nouvelles ondes, puisqu'il s'agit ici essentiellement de déterminer comment une onde incidente sinusoïdale (13) est transformée, au point O, par les discontinuités définies plus haut.

L'onde réfléchie et l'onde transmise peuvent être considérées, chacune, comme la somme de deux ondes sinusoïdales dont les phases sont décalées entre elles de $\frac{\pi}{2}$. Lorsque les constantes A_1', ... $\overline{A}_2$ auront été déterminées, il sera facile de calculer, au point $x = 0$, à l'aide des formules (10), les *amplitudes* C_1'/r_1, C_2/r_2 et les *phases initiales* ε_1', ε_2, des vibrations provenant en ce point des ondes résultantes réfléchie et transmise.

Pour simplifier le langage, nous désignerons dans la suite le premier terme (celui où figure le sinus) de chacune des expressions de u_1' et u_2 sous le nom d'*onde primaire* — réfléchie ou transmise — et le second terme (celui où figure le cosinus) sous le nom d'*onde secondaire*.

Les conditions au point de discontinuité O vont nous permettre de déterminer les valeurs des constantes A_1', $\overline{A}_1'$, A_2, $\overline{A}_2$. On doit avoir en effet, pour $x = 0$ et quel que soit t :

$$u_1 + u_1' = u_2, \quad \Omega_1 r_1^2 (\sigma_1 + \sigma_1') = \Omega_2 r_2^2 \sigma_2, \tag{18}$$

où σ_1, σ_1', σ_2 désignent les tensions engendrées en ce point, respectivement par les ondes (13), (15) et (16). La première des conditions (18) exprime la continuité des déplacements, la seconde, la loi d'égalité de l'action et de la réaction, pour $x = 0$.

Calculons d'abord les tensions σ_1, σ_1' engendrées par les vibrations (13), (15) dans le domaine $-(r_1 - r^*) \leq x \leq 0$ et la tension σ_2 produite par la vibration (16) dans la zone $x \geqq 0$:

$$\sigma_1 = E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{A_1 \sqrt{E_1 \rho_1}\, p}{r_1 + x} \cos(pt - f_1 x) - \frac{A_1 E_1}{(r_1 + x)^2} \sin(pt - f_1 x), \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1' = E_1 \frac{\partial u_1'}{\partial x} = &+ \frac{A_1' \sqrt{E_1 \rho_1}\, p}{r_1 + x} \cos(pt + f_1 x) - \\ &- \frac{A_1' E_1}{(r_1 + x)^2} \sin(pt + f_1 x) - \\ &- \frac{\overline{A}_1' \sqrt{E_1 \rho_1}\, p}{r_1 + x} \sin(pt + f_1 x) - \\ &- \frac{\overline{A}_1' E_1}{(r_1 + x)^2} \cos(pt + f_1 x), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_2 = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = &- \frac{A_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\, p}{r_2 + x} \cos(pt - f_2 x) - \\ &- \frac{A_2 E_2}{(r_2 + x)^2} \sin(pt - f_2 x) + \\ &+ \frac{\overline{A}_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\, p}{r_2 + x} \sin(pt - f_2 x) - \\ &- \frac{\overline{A}_2 E_2}{(r_2 + x)^2} \cos(pt - f_2 x). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Introduisons maintenant, dans les équations (18), les valeurs (13), (15), (16) de u_1, u_1', u_2, et les valeurs (19), (20), (21) de σ_1, σ_1', σ_2, *toutes spécifiées pour* $x = 0$; nous obtenons deux relations de la forme :

$$(\ldots) \sin(pt) + (\ldots) \cos(pt) = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients de *sin* (pt) et de *cos* (pt) dans chacune d'elles, on obtient, après quelques transformations, les quatre équations :

$$\left.\begin{aligned} & r_2 A_1' - r_1 A_2 = -r_2 A_1, \qquad r_2 \overline{A}_1' - r_1 \overline{A}_2 = 0, \\ & \Omega_1 E_1 A_1' + \Omega_1 r_1 \sqrt{E_1 \rho_1}\, p \overline{A}_1' - \\ & \Omega_2 E_2 A_2 + \Omega_2 r_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\, p \overline{A}_2 = -\Omega_1 E_1 A_1, \\ & \Omega_1 r_1 \sqrt{E_1 \rho_1}\, p A_1' - \Omega_1 E_1 \overline{A}_1' + \\ & + \Omega_2 r_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\, p A_2 + \Omega_2 E_2 \overline{A}_2 = \Omega_1 r_1 \sqrt{E_1 \rho_1}\, p A_1. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Le système (22), résolu par rapport à A_1', $\overline{A}_1'$, A_2, $\overline{A}_2$, donne finalement pour les valeurs des constantes cherchées :

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= D^{-1} \left[(S_1^2 E_1 \rho_1 - S_2^2 E_2 \rho_2)\, p^2 - \right. \\ &\quad \left. - (S_2 r_2^{-1} E_2 - S_1 r_1^{-1} E_1)^2 \right] A_1, \\ \overline{A}_1' &= 2 D^{-1} S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} (S_2 r_2^{-1} E_2 - S_1 r_1^{-1} E_1)\, p A_1, \\ A_2 &= 2 D^{-1} S_1 r_1^{-1} r_2 \sqrt{E_1 \rho_1} (S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + \\ &\quad + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2})\, p^2 A_1, \\ \overline{A}_2 &= 2 D^{-1} S_1 r_1^{-1} r_2 \sqrt{E_1 \rho_1} (S_2 r_2^{-1} E_2 - \\ &\quad - S_1 r_1^{-1} E_1)\, p A_1, \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

où

$$S_1 = \Omega_1 r_1^2, \qquad S_2 = \Omega_2 r_2^2 \tag{23}$$

désignent les aires des sections de la barre, au point O, de part et d'autre de la discontinuité, et où :

$$D = (S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2})^2 p^2 + (S_2 r_2^{-1} E_2 - S_1 r_1^{-1} E_1)^2. \tag{24}$$

Les valeurs (I) des constantes sont exprimées en fonction de la fréquence $p/2\pi$. En remarquant que $p = 2\pi E_1^{1/2} \rho_1^{-1/2} \lambda_1^{-1}$ (voir (14)), on peut également exprimer ces constantes en fonction de la longueur d'onde λ_1. On obtient ainsi les formules (II) ci-dessous :

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= D_1^{-1} \left[\left(1 - \frac{S_2^2 E_2 \rho_2}{S_1^2 E_1 \rho_1}\right) \frac{4\pi^2 r_1^2}{\lambda_1^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{S_2 r_1 E_2}{S_1 r_2 E_1}\right)^2 \right] A_1, \\ \overline{A}_1' &= -D_1^{-1} \left(1 - \frac{S_2 r_1 E_2}{S_1 r_2 E_1}\right) \frac{4\pi r_1}{\lambda_1} A_1, \\ A_2 &= D_1^{-1} r_1^{-1} r_2 \left(1 + \frac{S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}}{S_1 \sqrt{E_1 \rho_1}}\right) \frac{8\pi^2 r_1^2}{\lambda_1^2} A_1, \\ \overline{A}_2 &= -D_1^{-1} r_1^{-1} r_2 \left(1 - \frac{S_2 r_1 E_2}{S_1 r_2 E_1}\right) \frac{4\pi r_1}{\lambda_1} A_1, \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

où

$$D_1 = \left(1 + \frac{S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}}{S_1 \sqrt{E_1 \rho_1}}\right)^2 \frac{4\pi^2 r_1^2}{\lambda_1^2} + \left(1 - \frac{S_2 r_1 E_2}{S_1 r_2 E_1}\right)^2. \tag{25}$$

§ 4. Remarques essentielles sur les formules obtenues

Nous ne ferons pas une discussion détaillée des formules (13), (15), (16) et (I), (II) ; elle nous entraînerait trop loin et sortirait du cadre de cette étude. Mais avant d'appliquer ces formules à un certain nombre de cas particuliers, nous voulons, dans ce paragraphe, faire à leur sujet plusieurs remarques essentielles :

1. L'onde réfléchie et l'onde transmise sont en général formées, chacune, d'une *onde primaire* et d'une *onde secondaire*, les coefficients A_1', $\overline{A}_1'$, A_2, $\overline{A}_2$ étant, sauf exception, différents de zéro. Or, nous verrons plus loin (§ 5, 2.)[10] que lorsque les deux parties de la barre sont cylindriques ou prismatiques, les ondes secondaires réfléchie et transmise disparaissent. Ces ondes existent par contre en général sitôt qu'au moins une des deux parties est conique (voir par exemple § 5, 3. et 4.). On peut donc dire que *la conicité entraîne l'existence des ondes secondaires réfléchie et transmise.* Sans cette conicité, seules les ondes primaires existeraient.

En se basant sur les relations (10), on voit alors que, *dans le cas de la conicité, la vibration provenant, au point O, de l'onde résultante réfléchie u_1', et celle provenant en ce point de l'onde résultante transmise u_2, accusent toutes deux des différences de phase par rapport à la vibration due à l'onde incidente u_1. Ces différences disparaissent si les deux parties de la barre sont cylindriques ou prismatiques.*

2. Comme le montrent les formules (I) et (II), les *coefficients A_1', ... $\overline{A}_2$ dépendent en général de la fréquence commune $p/2\pi$ des trois ondes (13), (15), (16), ou, ce qui revient au même, de la longueur d'onde λ_1. Mais cette dépendance n'existe pas dans les deux cas exceptionnels suivants :*

a) *Les distances r_1, r_2 sont finies et du même ordre de grandeur, et la longueur d'onde λ_1 est très petite par rapport à $2\pi r_1$ (cas des hautes fréquences $p/2\pi$).* On a en effet ici, d'après les formules (II) :

$$A_1' \cong \frac{S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} - S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}}{S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}} A_1, \tag{26}$$

$$A_2 \cong \frac{2 S_1 r_1^{-1} r_2 \sqrt{E_1 \rho_1}}{S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}} A_1, \qquad \overline{A}_1' \cong \overline{A}_2 \cong 0.$$

On voit en outre que *seules les ondes primaires existent ici.*

b) *Les distances r_1, r_2 sont finies et du même ordre de grandeur, la longueur d'onde λ_1 est très grande par rapport à $2\pi r_1$ (cas des basses fréquences) et $S_2 r_1 E_2 \neq S_1 r_2 E_1$.* Les mêmes formules (II) montrent que, dans ce cas :

$$A_1' \cong -A_1, \quad \overline{A}_1' \cong A_2 \cong \overline{A}_2 \cong 0. \tag{27}$$

[10] Voir également [1], p. 235 et 251, ainsi que [7], p. 136 et 137.

Il n'y a pratiquement *aucune onde transmise, et pas d'onde réfléchie secondaire.* L'onde incidente et l'onde réfléchie primaire (cette dernière est égale à la première, au signe et au sens près) interfèrent dans la partie $\overline{AO}$ de la barre et donnent une *onde stationnaire*, avec un nœud de vibration en O. Comme λ_1 est très grand par rapport à $2\pi r_1$, le ventre (virtuel) de la première onde stationnaire est à gauche du sommet O_1 et très éloigné, en sorte que les déplacements des points du tronc de cône $\overline{AO}$ sont quasi nuls, comme le sont ceux des points du second tronc de cône (fig. 2). Dans ce cas, *tous les points de la barre sont approximativement immobiles.* Il s'agit d'un *état quasi statique.* L'état statique rigoureux serait réalisé si la longueur d'onde λ_1 était infiniment grande.

3. Le fait que les constantes A_1', ... $\overline{A}_2$ dépendent en général de la fréquence $p/2\pi$ (ou de la longueur d'onde λ_1) a deux conséquences importantes. Avant de les énoncer, remarquons d'abord que *si l'onde incidente u_1 est sinusoïdale,* comme nous l'avons admis jusqu'à présent, les vibrations en tout point $-(r_1 - r^*) \leq x \leq 0$ dues à cette onde sont harmoniques, et, abstraction faite du facteur $(r_1 + x)^{-1}$, le diagramme représentant u_1 en fonction de x, au temps t, est une sinusoïde. *Les ondes résultantes réfléchie et transmise jouissent des mêmes propriétés,* la première pour $-(r_1 - r^*) \leq x \leq 0$, la seconde pour $x \geq 0$. En d'autres termes, ces deux dernières ondes sont, au temps t, et toujours sans tenir compte des facteurs $(r_1 + x)^{-1}$ ou $(r_2 + x)^{-1}$, représentées par des courbes de même forme que celle de l'onde incidente, à des transformations par affinité près. On voit maintenant par contre que :

a) *Si — contrairement à ce que nous avons supposé jusqu'ici — l'onde incidente était une fonction périodique non sinusoïdale de l'argument $c_1 t - x$, les ondes résultantes réfléchie et transmise seraient, au temps t, en général représentées en fonction de x par des courbes essentiellement différentes de celle de l'onde incidente.* Cela découle du fait que l'onde partielle sinusoïdale correspondant à tout terme de la série trigonométrique représentant au temps t l'onde incidente (abstraction faite du facteur $(r_1 + x)^{-1}$) serait, en arrivant à la discontinuité, transformée par la réflexion et la transmission en deux ondes partielles sinusoïdales, dont les amplitudes et les phases dépendraient de la fréquence de l'onde incidente partielle considérée.

b) Et si la vibration incidente n'était pas une fonction périodique de l'argument, mais était par exemple une *courte impulsion* de forme déterminée, *les courbes représentant, au temps t, les impulsions réfléchie et transmise seraient aussi essentiellement différentes de la courbe représentant l'onde incidente.*

Or ces différences (définies sous a) et b)) n'existent pas si les deux parties de la barre sont cylindriques ou prismatiques, comme nous le verrons plus loin (§ 5, 2.)[10]. Ainsi *la conicité est en définitive la cause du fait que les ondes réfléchie et transmise n'ont en général pas la même forme que l'onde incidente.* Il n'y a exception que si cette dernière est représentée par une sinusoïde, qui comprend un très grand nombre d'ondulations, comme nous l'avons implicitement supposé.

4. Une autre remarque de caractère général est la suivante. En admettant que *toutes les grandeurs interve-*

nant dans les formules (I) ou (II) soient finies, on voit que A_2 est toujours différent de zéro, tandis que A'_1, $\bar{A}'_1$, $\bar{A}_2$ peuvent être nuls. *Quelles que soient les circonstances, il y a donc nécessairement une onde primaire transmise.* Il n'en est pas de même des trois autres ondes engendrées par l'onde incidente. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans le paragraphe suivant (le cas b) du point 2 ci-dessus fait exception à cette règle, car la longueur d'onde λ_1 est supposée très grande).

5. Remarquons également que les formules (I) ou (II), basées sur les conditions (18), seront d'autant plus exactes que les deux courbes limitant les sections S_1, S_2, au droit de la discontinuité, seront plus voisines l'une de l'autre. Si ces courbes diffèrent notablement, la discontinuité de la section engendrera, de part et d'autre du point O, des zones perturbées, où les déplacements u et les tensions σ ne seront plus uniformément répartis dans une section droite, comme il a été implicitement admis en écrivant les deux équations (18). Il ne faudrait cependant pas exagérer l'importance des erreurs dues à ces zones perturbées, la longueur de chacune d'elles étant probablement du même ordre de grandeur que la plus grande dimension de la section droite correspondante.

6. Signalons encore que les relations établies (I) et (II) sont non seulement applicables au cas de la figure 2, où les sommets O_1 et O_2 sont situés à gauche de l'origine O, mais qu'*elles le sont encore si l'un ou l'autre de ces sommets, ou même les deux, sont situés à droite de ce point.* Il suffira, dans chaque cas particulier, d'examiner quels sont les termes qui changent de signe dans les relations (13), (15), (16) et (I), (II), pour obtenir les formules adéquates. Nous montrerons plus loin (§ 5, 5. et 5'.), à l'aide de deux exemples, comment il faut alors procéder.

7. Enfin, il est essentiel de remarquer, que lorsqu'on aura calculé les « ondes de vibration » à l'aide des formules générales (13), (15), (16) et (I) ou (II) — ou à l'aide des formules particulières que nous établirons dans le paragraphe suivant — on en déduira sans difficulté les « ondes de tensions » (stress waves) en appliquant les formules (19), (20) et (21).

§ 5. Examen de plusieurs cas particuliers

Nous allons maintenant supposer successivement que certaines des caractéristiques de chacune des deux parties de la barre étudiée sont égales entre elles, ou infiniment grandes.

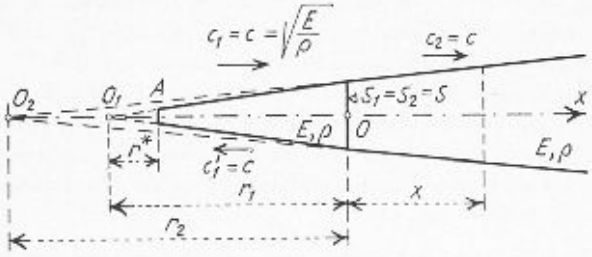

Fig. 3. — Cas particulier 1', § 5.

1. Admettons tout d'abord que *les deux parties soient faites avec la même matière.* On a (fig. 2) :

$$E_1 = E_2 = E, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho,$$

et les formules (I) deviennent :

$$\left.\begin{aligned}
A'_1 &= \frac{(S_1^2 - S_2^2)\,\rho\,p^2 - (S_2\,r_2^{-1} - S_1\,r_1^{-1})^2\,E}{(S_1 + S_2)^2\,\rho\,p^2 + (S_2\,r_2^{-1} - S_1\,r_1^{-1})^2\,E}\,A_1,\\
\bar{A}'_1 &= \frac{2\,S_1\,(S_2\,r_2^{-1} - S_1\,r_1^{-1})\,\sqrt{E\,\rho}\,p}{(S_1 + S_2)^2\,\rho\,p^2 + (S_2\,r_2^{-1} - S_1\,r_1^{-1})^2\,E}\,A_1,\\
A_2 &= \frac{2\,S_1\,r_1^{-1}\,r_2\,(S_1 + S_2)\,\rho\,p^2}{(S_1 + S_2)^2\,\rho\,p^2 + (S_2\,r_2^{-1} - S_1\,r_1^{-1})^2\,E}\,A_1,\\
\bar{A}_2 &= \frac{2\,S_1\,r^{-1}\,r_2\,(S_2\,r_2^{-1} - S_1\,r_1^{-1})\,\sqrt{E\,\rho}\,p}{(S_1 + S_2)^2\,\rho\,p^2 + (S_2\,r_2^{-1} - S_1\,r_1^{-1})^2\,E}\,A_1,
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_1)$$

Les valeurs des constantes $A'_1, \ldots \bar{A}_2$ dépendent non seulement de r_1, r_2, S_1, S_2, A_1, mais aussi de E, ρ, p. Remarquons également que les vitesses de propagation et les longueurs d'onde sont les mêmes dans les deux parties de la barre, de sorte que, d'après (14) et (17), on doit poser $f_1 = f_2 = f = p\,\rho^{1/2}\,E^{-1/2}$ dans (13), (15), (16).

1'. Supposons en outre qu'*au point O, l'aire de la section ne soit pas discontinue*, c'est-à-dire que $S_1 = S_2 = S$ (fig. 3). Les expressions (I_1) se réduisent alors aux suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
A'_1 &= \frac{-(r_2^{-1} - r_1^{-1})^2\,E}{4\,\rho\,p^2 + (r_2^{-1} - r_1^{-1})^2\,E}\,A_1,\\
\bar{A}'_1 &= \frac{2\,(r_2^{-1} - r_1^{-1})\,\sqrt{E\,\rho}\,p}{4\,\rho\,p^2 + (r_2^{-1} - r_1^{-1})^2\,E}\,A_1,\\
A_2 &= \frac{4\,r_1^{-1}\,r_2\,\rho\,p^2}{4\,\rho\,p^2 + (r_2^{-1} - r_1^{-1})^2\,E}\,A_1,\\
\bar{A}_2 &= \frac{2\,r_1^{-1}\,r_2\,(r_2^{-1} - r_1^{-1})\,\sqrt{E\,\rho}\,p}{4\,\rho\,p^2 + (r_2^{-1} - r_1^{-1})^2\,E}\,A_1.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_{1'})$$

Ces formules font ressortir l'influence d'une discontinuité de l'angle solide au point O — à l'exclusion de toute autre discontinuité en ce point — sur la propagation d'une onde incidente sinusoïdale le long de la barre (si $S_1 = S_2 = S$ et $r_1 \neq r_2$, on a, en effet, $\Omega_1 \neq \Omega_2$). Elles montrent que les constantes $A'_1, \ldots \bar{A}_2$ dépendent ici seulement de r_1, r_2, E, ρ, p, A_1, donc pas de S. Elles montrent également que si r_1 tend vers r_2 (supposé constant), A'_1, $\bar{A}'_1$ et $\bar{A}_2$ tendront vers zéro, tandis que A_2 tendra vers la valeur A_1 : à la limite, l'onde incidente sera transmise sans modification par le point O, et il n'y aura pas d'onde réfléchie. Ce résultat est d'ailleurs évident, toute discontinuité ayant alors disparu. On peut dire aussi que, *si r_1 diffère peu de r_2, l'onde transmise primaire $A_2(r_2 + x)^{-1} \sin(pt - f_2 x)$ différera peu de l'onde incidente $A_1(r_1 + x)^{-1} \sin(pt - f_1 x)$ au voisinage du point O, où x est petit par rapport à r_1, r_2*[11], *tandis que l'onde transmise secondaire et les ondes réfléchies primaire et secondaire auront de faibles amplitudes et seront quasi négligeables.*

[11] Rappelons qu'on a ici $f_1 = f_2 = f = p\,\rho^{1/2}\,E^{-1/2}$.

Mais nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire que r_1 diffère peu de r_2 pour que les propriétés que nous venons d'énoncer soient valables. Il suffit que la longueur d'onde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ soit petite par rapport aux distances r_1, r_2. En effet, *supposons que ces distances soient différentes l'une de l'autre, mais du même ordre de grandeur* $(r_1 \sim r_2 \sim r)$, *et que* λ *soit petit par rapport à* r. On déduit des formules (I_1'), si l'on tient compte du fait que $16\,\pi^2 r^2/\lambda^2$ est ici un très grand nombre :

$$\left|\frac{A_1'}{A_1}\right| \sim \frac{1}{\dfrac{4\,r^2\,\rho\,p^2}{E} + 1} \sim \frac{1}{\dfrac{16\,\pi^2\,r^2}{\lambda^2} + 1} \sim \frac{\lambda^2}{16\,\pi^2\,r^2}\,, \qquad (28)$$

$$\left|\frac{\overline{A}_1'}{A_1}\right| \sim \left|\frac{\overline{A}_2}{A_1}\right| \sim \frac{2\,r\,\sqrt{\rho/E}\;p}{\dfrac{4\,r^2\,\rho\,p^2}{E} + 1} \sim \frac{2\,r\,\sqrt{\rho/E}\;p}{\dfrac{16\,\pi^2\,r^2}{\lambda^2} + 1} \sim \frac{\lambda}{4\,\pi\,r}\,, \qquad (29)$$

$$\frac{A_2}{A_1} \cong \frac{r_2/r_1}{1 + E/4\,r^2\,\rho\,p^2} \simeq \frac{r_2/r_1}{1 + \lambda^2/16\,\pi^2\,r^2} \simeq \frac{r_2}{r_1}. \qquad (30)$$

Ainsi, d'après (28) et dans les conditions admises, l'onde réfléchie primaire est très petite par rapport à l'onde incidente, puisque le rapport des amplitudes en O de ces deux ondes est de l'ordre de $\lambda^2/16\,\pi^2\,r^2$. D'autre part, les ondes secondaires réfléchie et transmise sont petites par rapport à l'onde incidente, le rapport des amplitudes en O de chacune des deux premières ondes, à l'amplitude de la dernière en ce point, étant d'après (29) de l'ordre de $\lambda/4\,\pi\,r$. Enfin, puisque, d'après (30), $A_2/r_2 \simeq A_1/r_1$, on voit que, au voisinage du point O, l'onde transmise primaire — qui est ici sensiblement égale à l'onde transmise résultante — différera peu de l'onde incidente [12]. Ce sont là précisément les propriétés déjà trouvées plus haut, en supposant que r_1 diffère peu de r_2.

En définitive, nous pouvons dire que *si la longueur d'onde* λ *est petite par rapport à* r_1 *et* r_2 [13], *ou si* r_1 *diffère peu de* r_2, *tout se passe comme si l'onde incidente provenant de la première partie de la barre passait, au point* O, *sans modification appréciable dans la seconde partie, ce qui signifie que, dans l'un ou l'autre de ces deux cas, l'influence de la discontinuité de l'angle solide est quasi négligeable.* En particulier, il n'y aura pas d'onde réfléchie.

Par contre, *si* λ *est du même ordre de grandeur que* r_1, r_2 *et si ces deux distances diffèrent notablement l'une de l'autre*, les ondes réfléchie et transmise jouiront de propriétés totalement différentes de celles énoncées ci-dessus, les rapports A_1'/A_1, $\overline{A}_1'/A_1$ et $\overline{A}_2/A_1$ n'étant en général plus petits par rapport à 1. Dans ce cas, *l'influence de la discontinuité de l'angle solide ne sera plus du tout négligeable.*

Remarquons encore que si r_1, r_2 sont du même ordre de grandeur $(r_1 \sim r_2 \sim r)$ et si λ *est très grand par rapport à* r, les constantes A_1', ... $\overline{A}_2$ deviennent égales aux valeurs (27), conformément à ce que nous avons vu § 4, 2. b).

2. Considérons ensuite le cas où *les deux parties de la barre sont des cylindres ou des prismes*, c'est-à-dire où $r_1 = \infty$, $r_2 = \infty$ (fig. 4) Pour obtenir les formules adéquates, partons des expressions générales (1) des constantes A_1', ... $\overline{A}_2$ et *faisons tendre dans ces formules* A_1 *vers l'infini en même temps que* r_1 *et* r_2, *mais de façon que le quotient* A_1/r_1 *tende vers une limite* B_1, *choisie arbitrairement.* Les quotients A_1'/r_1, $\overline{A}_1'/r_1$, A_2/r_2 et $\overline{A}_2/r_2$ tendront vers les limites :

$$\left.\begin{aligned}
B_1' &= \lim\left(\frac{A_1'}{r_1}\right) = \frac{S_1\,\sqrt{E_1\,\rho_1} - S_2\,\sqrt{E_2\,\rho_2}}{S_1\,\sqrt{E_1\,\rho_1} + S_2\,\sqrt{E_2\,\rho_2}}\,B_1\,,\\
\overline{B}_1' &= \lim\left(\frac{\overline{A}_1'}{r_1}\right) = 0\,,\\
B_2 &= \lim\left(\frac{A_2}{r_2}\right) = \frac{2\,S_1\,\sqrt{E_1\,\rho_1}}{S_1\,\sqrt{E_1\,\rho_1} + S_2\,\sqrt{E_2\,\rho_2}}\,B_1\,,\\
\overline{B}_2 &= \lim\left(\frac{\overline{A}_2}{r_2}\right) = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (I_2)$$

En remarquant encore que si x reste constant, et si A_1, r_1, r_2 tendent vers l'infini comme il a été précisé plus haut, on a :

$$\lim\left[A_1/(r_1 + x)\right] = \lim\left(\frac{A_1}{r_1}\right) = B_1,$$

$$\lim\left[A_1'/(r_1 + x)\right] = \lim\left(\frac{A_1'}{r_1}\right) = B_1'\,, \text{ etc.}$$

Dans ces conditions, les formules (13), (15) et (16) deviennent :

$\underline{u_1 = B_1 \sin\,(pt - f_1\,x),}$ (13_2) (onde incidente donnée)

$\underline{u_1' = B_1' \sin\,(pt + f_1\,x),}$ (15_2)

$\underline{u_2 = B_2 \sin\,(pt - f_2\,x),}$ (16_2)

B_1', B_2 ayant les valeurs (I_2), que l'on pourrait d'ailleurs également déduire du système (26).

[12] On arrive aux mêmes conclusions en posant $S_1 = S_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $E_1 = E_2$ dans les formules (26).

[13] Nous supposons cependant que cette longueur d'onde soit grande par rapport aux dimensions de la section, dans tout le domaine considéré de la barre. Voir à ce sujet le dernier alinéa du paragraphe 2.

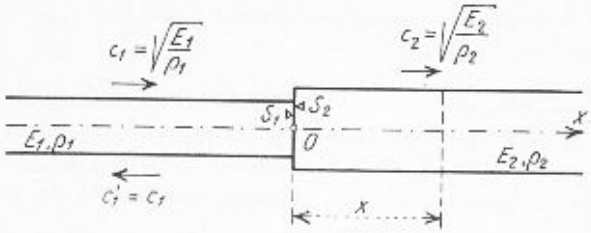

Fig. 4. — Cas particuliers 2 et 2', § 5.

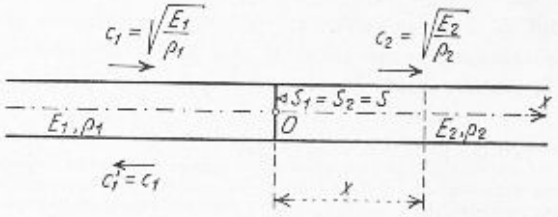

Fig. 5. — Cas particulier 2", § 5.

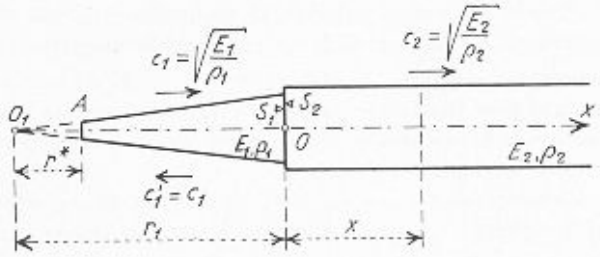

Fig. 6. — Cas particulier 3, § 5.

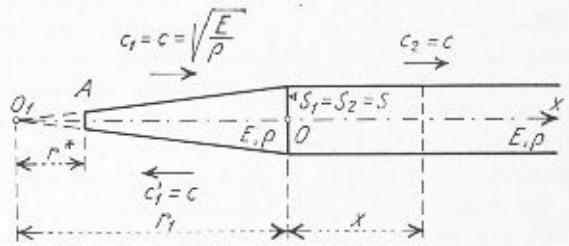

Fig. 7. — Cas particulier 3′, § 5.

Nous retrouvons ainsi un résultat en principe connu[14]: *si les deux parties de la barre sont cylindriques ou prismatiques, les ondes résultantes réfléchie et transmise se réduisent à leurs ondes primaires, et ces deux ondes — comme l'incidente — se propagent sans se déformer.*

Il est essentiel de remarquer que B_1' *et* B_2 *ne dépendent pas de la fréquence* $p/2\pi$, *mais seulement de* S_1, S_2, E_1, E_2, ρ_1, ρ_2, B_1. En conséquence une onde incidente, représentée par une fonction périodique quelconque de l'argument $c_1 t - x$, sera transformée, par la discontinuité en O de la section, en une onde réfléchie et une onde transmise, ayant toutes deux la même forme que l'onde incidente, à des transformations par affinité près[15]. Une impulsion incidente sera également transformée en deux impulsions (réfléchie et transmise) de même forme[16].

2′. Si l'on a non seulement $r_1 = \infty$, $r_2 = \infty$, mais encore $E_1 = E_2 = E$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, les formules (I_2) se réduisent aux suivantes :

$$B_1' = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} B_1, \quad \overline{B}_1' = \overline{B}_2 = 0, \quad B_2 = \frac{2 S_1}{S_1 + S_2} B_1, \tag{$\mathrm{I}_{2'}$}$$

les expressions de u_1, u_1', u_2 restant les mêmes que ci-dessus, en remarquant cependant que, d'après (14) et (17), on a ici $f_1 = f_2 = f = p\,\rho^{1/2} E^{-1/2}$.

Les formules $(\mathrm{I}_{2'})$ *font ressortir l'influence d'une discontinuité, en un point O, de l'aire de la section d'une barre cylindrique ou prismatique — à l'exclusion de toute autre discontinuité en ce point — sur la propagation d'une onde incidente sinusoïdale.*

2″. Si l'on a par contre $r_1 = \infty$, $r_2 = \infty$, et en outre $S_1 = S_2$, les formules (I_2) deviennent (fig. 5) :

$$\left.\begin{aligned} B_1' &= \frac{\sqrt{E_1 \rho_1} - \sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}} B_1, \quad \overline{B}_1' = \overline{B}_2 = 0, \\ B_2 &= \frac{2 \sqrt{E_1 \rho_1}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}} B_1, \end{aligned}\right\} \tag{$\mathrm{I}_{2''}$}$$

les expressions (13_2), (15_2) et (16_2) conservant leur validité. *Les formules* $(\mathrm{I}_{2''})$ *montrent l'influence d'une discontinuité, en un point O, des propriétés mécaniques de la matière d'une barre cylindrique — à l'exclusion de toute autre discontinuité en ce point — sur la propagation d'une onde sinusoïdale.*

On remarquera l'analogie parfaite entre les formules $(\mathrm{I}_{2'})$ d'une part, $(\mathrm{I}_{2''})$ d'autre part, les quantités $\sqrt{E_1 \rho_1}$, $\sqrt{E_2 \rho_2}$ jouant, dans les secondes, le rôle que jouent les quantités S_1, S_2 dans les premières.

3. Admettons maintenant que *la première partie de la barre soit comme précédemment un tronc de cône, la seconde étant par contre un prisme ou un cylindre*, c'est-à-dire que r_1 *soit fini*, mais $r_2 = \infty$ (fig. 6). Si l'on fait tendre r_2 vers l'infini dans les formules (I), on voit que A_1', $\overline{A}_1'$, A_2/r_2, A_2/r_2 tendent respectivement vers les limites :

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= \frac{\left(S_1^2 E_1 \rho_1 - S_2^2 E_2 \rho_2\right) p^2 - S_1^2 r_1^{-2} E_1^2}{\left(S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\right)^2 p^2 + S_1^2 r_1^{-2} E_1^2} A_1, \\ \overline{A}_1' &= \frac{-2 S_2^2 r_1^{-1} E_1^{3/2} \sqrt{\rho_1}\, p}{\left(S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\right)^2 p^2 + S_1^2 r_1^{-2} E_1^2} A_1, \\ B_2 &= \frac{2 S_1 r_1^{-1} \sqrt{E_1 \rho_1} \left(S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\right) p^2}{\left(S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\right)^2 p^2 + S_1^2 r_1^{-2} E_1^2} A_1, \\ \overline{B}_2 &= \frac{-2 S_1^2 r_1^{-2} E_1^{3/2} \sqrt{\rho_1}\, p}{\left(S_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + S_2 \sqrt{E_2 \rho_2}\right)^2 p^2 + S_1^2 r_1^{-2} E_1^2} A_1. \end{aligned}\right\} \tag{I_3}$$

Les formules (13), (15) et (16) s'écrivent ici :

$$u_1 = \frac{A_1}{r_1 + x} \sin(pt - f_1 x), \tag{13_3}$$ (onde incidente donnée)

$$u_1' = \frac{A_1'}{r_1 + x} \sin(pt + f_1 x) + \frac{\overline{A}_1'}{r_1 + x} \cos(pt + f_1 x), \tag{15_3}$$

$$u_2 = B_2 \sin(pt - f_2 x) + \overline{B}_2 \cos(pt - f_2 x). \tag{16_3}$$

Toutes les constantes A_1', ... $\overline{B}_2$ dépendent non seulement de r_1, S_1, S_2, E_1, E_2, ρ_1, ρ_2, A_1, mais encore de la fréquence $p/2\pi$. Comme l'onde incidente u_1, l'onde réfléchie résultante u_1' se déforme en se propageant, ce qui n'est pas le cas de l'onde transmise résultante u_2.

3′. Supposons que non seulement r_1 *soit fini*, $r_2 = \infty$, mais en outre que

$$S_1 = S_2 = S, \qquad E_1 = E_2 = E, \qquad \rho_1 = \rho_2 = \rho.$$

Il s'agit donc ici d'un tronc de cône, prolongé, sans solution de continuité de l'aire de la section droite[17], par un cylindre fait avec la même matière (fig. 7). Les

[14] Voir [1], p. 251, et [7], p. 136 et 137.

[15] Ceci suppose que les principaux termes de la série trigonométrique représentant l'onde incidente au temps t, correspondent à des ondes partielles dont les longueurs d'onde sont beaucoup plus grandes que les dimensions de la section, sans quoi la théorie élémentaire utilisée ici ne serait pas applicable.

[16] Voir [7], p. 136, 1er alinéa.

[17] La *forme* de cette section peut cependant être discontinue au point O.

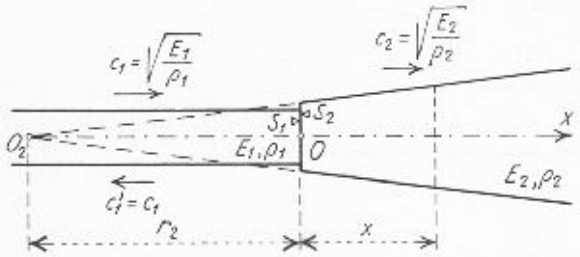

Fig. 8. — Cas particulier 4, § 5.

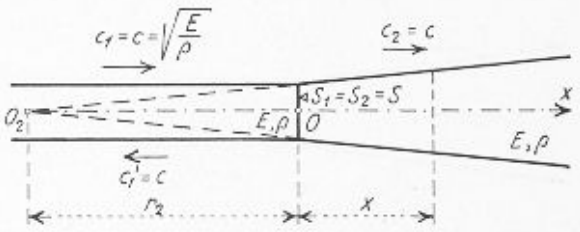

Fig. 9. — Cas particulier 4', § 5.

équations (13_3), (15_3), (16_3) restent applicables, avec cette simplification qu'ici $f_1 = f_2 = f = p\,\rho^{1/2}\,E^{-1/2}$, tandis que les valeurs des constantes deviennent :

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= \frac{-E}{4 r_1^2 \rho p^2 + E} A_1, & \overline{A}_1' &= \frac{-2 r_1 \sqrt{E\rho}\, p}{4 r_1^2 \rho p^2 + E} A_1, \\ B_2 &= \frac{4 r_1 \rho p^2}{4 r_1^2 \rho p^2 + E} A_1, & \overline{B}_2 &= \frac{-2 \sqrt{E\rho}\, p}{4 r_1^2 \rho p^2 + E} A_1. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_{3'})$$

Les constantes A_1', ... $\overline{B}_2$ ne dépendent pas de S, mais seulement de r_1, E, ρ, p, A_1.

4. Supposons au contraire que *la première partie de la barre soit un cylindre ou un prisme, la seconde étant un tronc de cône*, c'est-à-dire que r_2 *soit fini*, mais $r_1 = \infty$ (fig. 8). En faisant tendre, dans les formules (I), A_1 vers l'infini en même temps que r_1, mais de façon que le quotient A_1/r_1 tende vers une limite B_1 choisie arbitrairement, les quantités $\frac{A_1'}{r_1}$, $\frac{\overline{A}_1'}{r_1}$, A_2, $\overline{A}_2$ tendront respectivement vers les limites :

$$\left.\begin{aligned} B_1' &= \frac{(S_1^2 E_1 \rho_1 - S_2^2 E_2 \rho_2)\, p^2 - S_2^2 r_2^{-2} E_2^2}{(S_1\sqrt{E_1\rho_1} + S_2\sqrt{E_2\rho_2})^2 p^2 + S_2^2 r_2^{-2} E_2^2} B_1, \\ \overline{B}_1' &= \frac{2 S_1 S_2 r_2^{-1} \sqrt{E_1\rho_1}\, E_2\, p}{(S_1\sqrt{E_1\rho_1} + S_2\sqrt{E_2\rho_2})^2 p^2 + S_2^2 r_2^{-2} E_2^2} B_1, \\ A_2 &= \frac{2 S_1 r_2 \sqrt{E_1\rho_1}\,(S_1\sqrt{E_1\rho_1} + S_2\sqrt{E_2\rho_2})\, p^2}{(S_1\sqrt{E_1\rho_1} + \rho_2\sqrt{E_2\rho_2})^2 p^2 + S_2^2 r_2^{-2} E_2^2} B_1, \\ \overline{A}_2 &= \frac{2 S_1 S_2 \sqrt{E_1\rho_1}\, E_2\, p}{(S_2\sqrt{E_1\rho_1} + S_2\sqrt{E_2\rho_2})^2 p^2 + S_2^2 r_2^{-2} E_2^2} B_1, \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_4)$$

tandis que les formules (13), (15), (16) deviendront :

$$\underline{u_1 = B_1 \sin(pt - f_1 x),} \quad (13_4)$$

(onde incidente donnée) ;

$$\underline{u_1' = B_1' \sin(pt + f_1 x) + \overline{B}_1' \cos(pt + f_1 x),} \quad (15_4)$$

$$\underline{u_2 = \frac{A_2}{r_2 + x} \sin(pt - f_2 x) + \frac{\overline{A}_2}{r_2 + x} \cos(pt - f_2 x).} \quad (16_4)$$

Les constantes B_1', ... $\overline{A}_2$ dépendent non seulement de r_2, S_1, S_2, E_1, E_2, ρ_1, ρ_2, B_1, mais aussi de la fréquence $p/2\pi$. Comme l'onde incidente, l'onde réfléchie résultante ne se déforme pas en se propageant, tandis que l'onde transmise résultante se déforme.

4'. Admettons que non seulement r_2 *soit fini*, $r_1 = \infty$, mais en outre que

$$\underline{S_1 = S_2 = S,} \qquad \underline{E_1 = E_2 = E,} \qquad \underline{\rho_1 = \rho_2 = \rho.}$$

Nous avons affaire à un cylindre ou à un prisme, prolongé, sans solution de continuité de l'aire de la section droite [17], par un tronc de cône fait avec la même matière (fig. 9). Les équations (13_4), (15_4), (16_4) sont toujours valables, avec cette simplification que $f_1 = f_2 = f = p\rho^{1/2} E^{-1/2}$, mais les valeurs ($\mathrm{I}_4$) des constantes deviennent :

$$\left.\begin{aligned} B_1' &= \frac{-E}{4 r_2^2 \rho p^2 + E} B_1, & \overline{B}_1' &= \frac{2 r_2 \sqrt{E\rho}\, p}{4 r_2^2 \rho p^2 + E} B_1, \\ A_2 &= \frac{4 r_2^3 \rho p^2}{4 r_2^2 \rho p^2 + E} B_1, & \overline{A}_2 &= \frac{2 r_2^2 \sqrt{E\rho}\, p}{4 r_2^2 \rho p^2 + E} B_1. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_{4'})$$

Ces valeurs ne dépendent pas de S, mais seulement de r_2, E, ρ, p, B_1.

5. Nous allons maintenant appliquer successivement les formules établies à deux cas, où l'*un des deux sommets O_1, O_2 est situé à droite de l'origine O*. Considérons d'abord celui de la figure 10, où l'on suppose que O_1 soit le sommet en question, et où l'on admet en outre que

$$\underline{r_2 = \infty,} \quad \underline{S_1 = S_2 = S,} \quad \underline{E_1 = E_2 = E,} \quad \underline{\rho_1 = \rho_2 = \rho.}$$

Les formules (13_3), (15_3), (16_3) et ($\mathrm{I}_{3'}$), qui concernent le cas de la figure 7, ne sont pas ici directement applicables. Les expressions de u_1, u_1', u_2 doivent être en effet remplacées par les suivantes, si l'on remarque que dans la première partie de la barre, l'abscisse x d'une section quelconque est négative ou nulle :

$$u_1 = \frac{A_1}{r_1 - x} \sin(pt - f_1 x) = \frac{-A_1}{-r_1 + x} \sin(pt - f_1 x),$$

$$u_1' = \frac{-A_1'}{-r_1 + x} \sin(pt + f_1 x) + \frac{-\overline{A}_1'}{-r_1 + x} \cos(pt + f_1 x),$$

$$u_2 = B_2 \sin(pt - f_2 x) + \overline{B}_2 \cos(pt - f_2 x),$$

avec $f_1 = f_2 = f = p\,\rho^{1/2} E^{-1/2}$.

On voit qu'on obtient ces expressions en remplaçant, dans (13_3), (15_3), (16_3), les quantités r_1, A_1, A_1', $\overline{A}_1'$ respectivement par $-r_1$, $-A_1$, $-A_1'$, $-\overline{A}_1'$. Faisons la même opération dans les formules ($\mathrm{I}_{3'}$). Elles deviennent :

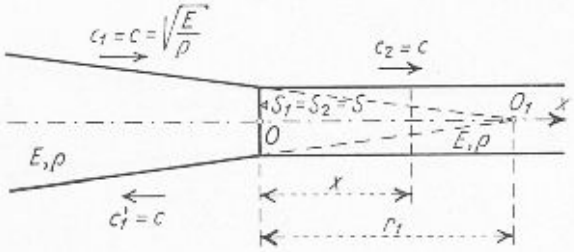

Fig. 10. — Cas particulier 5, § 5.

$$-A_1' = \frac{-E}{4\,r_1^2\,\rho\,p^2 + E}\,(-A_1),$$

$$-\overline{A}_1' = \frac{2\,r_1\sqrt{E\,\rho}\,p}{4\,r_1^2\,\rho\,p^2 + E}\,(-A_1),$$

$$B_2 = \frac{-4\,r_1\,\rho\,p^2}{4\,r_1^2\,\rho\,p^2 + E}\,(-A_1),$$

$$\overline{B}_2 = \frac{-2\sqrt{E\,\rho}\,p}{4\,r_1^2\,\rho\,p^2 + E}\,(-A_1).$$

En définitive, nous obtenons pour le cas de la figure 10 les formules (où $f = p\,\rho^{1/2}E^{-1/2}$) :

$$u_1 = \frac{A_1}{r_1 - x}\sin(pt - fx), \quad (13_5)$$

(onde incidente donnée) ;

$$u_1' = \frac{A_1'}{r_1 - x}\sin(pt + fx) + \frac{\overline{A}_1'}{r_1 - x}\cos(pt + fx), \quad (15_5)$$

$$u_2 = B_2\sin(pt - fx) + \overline{B}_2\cos(pt - fx), \quad (16_5)$$

dans lesquelles :

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= \frac{-E}{4\,r_1^2\,\rho\,p^2 + E}\,A_1, & \overline{A}_1' &= \frac{2\,r_1\sqrt{E\,\rho}\,p}{4\,r_1^2\,\rho\,p^2 + E}\,A_1, \\ B_2 &= \frac{4\,r_1\,\rho\,p^2}{4\,r_1^2\,\rho\,p^2 + E}\,A_1, & \overline{B}_2 &= \frac{2\sqrt{E\rho}\,p}{4\,r_1^2\,\rho\,p^2 + E}\,A_1. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_5)$$

Comparons les formules ($\mathrm{I}_{5'}$) (relatives au cas où la première partie de la barre est un *tronc de cône divergent* dans le sens des x croissants, fig. 7) aux nouvelles formules (I_5) (cas où la première partie est un *tronc de cône convergent*, fig. 10). On constate que les ondes primaires réfléchie et transmise ont respectivement les mêmes signes dans les deux cas, tandis que les ondes secondaires réfléchie et transmise sont de signes contraires.

5'. Considérons ensuite le cas de la figure 11, où l'on suppose que O_2 *soit le sommet situé à droite de l'origine* O, et où l'on admet en outre que

$$r_1 = \infty, \quad S_1 = S_2 = S, \quad E_1 = E_2 = E, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho.$$

Un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire nous conduit aux formules suivantes (où $f = p\,\rho^{1/2}E^{-1/2}$), déduites de ($13_4$), ($15_4$), ($16_4$), ($\mathrm{I}_{4'}$) (fig. 9) :

$$u_1 = B_1\sin(pt - fx), \quad (13_{5'})$$

(onde incidente donnée)

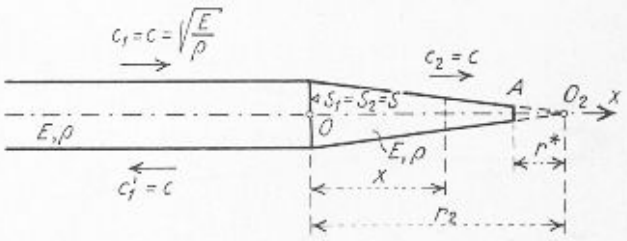

Fig. 11. — Cas particulier 5', § 5.

$$u_1' = B_1'\sin(pt + fx) + \overline{B}_1'\cos(pt + fx), \quad (15_{5'})$$

$$u_2 = \frac{A_2}{r_2 - x}\sin(pt - fx) + \frac{\overline{A}_2}{r_2 - x}\cos(pt - fx); \quad (16_{5'})$$

$$\left.\begin{aligned} B_1' &= \frac{-E}{4\,r_2^2\,\rho\,p^2 + E}\,B_1, & \overline{B}_1' &= \frac{-2\,r_2\sqrt{E\,\rho}\,p}{4\,r_2^2\,\rho\,p^2 + E}\,B_1, \\ A_2 &= \frac{4\,r_2^3\,\rho\,p^2}{4\,r_2^2\,\rho\,p^2 + E}\,B_1, & \overline{A}_2 &= \frac{-2\,r_2^2\sqrt{E\,\rho}\,p}{4\,r_2^2\,\rho\,p^2 + E}\,B_1. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_{5'})$$

En comparant les formules ($\mathrm{I}_{4'}$) au système ($\mathrm{I}_{5'}$), on reconnaît de nouveau que les ondes primaires réfléchie et transmise ont respectivement les mêmes signes dans le cas où la seconde partie de la barre est un *tronc de cône divergent* (fig. 9), que dans celui où cette partie est un *tronc de cône convergent* (fig. 11), tandis que les ondes secondaires réfléchie et transmise sont de signes contraires.

6. Admettons encore que *les sommets* O_1, O_2 *des troncs de cône coïncident, et que les deux parties de la barre soient faites de la même matière* (fig. 12). En posant

$$r_1 = r_2 = r, \quad E_1 = E_2 = E, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho$$

dans les formules (13), (15), (16) et (I), celles-ci deviennent :

$$u_1 = \frac{A_1}{r + x}\sin(pt - f_1 x), \quad (13_6)$$

(onde incidente donnée)

$$u_1' = \frac{A_1'}{r + x}\sin(pt + f_1 x) + \frac{\overline{A}_1'}{r + x}\cos(pt + f_1 x), \quad (15_6)$$

$$u_2 = \frac{A_2}{r + x}\sin(pt - f_2 x) + \frac{\overline{A}_2}{r + x}\cos(pt - f_2 x), \quad (16_6)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= \frac{(S_1^2 - S_2^2)\,\rho\,p^2 - r^{-2}(S_2 - S_1)^2 E}{(S_1 + S_2)^2\,\rho\,p^2 + r^{-2}(S_2 - S_1)^2 E}\,A_1, \\ A_2 &= \frac{2\,S_1(S_1 + S_2)\,\rho\,p^2}{(S_1 + S_2)^2\,\rho\,p^2 + r^{-2}(S_2 - S_1)^2 E}\,A_1, \\ \overline{A}_1' &= \overline{A}_2 = \frac{2\,r^{-1}\,S_1(S_2 - S_1)\sqrt{E\,\rho}\,p}{(S_1 + S_2)^2\rho\,p^2 + r^{-2}(S_2 - S_1)^2 E}\,A_1, \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_6)$$

où $f_1 = f_2 = f = p\,\rho^{1/2}E^{-1/2}$.

6'. Supposons toujours que *les sommets des deux troncs de cône coïncident, mais que l'aire de la section droite n'ait pas de discontinuité au point* O (fig. 13). On a, dans ce cas :

$$r_1 = r_2 = r, \quad S_1 = S_2 = S,$$

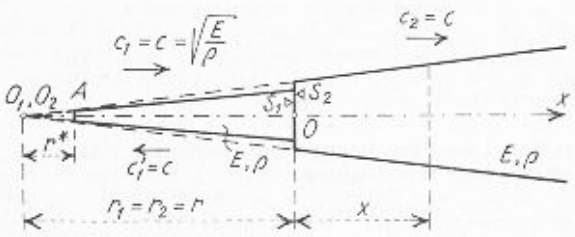

Fig. 12. — Cas particulier 6, § 5.

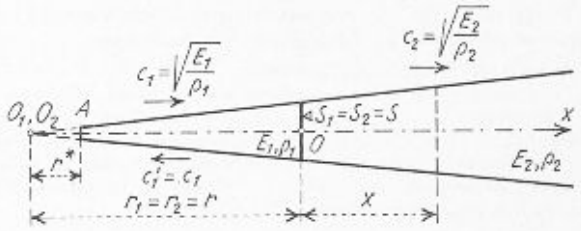

Fig. 13. — Cas particulier 6', § 5.

et les valeurs (I) des constantes $A_1', \ldots \bar{A}_2$ deviennent :

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= \frac{(E_1\rho_1 - E_2\rho_2)\,p^2 - r^{-2}(E_2 - E_1)^2}{(\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2})^2 p^2 + r^{-2}(E_2 - E_1)^2} A_1, \\ A_2 &= \frac{2\sqrt{E_1\rho_1}\,(\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2})\,p^2}{(\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2})^2 p^2 + r^{-2}(E_2 - E_1)^2} A_1, \\ \bar{A}_1' = \bar{A}_2 &= \frac{2\,r^{-1}\sqrt{E_1\rho_1}\,(E_2 - E_1)\,p}{(\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2})^2 p^2 + r^{-2}(E_2 - E_1)^2} A_1, \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_{6'})$$

tandis que les formules (13_6), (15_6), (16_6) sont encore applicables, mais avec $f_1 = p\,\rho_1^{1/2}\,E_1^{-1/2}$, $f_2 = p\,\rho_2^{1/2}\,E_2^{-1/2}$.

On voit que, *dans les cas 6. et 6'., les amplitudes des ondes secondaires réfléchie et transmise sont égales, au facteur $(r + x)^{-1}$ près.* Le lecteur remarquera aussi l'analogie entre les formules (I_6) et $(\mathrm{I}_{6'})$. Cette analogie n'est toutefois parfaite que si r est infiniment grand (cas où les deux parties de la barre sont cylindriques, voir le dernier alinéa du point 2.).

Les formules $(\mathrm{I}_{6'})$ permettent d'apprécier *l'influence d'une discontinuité des propriétés mécaniques de la matière — à l'exclusion de toute autre discontinuité — sur la propagation d'une onde sinusoïdale dans une barre conique.*

7. Supposons que O_1, O_2 soient à gauche de l'origine O (fig. 2) et examinons pour terminer *deux cas très particuliers*, mais intéressants. Nous définissons *le premier* en admettant que

$$\underline{S_2\,r_2^{-1}\,E_2 - S_1\,r_1^{-1}\,E_1 = 0,} \qquad \underline{S_1\sqrt{E_1\rho_1} - S_2\sqrt{E_2\rho_2} \neq 0,}$$

r_1 et r_2 étant finis. Les formules (I) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= \frac{S_1\sqrt{E_1\rho_1} - S_2\sqrt{E_2\rho_2}}{S_1\sqrt{E_1\rho_1} + S_2\sqrt{E_2\rho_2}} A_1, \qquad \bar{A}_1' = 0, \\ A_2 &= \frac{2\,S_1\,r_1^{-1}\,r_2\sqrt{E_1\rho_1}}{S_1\sqrt{E_1\rho_1} + S_2\sqrt{E_2\rho_2}} A_1, \qquad \bar{A}_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_7)$$

Ainsi, les ondes réfléchie et transmise se réduisent à leurs ondes primaires, et les amplitudes de ces ondes ne dépendent pas de la fréquence $p/2\pi$.

7'. Pour définir *le second* des deux cas en question, posons :

$$\underline{S_2\,r_2^{-1}\,E_2 - S_1\,r_1^{-1}\,E_1 = 0,} \qquad \underline{S_1\sqrt{E_1\rho_1} - S_2\sqrt{E_2\rho_2} = 0,}$$

r_1, r_2 étant finis. Les valeurs (I) des constantes A_1', $\ldots \bar{A}_2$ sont ici :

$$A_1' = \bar{A}_1' = 0, \qquad A_2 = \frac{r_2}{r_1} A_1, \qquad \bar{A}_2 = 0. \qquad (\mathrm{I}_{7'})$$

Seule l'onde transmise existe. Elle ne comprend que l'onde primaire, et la vibration qu'elle engendre au point O a même amplitude $A_2/r_2 = A_1/r_1$ et même phase que celles de la vibration engendrée en ce point par l'onde incidente. Cette dernière est donc transmise sans aucune modification par la discontinuité, et *sans réflexion.*

Zurich, le 22 août 1962.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. W. Strutt (Lord Rayleigh) : *The Theory of Sound.* Macmillan & Co., London, Vol. I, 1894.

[2] H. Bouasse : *Verges et plaques. Cloches et carillons.* Delagrave, Paris, 1927.

[3] S. Timoshenko : *Theory of Vibrations.* Trad. franç. par A. de Riva-Berni. Béranger, Paris et Liège, 1939.

[4] A. E. H. Love : *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* The University Press, Cambridge, Fourth Edition, 1959.

[5] H. Kolsky : *Stress waves in Solids.* Clarendon Press, Oxford, 1953.

[6] Mugiono : *Messungen der Reflexion von Biegewellen an Querschnittsprüfungen auf Stäben.* Acustica, Vol. 5, 1955, p. 182-186.

[7] E. A. Ripperger and H. Norman Abramson : *Reflection and Transmission of Elastic Pulses in a Bar at a Discontinuity in Cross Section.* Proc. of the Third Midwestern Conf. on Solid Mechanics, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1957, p. 135-145.

BIBLIOGRAPHIE

Dangers des radiations atomiques, par le Dr *R. Devoret.* Gauthier-Villars, Paris (1961). — Un volume de 148 pages, 27 tableaux et 10 figures. Prix : broché, 11 NF.

Ce volume, paru dans la collection « Applications des sciences nucléaires », a pour but de faire connaître les conséquences biologiques de l'exposition aux radiations ionisantes et de fournir la base indispensable pour comprendre les problèmes posés par la radio-protection.

Comme les autres volumes de la collection, cet ouvrage s'adresse aux ingénieurs, techniciens, médecins et étudiants, ainsi qu'à tout honnête homme intéressé par l'utilisation de l'énergie nucléaire.

Le livre est divisé en cinq parties :

— Rappel des éléments de physique concernant les radiations ionisantes et leur interaction avec la matière ; définition des unités.
— Effets des rayonnements sur l'homme ; description des lésions.
— Irradiation naturelle ; facteurs d'augmentation de celle-ci.
— Risques professionnels.
— Réglementation française pour la prévention et la réparation des dommages causés par les radiations.