

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 87 (1961)  
**Heft:** 24

**Artikel:** Le problème de la similitude des calculs hyperstatiques et radiotéléométriques  
**Autor:** Ansermet, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65055>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

## ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes  
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)  
de la Section genevoise de la S.I.A.  
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique  
de l'Université de Lausanne)  
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole  
polytechnique fédérale de Zurich)

## COMITÉ DE PATRONAGE

Président: † J. Calame, ing. à Genève  
Vice-président: E. d'Oskolski, arch. à Lausanne  
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève  
Membres:  
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.  
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Groscurin, arch.; E. Martin, arch.  
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.  
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.  
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;  
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

## CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »  
Président: D. Bonnard, ing.  
Membres: M. Bridel; J. Favre, arch.; R. Neeser, ing.; A. Robert, ing.;  
J. P. Stucky, ing.  
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

## RÉDACTION

Vacat  
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »  
Tirés à part, renseignements  
Avenue de Cour 27, Lausanne

## ABONNEMENTS

1 an . . . . .	Suisse Fr. 28.—	Etranger Fr. 32.—
Sociétaires . . . . .	» » 23.—	» » 28.—
Prix du numéro . . . . .	» » 1.60	

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,  
N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements  
d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29,  
Lausanne

## ANNONCES

Tarif des annonces:  
1/1 page . . . . . Fr. 320.—  
1/2 » . . . . . » 165.—  
1/4 » . . . . . » 85.—  
1/8 » . . . . . » 42.50

Adresse: Annonces Suisses S. A.  
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales



## SOMMAIRE

Le problème de la similitude des calculs hyperstatiques et radiotéléométriques, par A. Ansermet, ingénieur, professeur.  
Actualité industrielle (17).  
Bibliographie. — Les congrès.  
Société suisse des ingénieurs et des architectes.  
Documentation générale. — Informations diverses.

## LE PROBLÈME DE LA SIMILITUDE DES CALCULS HYPERSTATIQUES ET RADIOTÉLÉMÉTRIQUES

par A. ANSERMET, ing.-prof.

Les lignes qui suivent porteront surtout sur des systèmes hyperstatiques articulés et spatiaux. Récemment à l'étranger, en Autriche en premier lieu sauf erreur, quelques auteurs signalèrent l'analogie existant entre certains calculs hyperstatiques et téléométriques. Dans les deux cas il y a un problème de minimum à résoudre ce qui se traduit, en général, par l'application de la méthode des moindres carrés. L'élément fondamental en statique est l'équation qui exprime le travail de déformation (traction ou compression):

$$(1) \quad A = \sum \frac{T^2 l}{2ES} = \sum \left\{ \left( \frac{Tl}{ES} \right)^2 \frac{ES}{2l} \right\} = \text{minimum}$$

somme étendue à toutes les barres. Les  $T$  sont des forces,  $l$  des longueurs de barres,  $S$  des sections transversales et  $E$  un coefficient d'élasticité. L'identification est immédiate avec la forme classique:

$$(2) \quad \sum (\nu^2 p) = [p\nu\nu] = \text{minimum}$$

où les  $\nu$  sont des allongements ou raccourcissements des barres; le coefficient de  $T$  dans  $\nu$  est aussi appelé module. Quant aux poids  $p$ , ils sont déduits des relations (1) et (2):

$$(3) \quad p = \frac{ES}{2l} \text{ et, en général, } p = \frac{S}{l} \text{ ou, parfois,}$$

$p = \text{constante}$ . En radiotéléométrie,  $p$  a une autre forme. En statique, il faut tenir compte de la dimension de  $E$ .

Les calculs sont parfois un peu longs, mais on aura recours aux calculatrices électroniques. A titre documentaire, la figure 1 montre un fragment de réseau radiotéléométrique donnant lieu à un nombre élevé d'éléments surabondants et d'équations normales.

Une formule fondamentale, mais qui ne peut pas être démontrée rigoureusement, est:  $m^2 \cong [p\nu\nu]:r$  ( $r$  éléments surabondants).

Ce  $m$  que l'on peut appeler, par analogie, « déformation moyenne quadratique relative à l'unité de poids », jouera un rôle pour le calcul des ellipses et ellipsoïdes de déformation.

De plus, le calcul est susceptible d'être fractionné, solution qui sera la bienvenue en statique comme en géodésie. On aura donc:

$$(4) \quad \nu = \nu' + \nu'' : [p\nu\nu] = [p\nu'\nu'] + [p\nu''\nu'']$$

le terme en  $\nu'\nu''$  étant nul.

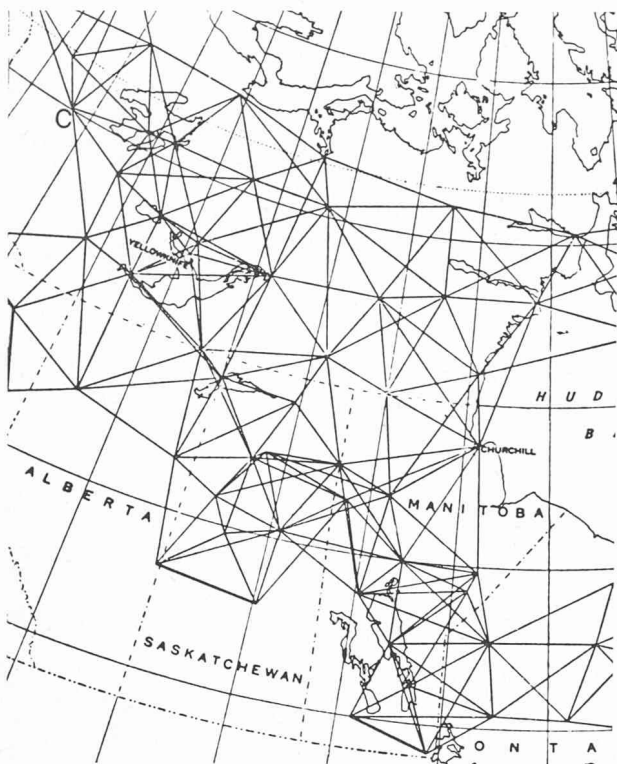


Fig. 1. — Réseau radiotéléométrique Hiran.

Les cas concrets qui seront traités ci-après sont, en principe, ceux développés par B. Mayor dans sa publication de 1926 mais en rendant les systèmes hyperstatiques par l'adjonction d'éléments surabondants ; cela change le caractère du problème posé.

La méthode qui sera appliquée est celle dite aux variations des coordonnées, qui a fait ses preuves en géodésie. Dans un réseau télémétrique hyperdéterminé, les coordonnées des sommets ne sont pas connues sans ambiguïté ; on a recours à des valeurs provisoires ou transitoires à partir desquelles on fait varier les coordonnées pour réaliser la condition  $[p\varphi\varphi] = \text{minimum}$ .

Au côté mesuré  $l_{gh}$  correspondent une valeur provisoire  $l_{gh} + f_{gh}$  et une valeur compensée  $l_{gh} + v_{gh}$  telle que :

$$(5) \quad l_{gh} + v_{gh} = l_{gh} + f_{gh} + a_{gh}(dx_g - dx_h) + b_{gh}(dy_g - dy_h) + c_{gh}(dz_g - dz_h)$$

les  $dx, dy, dz$  étant les variations de coordonnées telles que

$$a_{gh}^2 + b_{gh}^2 + c_{gh}^2 = 1$$

tandis que  $(x_g y_g z_g)$  et  $(x_h y_h z_h)$  sont des valeurs provisoires.

En statique, ce sont les coordonnées de deux nœuds reliés par une barre ; si en géodésie on doit connaître avec précision ces valeurs, ce n'est pas le cas en statique, où elles servent seulement à déterminer les coefficients  $a, b, c$  exprimant la structure du système articulé spatial. Les exemples ci-après le montreront.

Le praticien a une certaine liberté pour déterminer ces termes absolus  $f$ , tels que :  $[pff] \cong [p\varphi\varphi]$ .

Exceptionnellement, on peut avoir :  $[pff] \cong [p\varphi\varphi]$ .

Les géodésiens recherchent une valeur  $[pff]$  assez voisine de  $[p\varphi\varphi]$ .

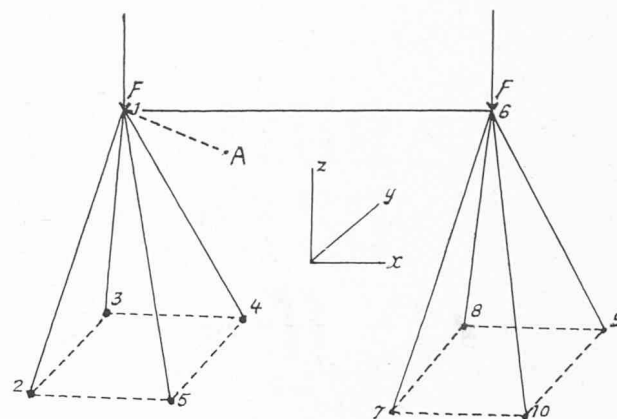


Fig. 2. — Système triplement indéterminé.

En résumé on a, sous forme générale :

$$(6) \quad \varphi = f + F$$

où  $F$  est une fonction linéaire des  $dx, dy, dz$ .

Par cette méthode, on peut calculer des ellipses et ellipsoïdes de déformation ; il n'est même pas nécessaire de connaître les  $f$  pour déterminer la forme et l'orientation de ces courbes et surfaces.

En statique, la solution provisoire de la géodésie a comme analogue un état à partir duquel on fait varier les coordonnées des nœuds pour réaliser la condition du minimum. Ces variations  $dx, dy, dz$  peuvent même être éliminées, comme on le verra. Cet état est obtenu en opérant des coupures fictives et le calcul des déformations pour cette première phase est un problème connu ; analytiquement, on a pour ces déformations une expression de la forme :

$$\varphi_0 + \varphi(X_1, X_2, X_3 \dots) \quad (\text{voir (16) ci-après})$$

(principe de la superposition)

où  $\varphi$  est une fonction linéaire des inconnues hyperstatiques  $X_1, X_2, X_3, \dots$ . Il n'est pas possible de dire a priori quel mode de calcul est préférable ; chaque cas est à examiner séparément.

#### Pylône articulé à quatre barres et une liaison

Dans la figure 2, c'est le pylône ayant comme sommet le nœud (1) ; c'est le seul qui soit libre. La liaison prend la forme suivante : la distance 1-A est connue exactement ; pour le moment il en est fait abstraction. Télémétriquement, les quatre distances servant à déterminer le sommet ne sont pas compatibles ; il y a ambiguïté. On aura donc recours à un point auxiliaire 1<sub>0</sub>, déterminé même graphiquement ; il constitue la solution provisoire :

$$1_0 - 2 = l_1 + f_1 ; 1_0 - 3 = l_2 + f_2 ; 1_0 - 4 = l_3 + f_3 ; 1_0 - 5 = l_4 + f_4.$$

Ce point 1<sub>0</sub> est l'origine des variations de coordonnées  $dx, dy, dz$  devant rendre minimum l'expression  $[p\varphi\varphi]$ , d'où le système :

$$(7) \quad -f_i + v_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz$$

$$(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1)$$

$$i = 1, 2, 3, 4 ; \text{ les poids sont } p_i.$$

Cette équation (7) se déduit de (5) ; pour les équations normales, on a :

$$(8) \quad [pav] = 0; [pbv] = 0; [pcv] = 0 \\ (\text{forme implicite})$$

Avec les termes absolus  $[paf]$ ,  $[pbf]$ ,  $[pcf]$  et  $[pff] \geq [p\varphi\varphi]$ , de plus, on a la matrice des coefficients et sa réciproque :

$$(8') \quad \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pba] & [pbb] & [pbc] \\ [pca] & [pcb] & [pcc] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{voir [4], [6]})$$

Ces  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ , ...,  $Q_{33}$  sont les coefficients de poids des inconnues.

Ces deux matrices peuvent être diagonales, d'où, dans ce cas :

$$[paa]Q_{11} = [pbb]Q_{22} = [pcc]Q_{33} = 1.$$

Dans le système hyperstatique, il n'y a qu'une coupe à faire et, à cause de la symétrie, le choix de la barre est indifférent ; il en résulte l'état dit principal ou de référence, considéré comme état initial pour la variation des coordonnées.

*Exemple numérique : il a un caractère didactique.*

Barre	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$p_i$
1-2	+ 0,577	+ 0,577	+ 0,577	1
1-3	+ 0,577	- 0,577	+ 0,577	1
1-5	- 0,577	+ 0,577	+ 0,577	1
1-4	- 0,577	- 0,577	+ 0,577	1

$$[pab] = [pac] = [pbc] = 0 = Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} \\ [paa] = [pbb] = [pcc] = 4/3 \\ Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 3/4$$

Ces valeurs, on le verra, caractérisent une sphère de déformation.

Au centre, on a  $[p\varphi\varphi] = \text{minimum}$ .

Les équations (8) deviennent :

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \varphi_3 + \varphi_4; \quad \varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4; \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= 0 \quad \text{d'où} \\ + \varphi_1 &= -\varphi_2 = -\varphi_3 = +\varphi_4. \end{aligned}$$

On peut aussi éliminer les trois inconnues  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  :

$$\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 = f_1 - f_2 - f_3 + f_4 = w \\ \text{et } [p\varphi\varphi] = \text{minimum}$$

$$(9) \quad + \varphi_1 = -\varphi_2 = -\varphi_3 = +\varphi_4 = \frac{w}{4}; \quad m^2 = \frac{w^2}{4}.$$

La différence ( $[pff] - [p\varphi\varphi]$ ) est un élément important du problème.

### Ellipsoïde de déformation

C'est l'analogue de l'ellipsoïde d'erreur. A cet effet, considérons un système de coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  parallèle au système  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; la nouvelle origine coïncide avec le point compensé ( $[p\varphi\varphi] = \text{minimum}$ ).

A cause du parallélisme des axes, les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  subsistent et aux valeurs  $\varphi_i$  il faut en substituer d'autres telles que :

$$(10) \quad \varphi'_i = a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + \varphi_i \quad ([p\varphi\varphi'] = [p\varphi\varphi]).$$

En tenant compte des équations normales (8), on a :

$$(11) \quad [p\varphi'\varphi'] = [p\varphi\varphi] + [paa]\xi^2 + 2[pab]\xi\eta + \dots + [pcc]\zeta^2 \\ \text{ou } [p\varphi'\varphi'] = [p\varphi\varphi] + (QT)$$

où  $(QT)$  est une forme quadratique ternaire en  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ; si les coefficients quadratiques  $[paa]$ ,  $[pbb]$ ,  $[pcc]$  sont seuls différents de zéro, on a :

$$(12) \quad [paa]\xi^2 + [pbb]\eta^2 + [pcc]\zeta^2 = \frac{\xi^2}{Q_{11}} + \frac{\eta^2}{Q_{22}} + \frac{\zeta^2}{Q_{33}} = m^2.$$

C'est l'ellipsoïde dit moyen qui intéresse les géodésiens mais on peut avoir d'autres termes absolus ; statiquement, ce sont des surfaces caractérisées par un *travail de déformation constant* :  $[p\varphi'\varphi'] = \text{constante}$ . Elles sont concentriques et se réduisent à un point pour  $[p\varphi'\varphi'] = [p\varphi\varphi]$ . C'est la manière la plus simple d'aborder cette face du problème, mais il y en a d'autres ([4], [6]) ; dans le plan, on a des ellipses.

Le raisonnement ci-dessus subsiste dans le cas où

$$(13) \quad [pff] = \text{constante}.$$

*Solution générale.* Si dans les matrices (8') les éléments non diagonaux ne sont pas nuls, le calcul est moins simple, car il faut résoudre une équation cubique dite aux axes principaux ; en géodésie, on a recours en général à l'équation dite en  $K$  :

$$(14) \quad \begin{vmatrix} (Q_{11} - K) & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & (Q_{22} - K) & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & (Q_{33} - K) \end{vmatrix} = 0 \\ \text{racines } K_1, K_2, K_3 \quad (\text{voir [4], [6]})$$

$$(15) \quad K^3 - (Q_{11} + Q_{22} + Q_{33})K^2 + \left\{ \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{32} & Q_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Q_{33} & Q_{31} \\ Q_{13} & Q_{11} \end{vmatrix} \right\} K - \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  sont proportionnelles aux carrés des axes principaux. Au lieu des coefficients  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ , ...,  $Q_{33}$  on aurait pu calculer avec les coefficients  $[paa]$ ,  $[pab]$ , ...,  $[pcc]$ , d'où l'équation dite en  $S$  avec les racines  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  telles que :

$$K_1 : K_2 : K_3 = \frac{1}{S_1} : \frac{1}{S_2} : \frac{1}{S_3}.$$

Plus loin, nous verrons encore d'autres développements de ce problème.

### Liaisons ; fractionnement des calculs

La figure (2) montre qu'il y a une liaison : la distance du point  $A$  au sommet 1 est exactement connue. Une solution consisterait à exprimer cette condition sous forme linéaire en fonction des  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  du nœud 1. Une de ces inconnues serait alors éliminée. Certains praticiens préfèrent fractionner le calcul pour mieux se rendre compte du rôle joué par la liaison ou pour une autre raison. Il est fait abstraction de la liaison au cours d'une première phase ; en seconde phase on ajoute, aux variations  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , de nouvelles variations  $(dx)$ ,  $(dy)$ ,  $(dz)$  liées par la condition :

$$A_1(dx) + A_2(dy) + A_3(dz) + A_0 = 0$$

la condition :  $[p\varphi\varphi] = \text{minimum}$  subsistant, mais ici il y a aussi fractionnement, comme on l'a déjà mentionné :

$$[p\varphi\varphi] = [p\varphi'\varphi'] + [p\varphi''\varphi''].$$

Il n'est pas possible d'entrer dans plus de détails (voir [5]).

#### Cas où trois éléments sont surabondants

On pourrait dire qu'il s'agit d'un double pylône ; le système principal ou de référence fut traité aussi par B. Mayor (p. 41). Cet éminent professeur ayant trouvé cet exemple dans l'ouvrage de A. Föppl : « Vorlesungen über technische Mechanik », T. II, appliqua sa méthode de représentation plane, qui se révéla plus simple. Il y avait six barres et deux nœuds articulés libres (1) et (6) jouant le rôle de sommets de pylônes ; maintenant (figure 2) il y a neuf barres, d'où :

$$m^2 \cong [p\varphi\varphi] : 3 \quad ([p\varphi\varphi] = \text{minimum}).$$

Admettons des valeurs numériques susceptibles de faciliter le calcul tout en réalisant une certaine symétrie ; l'équation (7) devient :

$$\begin{aligned} -f_i + v_i &= a_i dx_1 + b_i dy_1 + c_i dz_1 + \\ &+ a'_i dx_6 + b'_i dy_6 + c'_i dz_6 \quad (\text{poids } p_i) \end{aligned}$$

et pour la matrice des équations normales et sa réciproque, en partant du système :  $[pav] = 0$ ,  $[pbv] = 0$ , ...  $[pc'v] = 0$

Tableau A

Le coefficient ou élément non diagonal qui n'est pas nul exprime la corrélation entre  $dx_1$  et  $dx_6$ . Les axes des ellipsoïdes de déformation en (1) et (6) sont parallèles aux axes de coordonnées. Quant aux axes principaux, ils sont dans le rapport :

$$\sqrt{0,610} : \sqrt{0,758} : \sqrt{0,694}.$$

La suite du calcul ne présente pas d'intérêt spécial ; ici encore on pourrait éliminer les six inconnues  $dx_1$ ,  $dy_1$ , ...  $dz_6$  dans les neuf équations.

Les forces extérieures peuvent être quelconques.

#### Calcul en représentation plane

L'intérêt de la représentation plane pour le calcul de systèmes spatiaux statiquement déterminés n'est plus contesté ; la question se pose de savoir jusqu'à quel point on peut appliquer cette méthode en hyperstatique. Que devient, en particulier, la notion d'ellipsoïde de déformation ? une telle surface est le lieu des points pour lesquels le travail de déformation est constant. En d'autres termes, si la condition  $[p\varphi\varphi] = \text{minimum}$  est remplie pour le sommet (1) du pylône articulé de la figure 2, ce nœud, d'après l'équation (11), est en position au centre de la surface définie par la condition  $[p\varphi'\varphi'] = \text{constante}$ . Une autre définition, plus générale, sera développée plus loin ; en représentation plane cette notion d'ellipsoïde de déformation devient caduque ou en tous cas précaire.

Il est clair que ce mode de représentation présente de l'intérêt surtout lorsqu'on calcule par voie graphique ; en hyperstatique, la solution numérique joue un plus grand rôle. Analytiquement on procède à un changement de variables ; dans le plan un nœud du système gauche est matérialisé par une plaque indéformable et mobile. Les barres issues d'un nœud, spatialement, ne sont plus concourantes en plan mais, en général, sont liées à la plaque en des points distincts. Chaque barre donne lieu à une équation exprimant sa déformation ; on substitue alors à trois éléments linéaires de nouvelles variables ou inconnues : une rotation élémentaire de la plaque et les coordonnées planes du centre de rotation. Les équations exprimant les déformations des barres ne sont plus linéaires par rapport à ces inconnues. On ne voit guère là de simplification.

Le but de la représentation plane, en hyperstatique spatiale des systèmes articulés, est surtout de fournir, pour les équations fondamentales ci-après, les valeurs des termes absolus et coefficients :

$$(16) \quad \left. \begin{aligned} T_i &= T_{oi} + \sum X_k T_{ik} \\ \delta_i &= \delta_{oi} + \sum X_k \delta_{ik} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &([3], \text{ p. } 68, 292). \\ &(X_k = \text{inconnue hyperstatique}). \end{aligned}$$

TABLEAU A

Barre	$i =$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$a'_i$	$b'_i$	$c'_i$	
1-2	1	+ 0,557	+ 0,575	+ 0,60	0	0	0	$i \leq 9$ $\frac{-2}{0,557} + \frac{-2}{0,575} + \frac{-2}{0,6} = 1$ Poids $0,6 = p_5$ . Les autres poids sont égaux à 1.
1-3	2	+ 0,557	— 0,575	+ 0,60	0	0	0	
1-5	3	— 0,557	+ 0,575	+ 0,60	0	0	0	
1-4	4	— 0,557	— 0,575	+ 0,60	0	0	0	
1-6	5	+ 1,00	0	0	— 1,00	0	0	
6-7	6	0	0	0	+ 0,557	+ 0,575	+ 0,60	
6-8	7	0	0	0	+ 0,557	— 0,575	+ 0,60	
6-10	8	0	0	0	— 0,557	+ 0,575	+ 0,60	
6-9	9	0	0	0	— 0,557	— 0,575	+ 0,60	

$$\begin{bmatrix} 1,84 & 0 & 0 & -0,60 & 0 & 0 \\ 0 & 1,32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,44 & 0 & 0 & 0 \\ -0,60 & 0 & 0 & 1,84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,610 & 0 & 0 & + 0,20 & 0 & 0 \\ 0 & 0,758 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,694 & 0 & 0 & 0 \\ + 0,20 & 0 & 0 & 0,610 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,758 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,694 \end{bmatrix}$$

Ces formules connues expriment les tensions  $T$  et déformations  $\delta$  pour la barre  $i$ . A chaque état du système spatial correspond un système de valeurs  $X_k$ . Il s'agit de réaliser la condition du minimum ; c'est l'état final cherché. Quant à l'état initial, il n'est pas toujours exempt d'arbitraire ; il faut choisir les coupures judicieusement, ce qui n'est pas toujours facile. Ce n'est pas le but de ces lignes de traiter cette face du problème mais d'étudier la suite, la recherche du minimum. C'est le même problème qui se présente en radiotéléométrie une fois que la solution dite provisoire est connue.

### Coupoles Schwedler

Considérons une coupole d'un type très simple mais avec des barres surabondantes (fig. 3). L'état initial sera celui dit principal, mais pas nécessairement. Les coordonnées des quatre nœuds 5, 6, 7, 8 seules varient, et le système est défini par les valeurs :

Nœuds	$x$	$y$	$z$
1	+ 6	+ 6	0
2	+ 6	- 6	0
3	- 6	- 6	0
4	- 6	+ 6	0

Nœuds	$x$	$y$	$z$
5	+ 3	+ 3	+ 5,66
6	+ 3	- 3	+ 5,66
7	- 3	- 3	+ 5,66
8	- 3	+ 3	+ 5,66

$$-f_i + v_i = a_i dx_5 + b_i dy_5 + c_i dz_5 + \dots + k_i dy_8 + l_i dz_8$$

$$i \leq 16 \quad p_i = S_i : l_i.$$

Voici le tableau des coefficients :

Tableau B

On forme ensuite, comme précédemment, la matrice des équations normales ; 16 des 65 coefficients rectangles sont seuls différents de zéro. La matrice réciproque fournit les valeurs  $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, \dots$  relatives aux inconnues ; considérons en particulier le nœud 5, avec les coefficients quadratiques  $Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}$  pour  $dx_5, dy_5, dz_5$ . Les équations (14) et (15) sont applicables (voir aussi [4], [6]). On a successivement :

$$A^2 = m^2 K_1 ; \quad B^2 = m^2 K_2 ; \quad C^2 = m^2 K_3$$

$$\text{où } m^2 \cong [pvp] : r$$

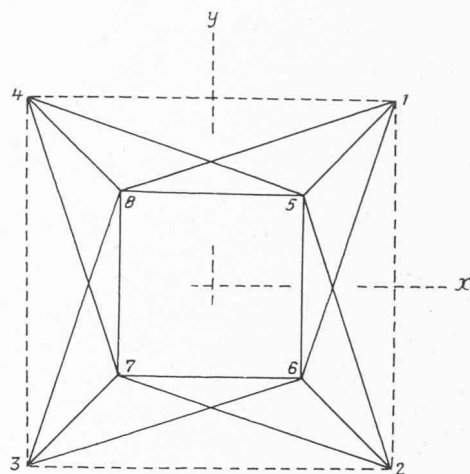


Fig. 3. — Coupoles Schwedler.

avec  $r$  éléments surabondants.  $A, B, C$  sont les demi-axes principaux.

De plus, d'après l'équation (12), on a les valeurs :

$$\pm m\sqrt{Q_{11}} ; \quad \pm m\sqrt{Q_{22}} ; \quad \pm m\sqrt{Q_{33}}$$

définissant trois paires de plans parallèles ; chaque paire est perpendiculaire à un des axes de coordonnées. En faisant varier l'orientation de ces axes, les trois paires de plans enveloppent l'ellipsoïde. C'est là une définition plus générale que la précédente. Les  $Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}$  varient mais pas leur somme :

$$A^2 + B^2 + C^2 = m^2 (Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}) = M^2$$

ce qui exprime la propriété connue de la sphère orthoptique, laquelle est le lieu des sommets des trièdres triangles enveloppant l'ellipsoïde.

Ce  $M^2$  est un élément important en géodésie. Le calcul des probabilités, la théorie dite de l'équivalence (voir [6]) sont aussi à la base de la théorie de l'ellipsoïde d'erreur.

Dans le système des 16 équations ci-dessus, on pourrait éliminer les douze inconnues  $dx_5, dy_5, \dots, dz_8$ , d'où les quatre équations :

$$[Av] + w_1 = 0 ; \quad [Bv] + w_2 = 0 ;$$

$$[Cv] + w_3 = 0 ; \quad [Dv] + w_4 = 0$$

TABLEAU B

Barres	$dx_5$	$dy_5$	$dz_5$	$dx_6$	$dy_6$	$dz_6$	$dx_7$	$dy_7$	$dz_7$	$dx_8$	$dy_8$	$dz_8$
5-6	0,00	+ 1,00		0,00	- 1,00							
6-7				+ 1,00	0,00		- 1,00	0,00				
7-8							0,00	- 1,00		0,00	+ 1,00	
8-5	+ 1,00	0,00								- 1,00	0,00	
5-1	- 0,424	- 0,424	+ 0,80									
6-2				- 0,424	+ 0,424	+ 0,80						
7-3							+ 0,424	+ 0,424	+ 0,80			
8-4										+ 0,424	- 0,424	+ 0,80
6-1				- 0,271	- 0,814	+ 0,512						
5-2	- 0,271	+ 0,814	+ 0,512				- 0,814	+ 0,271	+ 0,512			
7-2												
6-3				+ 0,814	+ 0,271	+ 0,512				+ 0,271	+ 0,814	+ 0,512
8-3												
7-4							+ 0,271	- 0,814	+ 0,512			
5-4	+ 0,814	- 0,271	+ 0,512							- 0,814	- 0,271	+ 0,512
8-1												



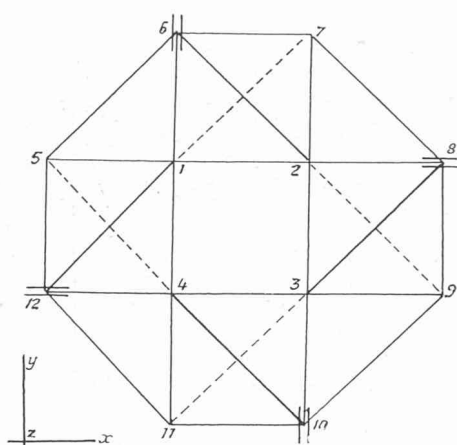


Fig. 4. — Coupole d'après Zimmermann.

l'emploi de calculatrices électroniques étant alors indiqué. Le nombre des équations normales serait réduit à quatre. En géodésie, on peut aussi établir directement ces équations ; le calcul des ellipses et ellipsoïdes d'erreur est moins aisé.

#### Coupole du Reichstag, à Berlin, d'après Zimmermann

Ce problème n'est pas nouveau mais fut traité comme système statiquement déterminé ; des barres sont ajoutées ici, ce qui confère au calcul bien plus d'intérêt. On a encore  $p_i = S_i : l_i$ .

Enumérons sommairement les particularités de cette coupole ; comme dans l'exemple précédent, les forces extérieures ne sont pas indiquées sur la figure. On comptait 24 barres et 12 nœuds, soit 36 coordonnées, mais 12 de celles-ci ne sont pas susceptibles de varier. En fait, on a 12 liaisons simples, en ce sens que les variations  $dz$  sont nulles pour les nœuds de 5 à 12 ; de plus, comme la figure 4 le montre, on a encore  $dx_6 = dx_{10} = 0$  et  $dy_8 = dy_{12} = 0$ . Il y a en tout 24 variables et non 36, tandis que le nombre des barres est porté de 24 à  $(24 + r)$  ; sur la figure sont tracées, mais non en traits pleins, les diagonales (4-5), (1-7), (2-9), (3-11). On a  $m^2 \cong [pvp] : r$  ; en géodésie, on fait des comparaisons entre les valeurs  $m^2$  de divers réseaux, et en statique ce serait intéressant. Voici les coordonnées, toutes positives, en mètres :

Nœuds	x	y	z
1	13,5	22,88	14,9
2	26,7	22,88	14,9
3	26,7	11,12	14,9
4	13,5	11,12	14,9
5	2,0	22,88	0
6	13,5	32,0	0

Nœuds	x	y	z
7	26,7	32,0	0
8	38,2	22,88	0
9	38,2	11,12	0
10	26,7	2,0	0
11	13,5	2,0	0
12	2,0	11,12	0

Le calcul est analogue au précédent ; il n'y a des ellipsoïdes qu'aux nœuds 1, 2, 3, 4. Aux nœuds 5, 7, 9, 11 ce sont des ellipses, et en 6, 8, 10, 12 de petits segments linéaires. On peut calculer les déformations des divers éléments du système ; en géodésie, c'est courant.

#### Conclusions et résumé

La solution basée sur le principe du travail de déformation minimum présente de l'intérêt en hyperstatique spatiale des systèmes articulés quand le nombre des éléments surabondants est élevé. Le mode de calcul préconisé ici ne doit donc pas être opposé à d'autres méthodes ; il faut examiner chaque cas. La statique peut s'inspirer d'expériences faites en géodésie quant à l'application de la méthode des moindres carrés. Il y a ceci de commun entre les réseaux constitués par des sommets et côtés mesurés d'une part, les systèmes de barres et nœuds d'autre part, qu'une solution provisoire intervient ; en statique c'est un état dit principal, de référence (Grundsystem). Les éléments surabondants sont éliminés momentanément dans les réseaux et font l'objet de coupures dans les systèmes. Mathématiquement ce n'est pas l'étape la plus intéressante du calcul ; puis vient la seconde phase du problème avec la condition  $[pvp] = \text{minimum}$ . Les poids sont bien déterminés en hyperstatique :  $p = ES : l$  ; on ne peut pas toujours en dire autant en radiotélé-métrie. La solution par les variations de coordonnées des nœuds a fait ses preuves en géodésie bien avant l'existence de calculatrices électroniques. La notion d'ellipsoïde de déformation est nouvelle ; en statique les praticiens seront vite familiarisés avec le calcul de ces surfaces ; d'autant plus, les exemples traités le montrent, que ces surfaces peuvent être calculées à l'échelle près dès que la structure du système et les poids sont connus. C'est ce que l'on fait couramment en géodésie, où l'ordre de grandeur de l'échelle est estimé, par voie de comparaison, à titre provisoire. Des progrès sont donc réalisables en hyperstatique des systèmes articulés.

#### LITTÉRATURE

- [1] KOLL, O. : *Methode der kleinsten Quadrate*. Springer, Berlin.
- [2] ROUBAKINE, G. : *Extension de la méthode des lignes d'influence*. Bull. techn. de la Suisse romande, 1953.
- [3] STÜSSI, F. : *Baustatik II*. Birkhäuser, Bâle.
- [4] ANSERMET, A. : *Calcul d'ellipsoïdes d'erreur*. Schweiz. Zeitschr. für Vermessung, 1957.
- [5] ANSERMET, A. : *A propos d'une forme générale de compensation*. Schweiz. Zeitschr. für Vermessung, 1959.
- [6] ANSERMET, A. : *Application de la théorie de l'équivalence*. Schweiz. Zeitschr. für Vermessung, 1960.

## ACTUALITÉ INDUSTRIELLE 17

### Paillard S.A. agrandit son département des études

Le 11 octobre 1961, la Direction de Paillard S.A. avait convié des représentants des autorités, du monde industriel, de l'enseignement et de la presse à l'inau-

guration du nouveau bâtiment du département des études. Les participants entendirent une allocution de M. Pagan, directeur général, assistèrent à la projection d'un film intitulé « Images vivantes », visitèrent les différents locaux du nouveau bâtiment du département des études, et eurent ensuite l'occasion, au cours d'un cocktail, d'échanger leurs impressions.