Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 87 (1961)

Heft: 23

Artikel: Bases physiques et mathématiques des mécaniques statistiques de la turbulence

Autor: Baatard, François

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65054

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

87e année Lausanne, 18 novembre 1961 N° 23

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)
de la Section genevoise de la S.I.A.
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: † J. Calame, ing. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; E. Martin, arch.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: M. Bridel; J. Favre, arch.; R. Neeser, ing.; A. Robert, ing.; J. P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION
Vacat
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 28.—	Etranger	Fr. 32.—
Sociétaires	»	» 23.—	»	» 28.—
Prix du numéro . . .	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande », N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES
Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 320.—
1/2 »	» 168.—
1/4 »	» 85.—
1/8 »	» 42.50

Adresse: Annonces Suisses S. A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales

SOMMAIRE

Bases physiques et mathématiques des mécaniques statistiques de la turbulence, par François Baatard, ingénieur EPUL.
Divers : Journée suisse de la technique des télécommunications. — Journée de la haute fréquence de l'ASE.
Bibliographie. — Carnet des concours.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Nouveautés, informations diverses.

BASES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES DES MÉCANIQUES STATISTIQUES DE LA TURBULENCE

par FRANÇOIS BAATARD, ingénieur EPUL, Lausanne

La fumée qui sort d'une cheminée, à l'image de celle d'une pipe ou d'un cigare, les nuages d'une explosion ou ceux de l'atmosphère, le jet-stream ou des rafales de vent sont des exemples parmi beaucoup de phénomènes qui évoluent selon des lois compliquées : les trajectoires sont brisées ou dessinent des courbes enchevêtrées, une particule initiale se scinde en une quantité d'autres qui prennent à leur tour autant de caractères individuels aléatoires qui sont les signes extérieurs de la *diffusion* du milieu ; les parois invoquées par la mécanique classique des fluides s'évanouissent et cette diffusion ne s'attaque pas seulement aux positions, mais encore aux vitesses, aux températures, etc., à toute grandeur physique fixant l'état de ce milieu ; l'une de ses propriétés les plus remarquables en est son *expansion*.

On conçoit facilement qu'une mécanique dont les lois sont originellement, à la suite des expériences de Galilée, construites par Newton sur la base du solide, puis transposées aux fluides sous la forme de l'hydrodynamique classique, soit peu adéquate à la description des milieux en instance de diffusion turbulente et que, dans la nécessité de coordonner les découvertes faites essentiellement dans l'atmosphère, il ait été fait appel à des notions nouvelles susceptibles de mieux rendre compte des phénomènes observés. Avec M. A. Viaut, président de l'Organisation Météorologique Mondiale, il n'est pas exagéré de dire que « la mécanique de l'atmosphère est, à certains égards, à l'avant-garde du progrès de la mécanique des fluides » [1].

Les guides des nouvelles investigations ont été la théorie cinétique des gaz et l'analyse harmonique.

1. Variables de Lagrange, variables d'Euler et hydrodynamique classique

Ce sont les deux modes de description traditionnelle d'un mouvement.

a) *Les variables ou coordonnées de Lagrange sont les coordonnées $(x, y, z; t)$ d'un point P dont on suit le mouvement sur sa trajectoire* Γ, en général par

[1] v. *La Météorologie*, par A. Viaut. Presses Universitaires de France, 1958.

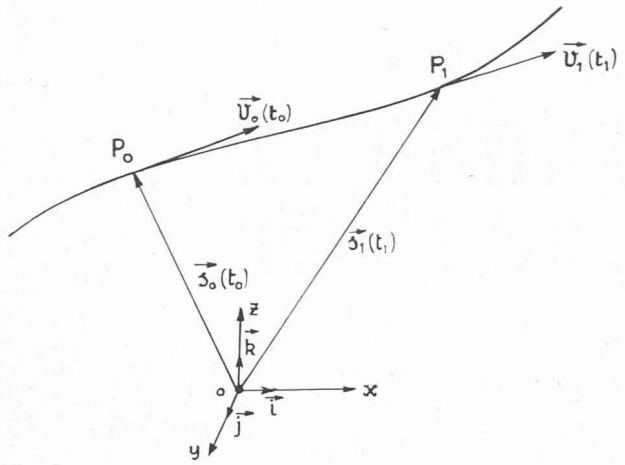

Fig. 1.

son vecteur-lieu $\vec{s} = \vec{s}(t)$ (fig. 1).

b) *Les variables d'Euler* sont obtenues à partir de celles de Lagrange par :

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \vec{v}(P\,;\,t) \tag{1}$$

et *permettent d'examiner le champ des vitesses* $\vec{v}$ dont elles sont les composantes v_x, v_y, v_z.

Le calcul de l'accélération met en évidence deux dérivées bien distinctes :

(2)

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{v}(P\,;\,t)}{\partial t} + \vec{v}\,(\vec{\nabla})\,\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

variation de $\vec{v}$, c'est-à-dire accélération = variation de $\vec{v}$ dans le temps, c'est-à-dire variation locale + variation de $\vec{v}$ dans l'espace = variation totale de $\vec{v}$

où ∇ représente l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ désignant les vecteurs unitaires du système d'axes 0, x, y, z).

Les deux dérivées sont :

1) $\frac{\partial}{\partial t}$ = taux de variation en un point de l'espace ou *dérivée locale.*

2) $\frac{d}{dt}$ = taux de variation le long de la trajectoire de la particule ou *dérivée moléculaire.*

Le mouvement est donc décrit par la variation dans le temps et dans l'espace du *champ des vitesses.*

La fonction $\vec{s}$ peut être développée en série

$$\vec{s} = \vec{s}_o + \vec{a}\,(t - t_o) + \frac{\vec{b}}{2!}\,(t - t_o)^2 +$$

avec $\vec{s}_o = \vec{s}\,(P_o\,;\,t_o)$, $\quad \vec{a} = \frac{\partial \vec{s}\,(P_o\,;\,t_o)}{\partial t_o}\; t = t_o$, ... etc.

Le fluide de masse ρ décrit par les systèmes de Lagrange ou d'Euler est *conservatif*, propriété exprimée par l'*équation de continuité*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \vec{u}) = o \tag{3}$$

L'hydrodynamique classique introduit le vecteur-tourbillon $\vec{T} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$ obéissant à l'*équation de Helmholtz*, qui en donne l'évolution

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{T}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{T}}{\rho}\right)\vec{\nabla}\,\vec{v} \tag{4}$$

En réalité, il y a destruction quasi immédiate d'un tel tourbillon et cette équation n'est valable que de courts instants.

Dans un *mouvement permanent et irrotationnel*, le bilan des énergies est fourni par le *théorème de Bernoulli*

$$\frac{V^2}{2} + U + P = \text{cte} \tag{5}$$

exprimant que *le long d'un filet liquide, la somme des énergies cinétiques* $\frac{V^2}{2}$, *potentielle* U *et de pression* P *est constante.*

L'hydraulique introduit les dissipations d'énergie par un terme supplémentaire des pertes de charge, passant ainsi de l'hydro-dynamique rationnelle du *fluide parfait* à celle, empirique, du *fluide réel.*

L'*équation de Navier* opère ce même passage en introduisant une relation linéaire entre les tensions et les vitesses de déformation mettant en jeu la *viscosité* ν du fluide, de manière que la force $\vec{df}$ s'opposant à l'élément de surface $d\sigma$ à une distance dn d'un autre élément du fluide et de vitesse dv soit

$$\frac{\vec{df}}{d\sigma} = -\,\nu\,\frac{\vec{dv}}{dn} \tag{6}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, les équations de Navier s'écrivent en admettant l'hypothèse (6)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_k v_k\,\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = F - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \nu\,\nabla^2 v_i \tag{7}$$

∇^2 désignant le laplacien $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

2. Mouvements d'ensemble, fluctuant et moyen

On doit à Boussinesq la *décomposition du mouvement d'ensemble en un mouvement moyen et un mouvement d'agitation* obéissant au schéma suivant de composition des vitesses :

$$\vec{v} = \vec{\bar{v}} + \vec{v}' \tag{8}$$

vitesse d'ensemble = vitesse moyenne + vitesse d'agitation

C'est le vecteur $\vec{v}'$ *d'agitation qui est rendu responsable des effets de la turbulence* et on lui assigne des propriétés voisines de celles des vitesses des molécules d'un gaz, préoccupation majeure des théories de la turbulence.

$\vec{v}'$ décrit des trajectoires complexes et diffuses et dont les lois relèvent de la statistique et du calcul des probabilités, tandis que $\vec{\bar{v}}$ moyen indique la tendance

générale du mouvement, en fonction des conditions initiales. A chaque instant, on peut effectuer la composition (8), couramment utilisée sous d'autres formes dans les applications de la théorie des erreurs, en électrotechnique, etc.

3. Les tensions turbulentes de Reynolds et les étages d'énergie

Nous avons dit que l'un des guides des théoriciens de la turbulence était le gaz, dont l'agitation a été légalisée dans la théorie cinétique. C'est bien ce qui a conduit Reynolds à transposer les propriétés de la molécule à la particule en définissant la vitesse $\overline{v}$ moyenne d'un groupe de particules turbulentes contenues dans un volume Ω par :

$$\overline{v_i} = \frac{1}{\Omega} \iiint v_i(x, t), \, d\Omega \tag{9}$$

Appliquant les équations de Navier à ces groupes de particules, Reynolds en a déduit la très importante équation aux dérivées partielles suivante :

(10)

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \sum_k \overline{v_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} = F - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} - \nu \Delta^2 \overline{v_i} - \sum_k \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_k}$$

qui relie les propriétés du mouvement d'ensemble aux tensions $-\rho \overline{v_i' v_k'}$ *purement turbulentes.*

C'est mathématiquement une première solution du problème des relations entre les *échelles des mouvements* qui a été soulevé par les météorologistes Dedebant et Wehrlé alors qu'ils établissaient les lois de la circulation générale de l'atmosphère. La question est de savoir dans quelle mesure un mouvement d'échelle inférieure, tel celui d'agitation, influence ou modifie les mouvements d'échelles qui lui sont supérieures, c'est-à-dire les mouvements moyen ou d'ensemble. Avec les deux auteurs ci-dessus, von Weizsäcker et W. Heisenberg ont répondu à la question.

En attendant, les équations (10) font apparaître :

1° un *étage supérieur*, qui est celui de l'*énergie cinétique du mouvement moyen* ;

2° un *étage moyen*, qui est celui de l'*énergie cinétique d'agitation des particules* ;

3° un *étage inférieur*, qui est celui de la *dissipation en chaleur de l'énergie cinétique des particules*, en raison des tensions de Reynolds $-\rho \overline{v'_i v'_k}$.

Une objection a été faite au sujet de la délimitation du volume Ω ; comment y parvenir ? C'est la notion de *corrélation*, base des mécaniques statistiques de la turbulence, qui permet de répondre.

4. La transposition par Taylor et Prandtl de la théorie cinétique des gaz de Maxwell-Boltzmann en mécanique des fluides turbulents

Le plus simplement possible, nous allons montrer comment ce passage a été fait.

Taylor suit les mouvements des particules avec les variables de Lagrange et forme les moyennes temporelles

$$\overline{v(t)}, \quad \overline{v(t + \Delta t)}, \quad \overline{v(t)^2}, \quad \overline{v(t + \Delta t)^2}$$

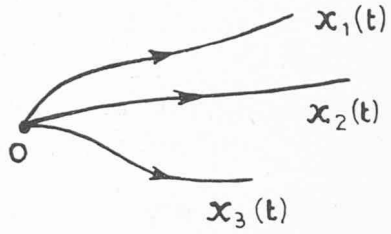

Fig. 2.

à deux instants t et $t + \Delta t$. Un paquet de particules étant en 0 (fig. 2) à l'instant originel $t = 0$, et puisque $\frac{d}{dt} x = v$, on peut écrire :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{x^2(\Delta t)} = \overline{x(\Delta t)\, v(\Delta t)} \tag{11}$$

Bien évidemment aussi :

$$x(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} v(\chi)\, d\chi,$$

χ étant un paramètre d'intégration.

(11) devient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{x^2(\Delta t)} = \int_0^{\Delta t} \overline{v(\chi)\, v(\Delta t)\, d\chi}$$

Taylor admet une telle relation valable pour le mouvement d'agitation d'indice $'$ et écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{x'^2(\Delta t)} = \int_0^{\Delta t} \overline{v'(\chi)\, v'(\Delta t)\, d\chi} \tag{12}$$

Or, $\overline{x'^2(\Delta t)}$ est l'écart quadratique moyen des positions observées pendant l'intervalle de temps Δt, cependant que le produit moyen

$$\overline{v'(\chi)\, v'(\Delta t)} \tag{13}$$

caractérise le « couplage statistique », c'est-à-dire la *corrélation des vitesses* pendant le même laps de temps.

On peut donc énoncer le résultat essentiel (12) sous la forme :

> *La dérivée de l'écart quadratique moyen de la position est l'intégrale du coefficient de corrélation des vitesses.*

Un *mouvement permanent* correspond à un produit moyen (13) ne dépendant que de Δt et l'on peut poser $\overline{v'^2} = C^2 =$ *constante = vitesse quadratique moyenne d'agitation.*

Le coefficient de corrélation r répond alors à la formule :

$$r = \frac{\overline{v'(\Delta t)\, v'(\chi)}}{\overline{v'^2}} = \frac{\overline{v'(\Delta t)\, v'(\chi)}}{C^2}$$

et (12) prend l'allure :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{x'^2(\Delta t)} = C^2 \int_0^{\Delta t} r\, d\chi \tag{14}$$

Les deux cas limites suivants s'interprètent facilement :

1. Si Δt *est petit*, $r \to 1$ et $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{x'^2} = C^2 \cdot \Delta t$ devenant par intégration $\sqrt{\overline{x'^2}} = C \cdot t$, signifie que la *dispersion des partieulcs est proportionnelle au temps.*
2. Si Δt *est grand*, $r(\Delta t)$ devient petit, l'influence du mouvement initial étant de plus en plus faible sur les mouvements de plus en plus lointains.

C'est à ce moment qu'intervient *l'hypothèse fondamentale de Prandtl : r devient négligeable dès l'instant où la particule a été renouvelée par la diffusion* et

$\theta = \int_0^\infty r(\chi)\, d\chi$ représente ce temps de renouvellement.

Il lui correspond une *longueur de corrélation ou de mélange l* :

$$l = C \cdot \theta = C \int_0^\infty r(\chi)\, d\chi$$

et la relation (12) devient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{x'^2(\Delta t)} = C^2 \cdot \theta \tag{15}$$

ou $$\underline{\overline{x'^2(\Delta t)}} = 2\,C^2\,\theta\,.\,\Delta t = \underline{2\,Cl\,\Delta t}$$

d'où le résultat fondamental :

La longueur de mélange l joue en turbulence le rôle du libre parcours moyen d'une molécule dans la théorie cinétique des gaz de Maxwell.

Mathématiquement, les résultats sont identiques à la suite de l'hypothèse de Prandtl.

Les moyennes temporelles $\overline{v(A)\, v(B)}$ des produits des vitesses mesurées en deux points différents A et B fournissent les corrélations dans le système des variables d'Euler.

Dès lors, *l'identité de deux écoulements est définie par l'identité de leurs fonctions de corrélation.*

5. La théorie statistique de la turbulence homogène et isotrope selon von Karman

C'est une turbulence invariante par rapport aux translations et aux rotations dont les lois sont construites par von Karman et Howarth à partir du *tenseur de corrélation des vitesses* v' mesurées à l'instant t en deux points A et B. L'homogénéité et l'isotropie sont conditionnées par :

$$\begin{gathered} \overline{v_0'^2} = \overline{v_1'^2} = \overline{v_2'^2} = \overline{v_3'^2} = K \\ \overline{v_1' v_2'} = \overline{v_2' v_3'} = \overline{v_3' v_1'} \end{gathered} \tag{16}$$

$\frac{3}{2}K$ représente *l'énergie d'agitation turbulente.*

f désignant la composante du tenseur des vitesses telle que $\overrightarrow{AB}$ soit parallèle à la vitesse d'ensemble du fluide, cependant que g concerne les composantes orthogonales à $\overrightarrow{AB}$, le tenseur de von Karman $\overline{v_i'(A)\, v_j'(B)}$ a pour tableau des composantes :

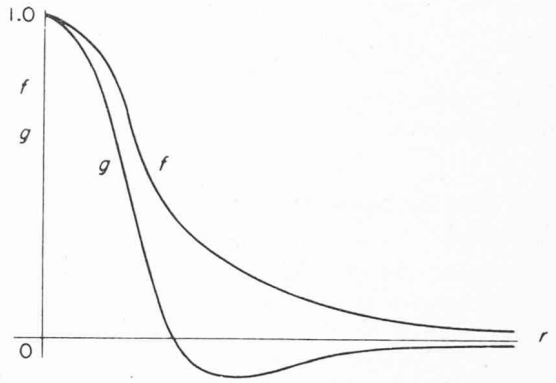

Fig. 3.

$$\begin{Vmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & f \end{Vmatrix} \tag{17}$$

avec les corrélations (fig. 3)

$$r_{ij} = \frac{\overline{v'_i\, v'_j}}{\overline{v'^2_i}\,.\,\overline{v'^2_j}\,.}$$

Si $A \to B$, le tenseur de von Karman rejoint celui de Reynolds, qui en est alors un cas particulier.

Si par exemple le fluide est incompressible, l'équation de continuité $\sum_i \frac{dv'_i}{dx_i} = 0$, multipliée par v et les moyennes étant prises sur le résultat, prend la forme :

$$g = f + \frac{r}{2}\frac{df}{dr}\cdot \tag{18}$$

6. L'analyse spectrale de la turbulence homogène

Taylor a émis l'hypothèse que la turbulence se manifeste par des *oscillations périodiques* des particules, oscillations traduisant leur agitation ; il admet ensuite que, à l'image de l'optique, de l'acoustique ou de l'électrotechnique, on peut les soumettre à *l'analyse harmonique.*

La vitesse d'agitation $v'(t)$ est :

$$v'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin \omega_k t + b_k \cos \omega_k t) \tag{19}$$

avec

$$\overline{v'^2(t)} = K = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \tag{20}$$

qui fournit l'énergie ou *l'intensité de la raie k.* Si le spectre des oscillations est continu, la série de Fourier ci-dessus est remplacée par une intégrale de Fourier, le spectre comportant des raies ou des bandes selon qu'il s'agit de composantes isolées de fréquences précises ou de fréquences continues.

Si cette fréquence n est prise comme variable, ω étant la pulsation, $n = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\overline{v'^2} = \int_0^\infty F(n)\, dn \tag{21}$$

où $F(\overset{*}{n})dn$ désigne l'énergie contenue entre les fréquences n et $n + dn$.

En général, $F(\overset{*}{n}) = K \cdot F(n)$ et $F(n)$ est la *fonction spectrale*.

La fonction de corrélation :

$$(22) \qquad r(\Delta t) = \frac{\overline{\varphi'(t)\,\varphi'(t+\Delta t)}}{K}$$

dans laquelle $\varphi'(t)$ est remplacée par sa série de Fourier, se transforme en

$$\overline{\varphi'(t)\,\varphi'(t+\Delta t)} = K \cdot r(\Delta t) = \\ = \frac{1}{2} \sum (a_k^2 + b_k^2) \cos \omega_k \Delta t.$$

Taylor, dans la suite de son calcul, passe des séries aux intégrales et obtient l'important résultat :

$$(23) \qquad \overline{\varphi'(t)\,\varphi'(t+\Delta t)} = K \int_o^\infty F(n) \cos 2\pi\, n\Delta t\, dn$$

qui, selon la définition de la fonction de corrélation, s'écrit :

$$(24) \qquad r(\Delta t) = \int_o^\infty F(n) \cos 2\pi\, n\Delta t\, dn$$

et s'énonce : *La fonction de corrélation $r(\Delta t)$ est une intégrale de Fourier inverse de Fourier de la fonction spectrale*, soit réciproquement :

$$F(n) = 4 \int_o^\infty r(\Delta t) \cos 2\pi\, n\Delta t\, dn.$$

7. La théorie « tourbillonnaire » de von Weizsäcker

Guidé par le modèle des turbulences de l'astrophysique et par les travaux de Taylor, Onsager, Batchelord, von Karman, Prandtl et Wieghard, von Weizsäcker fait dépendre l'état d'un fluide turbulent de deux éléments : d'une longueur qui est la mesure du diamètre du « *plus grand élément turbulent* » et de sa *vitesse quadratique moyenne d'ensemble* ; une troisième grandeur : la mesure du diamètre du « *plus petit élément turbulent* » peut aussi être considérée comme caractéristique de l'état du fluide. La répartition statistique de la densité d'énergie est recherchée pour un état stationnaire, à nombre de Reynolds très grand, sous forme d'une loi spectrale F mettant en évidence les étages de perturbations.

Le plus grand élément turbulent de diamètre L_o est subdivisé en a^3 volumes partiels de rayon a ; a divise donc L_o en a parties égales. A leur tour, ces volumes de diamètre L_1 sont à nouveau divisés en a^3 nouveaux volumes partiels déterminant un nouveau diamètre L_2. Entre deux diamètres L_{n+1} et L_n de masses tourbillonnaires, il y a la relation

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \delta = a^{-1}$$

La vitesse φ en chaque point est telle que : $\varphi = \varphi_o + \varphi_1 + \ldots$ avec $\varphi_o = \overline{(\varphi)}_o$ relatif à l'élément de diamètre L_o.

Ainsi, $\varphi_1 = \overline{(\varphi - \varphi_o)}$; puis $\varphi_{n+1} = \overline{(\varphi - \varphi_o \ldots - \varphi_n)}_{n+1}$; enfin $\varphi_n = \sqrt{(\overline{\varphi_n^2})_t}$ fournit durant le temps t la vitesse quadratique moyenne d'ensemble d'un élément n.

L'énergie dissipée va dépendre d'un coefficient de viscosité η indicateur du frottement moléculaire interne, constant, mais caractéristique des pertes d'énergie des petits éléments turbulents seulement ; si L_n est grand vis-à-vis de ces derniers, η n'aura que peu d'influence sur les pertes ; il faut donc introduire une zone de masses tourbillonnaires où η commence à être important et une autre zone où une viscosité turbulente sera prépondérante. Von Weizsäcker attribue un indice à η et selon Prandtl le relie à la densité ρ, la longueur de mélange l_n et la vitesse φ_n par :

$$\eta_n = \rho \cdot l_n \cdot \varphi_n$$

Entre l_n et L_n, une relation de proportionnalité $l_n = \beta L_n$ est admise.

L'énergie dissipée dépend de la proportion :

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_o} = \left(\frac{L_n}{L_o}\right)^{1/3}$$

cependant que la zone de séparation des grands et des petits tourbillons est fournie par un nombre de Reynolds critique et relatif au frottement moléculaire :

$$R_n^\mu = \frac{\rho \cdot L_n \cdot \varphi_n}{\mu} = \frac{\rho \cdot L_o \cdot \varphi_o}{\mu} \left(\frac{L_n}{L_o}\right)^{4/3} = R_o^\mu \left(\frac{L_n}{L_o}\right)^{4/3}$$

Les *nombres d'ondes* k_n sont proportionnels à $1/L_n$ et l'énergie dissipée E_n l'est à φ_n^2, c'est-à-dire à $L_n^{2/3}$; ainsi, von Weizsäcker établit la loi spectrale

$$\int_o^\infty F_k\, dk \sim L_n^{2/3} \sim k^{-2/3}$$

soit :

$$(25) \qquad \underline{F_k \sim k^{-5/3}}$$

Il s'agit là d'une loi de dissipation d'énergie valable pour les grands tourbillons à grands nombres de Reynolds ; elle est en langage de « série de Fourier », puisque les nombres d'ondes k sont fonction des oscillations des vitesses, oscillations qui dépendent elles-mêmes de la dimension des masses tourbillonnaires (et que les fluctuations des diagrammes d'enregistrement révèlent).

Par rapport à des intervalles de fréquence dn, l'énergie dépend de $\frac{dn}{dk}$ dimensionnellement proportionnel à :

$$\frac{L_n^{-2/3}}{L_n^{-1}} = L^{1/3} \sim k^{-1/3} \sim n^{-1/2}$$

c'est-à-dire que : $\underline{F_n \sim n^{-2}}$

Par exemple, Defant a identifié les fluctuations du temps à des phénomènes turbulents pour des masses atmosphériques où, par exemple, $L = 1000$ km, et pour des longueurs d'échange d'environ 50 m, ce qui fournit un η de l'ordre de 5.10^5 gr.sec^{-1}.cm^{-1}. Il s'agit là déjà des particules synoptiques de Dedebant et Wehrlé.

Von Weizsäcker a appliqué ces lois aux turbulences de la matière interstellaire envisagée comme milieu turbulent et trouve par exemple, pour la nébuleuse d'Orion : $L_n = 3.10^{19}$ cm avec $v_n = 3.10^6$ cm/sec = = 30 km/sec, cette nébuleuse étant admise comme petit élément turbulent de la voie lactée d'un $L_o =$ $= 3.10^{33}$ cm (distance du Soleil au centre de la Voie lactée) avec $v_o = 3.10^7$ cm/sec (vitesse de rotation de la Voie lactée) par rapport au Soleil.

8. La mécanique statistique de la turbulence de W. Heisenberg

a) *Considérations physiques*

Heisenberg, par une recherche des bilans d'énergie dans une turbulence en équilibre statistique, a élargi le domaine spectral que von Weizsäcker a étudié. La répartition de l'énergie est donnée, selon von Weizsäcker, par :

$$\rho \frac{\overline{v^2}}{2} = \rho \frac{v_o^2}{2} = \rho \int F(k)\, dk$$

$$\text{et} \quad F(k) \sim k^{-5/3}$$

avec $k = \dfrac{2\pi}{\text{longueur d'onde}}$ = nombre d'ondes, et $v_o = \sqrt{\overline{v^2}}$ comme écart-type de la vitesse moyenne.

Heisenberg admet que la vitesse v est développable selon les nombres d'ondes en série de Fourier :

$$v_x = \sum_k v_k e^{ik_x} \tag{26}$$

avec $k_x = \dfrac{2\pi}{L_x} n_x$

L'artifice utilisé par Heisenberg consiste à introduire un *coefficient de viscosité apparent* ν_k *essentiellement variable et fonction de la dimension des tourbillons* ; ν_k est donc dépendant de l'échelle de la turbulence et surtout des éléments turbulents de dimensions supérieures à $\dfrac{1}{k}$, c'est-à-dire de relativement grande échelle.

Ainsi, l'énergie dissipée par unité de masse dans l'ensemble du domaine spectral étant :

$$\varepsilon = 2\nu \int_o^\infty k^2 F(k)\, dk \tag{27}$$

il correspond au domaine spectral $< k$ une énergie ε_k.

Si $k \to \infty$, $\varepsilon_k \to \varepsilon$ ou bien $\lim\limits_{k \to \infty} \nu_k = 0$

Si $k \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$, d'où :

$$\varepsilon_k = 2(\nu + \nu_k) \int_o^k k^2 F(k)\, dk \tag{28}$$

Or, cette expression de ε_k comprend deux termes :

le premier désigne la part d'énergie d'agitation du domaine spectral $(0, k)$ *se transformant directement en chaleur.*

le second est la part de cette énergie qui, avant de se transformer en chaleur, sert à entretenir l'énergie d'agitation du domaine spectral (k, ∞) *des petits tourbillons.*

On peut fixer un nombre k_o tel que pour $k > k_o$ l'énergie dissipée par les grands tourbillons, c'est-à-dire de nombre d'ondes inférieur à k, soit une constante. La répartition de l'agitation turbulente entre les petits tourbillons, c'est-à-dire de nombre d'ondes supérieurs à k, et la transformation en chaleur ou agitation moléculaire, dépendent de k. Il s'agit là d'une hypothèse d'*équilibre statistique*, d'autant plus exacte que le nombre de Reynolds de la turbulence est plus grand.

b) *Lois mathématiques. Evolution de la turbulence en fonction du temps.*

La loi $F(k, t)$ obéit à une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2\nu k^2 F = o$$

et le bilan de la transformation stationnaire est régi par une autre équation :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_o^k F(k)\, dk}_{\text{qui représente : la variation de l'énergie d'agitation du domaine } (o,\, k)} + \underbrace{2\nu \int_o^k k^2 F(k)\, dk}_{\text{qui représente : l'énergie dissipée en chaleur par viscosité moléculaire}} = \underbrace{\int_o^k \psi(k)\, dk}_{\text{qui représente : la portion d'énergie transformée dans le domaine } (k,\, \infty)}$$

Les tourbillons se fractionnent donc, les grands cédant, lors de leur fractionnement, leur énergie aux petits tourbillons, cette énergie se dissipant finalement en chaleur dans le domaine (k, ∞).

L'équation fondamentale de la mécanique statistique de la turbulence selon Heisenberg s'écrit parallèlement à (28) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_o^k F(k)\, dk + 2\left(\nu + \int_o^\infty \frac{\sqrt{F}}{k^3}\, dk\right) \int_o^k k^2 F(k)\, dk = o \tag{30}$$

que vérifient la fonction spectrale $F \sim k^{-5/3}$ (fig. 4) si $k > k_o$, c'est-à-dire si la turbulence est prépondérante vis-à-vis des dissipations moléculaires, et l'autre fonction spectrale $F \sim k^{-7}$ si $k < k_o$, soit dans le cas où la viscosité moléculaire est prépondérante.

c) *Jonction avec les théories précédentes*

Heisenberg reprend alors les corrélations de Taylor et von Karman en deux points différents P_1 et P_2, mais au même instant, et les exprime en fonction de $F(k)$:

$$r_x = \frac{\overline{v(P_1)\, v(P_2)}}{C^2} = \frac{\int_o^\infty F(k) \cos k\, dk}{\int_o^\infty F(k)\, dk} \tag{31}$$

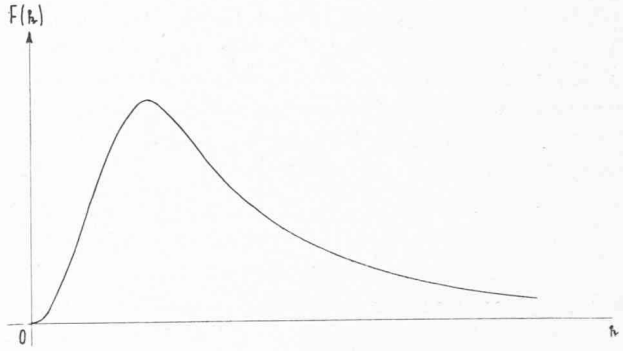

Fig. 4.

Les fluctuations de la pression sont également admises développables en série de Fourier :

$$p_x = \sum_k p_k \, e^{ikx} \tag{34}$$

et reliées à la vitesse par l'équation hydrodynamique :

$$\dot{v} = -(v\nabla)\, v - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 v$$

qui est celle de Navier.

La théorie de Heisenberg saisit les *étages* de perturbations définis par les nombres d'ondes k et s'appuie sur le caractère *aléatoire* de la turbulence. Il est surtout remarquable de voir s'introduire une viscosité turbulente essentiellement variable et fonction de l'échelle de cette turbulence.

Les fonctions spectrales $F(k)$ conviennent particulièrement bien au calcul des bilans d'énergie dans les jets.

9. Les calculs de diffusion turbulente

Les développements qui précèdent présentent un grand intérêt pratique lorsqu'ils sont incorporés à une théorie de la diffusion telle que celle de Sir G. Sutton ; cette incorporation est l'œuvre très récente de J. Saïssac en France et de Gifford aux U.S.A. ; ainsi, la théorie permet de calculer les effets d'émissions instantanées ou continues d'une source ponctuelle (par exemple d'explosions nucléaires ou de cheminées émettant gaz ou fumées). Une fois les calculs théoriques achevés, le problème reste de les adapter aux circonstances aérologiques ou météorologiques locales ou régionales. Une étude paraîtra prochainement à ce propos.

10. Conclusion: Edification d'une mécanique statistique générale de la diffusion turbulente

Le nombre des paramètres qui interviennent dans les éléments de définition d'une diffusion turbulente vient d'être établi par des spécialistes allemands, qui en décèlent 150 environ. D'autre part, les théories que nous avons exposées sont toutes des aspects particuliers d'une conception beaucoup plus générale ; c'est à la suite d'une remarque que nous a faite M. W. Heisenberg à propos d'un travail antérieur que nous avons entrepris une nouvelle étude de la diffusion turbulente sur la base du concept mathématique de *variable aléatoire*. Il en résulte une généralisation des théories exposées ici, c'est-à-dire une simplification. On ne saurait reprocher l'utilisation de variables aléatoires dont les fonctions de distribution sont par ailleurs certaines, pas plus que l'emploi des imaginaires (dont les nombres aléatoires sont voisins par certaines de leurs propriétés) en théorie des fonctions ou en électrotechnique. Il y a des problèmes où le calcul des probabilités s'impose. Surtout s'il permet de formuler très simplement des lois à partir d'un principe variationnel, et que ces lois soient celles des fluides turbulents. Les équations aux dérivées partielles qui apparaissent alors comme conditions d'un minimum d'action symboliquement exprimée par :

$$\delta \int R = 0$$

où R est la fonction de distribution des probabilités conjuguées des positions et des vitesses, sont alors celles d'une mécanique de la diffusion turbulente qui comporte notamment deux cas limites : la mécanique classique (sans diffusion) et une mécanique aléatoire, qui est celle de la *diffusion libre*. Les cas intermédiaires concernent essentiellement les rotations d'un fluide turbulent (différenciées ou non), les cas relativistes étant réservés.

Lausanne, le 1er novembre 1961.

BIBLIOGRAPHIE SUCCINCTE

1. Baatard, F. : *Sur une vérification de la théorie spectrale de la turbulence selon Heisenberg.* Extrait des C.R. de l'Académie des Sciences de France, t. 239, Paris, 1954.
2. Baatard et Gonseth : *Principes d'une mécanique aléatoire Lagrangienne.* Extrait des C.R. de l'Académie des Sciences de France, t. 244, Paris, 1957.
3. Frenkel et Sheppard : *Atmospheric diffusion.* Academic Press, New York, 1959.
4. Heisenberg, W. : *Zur statistischen Theorie der Turbulenz.* Zeitschr. für Physik, 1948.
5. Juvet, G. : *Analyse vectorielle* (tome II). Librairie de l'Université, Lausanne, 1933.
6. Saissac, J. : *La diffusion atmosphérique.* Journal de mécanique et de physique de l'atmosphère, avril-juin 1960.
7. Shi Pai : *Viscous Flow turbulent.* Van Nostrand Co., 1958, Princetown.
8. Sutton, G. : *Atmospheric turbulence.* Methuem & Co. Ltd., London, 1949.
9. Sutton, O. : *Micrometeorology.* McGrawill Co., 1953.
10. Von Weizsäcker : *Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynoldschen Zahlen.* Zeitschr. für Physik 1948.

DIVERS

Journée suisse de la technique des télécommunications

Le 14 septembre a eu lieu à Lucerne la 20e Journée suisse de la technique des télécommunications, organisée par l'Association suisse des électriciens et l'Association « Pro Téléphone ».

Dans son allocution de bienvenue, M. *H. Puppikofer*, directeur, président de l'Association suisse des électriciens, a souhaité la bienvenue aux nombreuses personnalités de l'industrie et universitaires présentes.

M. *H. Weber*, professeur, directeur de l'Institut des télécommunications de l'EPF, président de cette journée, a souligné l'importance de l'alimentation des centrales de télécommunications, sujet que les différents conférenciers ont développé par la suite.

Pour M. *F. Locher*, ingénieur, chef de la division des téléphones et des télégraphes de la Direction générale des PTT, Berne, l'alimentation d'une centrale de télécommunications constitue un élément très important. En effet, vu les exigences actuelles, une telle alimentation doit fonctionner sans interruption, malgré les dérangements et les pannes éventuelles du réseau. C'est pour cela qu'on a fait de grands efforts