Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 87 (1961)

Heft: 20

Artikel: Étude comparative des coques de révolution à génératrice rectiligne et à épaisseur de paroi constante

Autor: Tâche, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65049

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

87e année Lausanne, 7 octobre 1961 N° 20

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)
de la Section genevoise de la S.I.A.
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: † J. Calame, ing. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; E. Martin, arch.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: M. Bridel; J. Favre, arch.; R. Neeser, ing.; A. Robert, ing.; J. P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION
Vacat
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 28.—	Etranger	Fr. 32.—
Sociétaires	»	» 23.—	»	» 28.—
Prix du numéro . . .	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande », N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES
Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 320.—
1/2 »	» 165.—
1/4 »	» 85.—
1/8 »	» 42.50

Adresse: Annonces Suisses S. A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales

SOMMAIRE

Etude comparative des coques de révolution à génératrice rectiligne et à épaisseur de paroi constante, par J. Tâche, ingénieur EPUL aux Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey S.A.
Divers. — Les congrès.
Documentation générale. — Nouveautés. Informations diverses.

ÉTUDE COMPARATIVE DES COQUES DE RÉVOLUTION À GÉNÉRATRICE RECTILIGNE ET À ÉPAISSEUR DE PAROI CONSTANTE

par J. TÂCHE, ingénieur EPUL aux Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey S. A.

Introduction

Les tubes coniques, cylindriques et les plaques circulaires, très fréquemment utilisés par l'ingénieur, sont de la même famille, étant tous trois issus de la coque à génératrice rectiligne ayant une épaisseur de paroi constante. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter un coup d'œil sur les figures 1, 2 et 3. Si l'angle formé par la génératrice avec l'axe de révolution a une valeur quelconque β, la coque est un tube conique. Lorsque $\beta = 0$, la coque devient un tube cylindrique, et si $\beta = \frac{\pi}{2}$, on obtient une coque plane, c'est-à-dire une plaque circulaire avec ou sans trou central.

Toutes ces coques peuvent être soumises à des forces de nature bien différente. Cette étude envisage seulement une pression uniformément répartie sur toute la surface de la coque, ainsi que des moments et des forces uniformément répartis circulairement sur les faces terminales de la coque (perturbations).

Les déformations et les tensions produites par les forces que l'on vient de définir peuvent se déterminer en partant d'un système d'équations différentielles commun aux trois genres de coques (voir par exemple le *Bulletin technique des Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey, S.A.*, année 1953, pages 46 et suivantes). Ce système se simplifie pour $\beta = 0$ et pour $\beta = \frac{\pi}{2}$. Dès lors sa résolution ne présente pas grande difficulté. C'est la raison pour laquelle le tube cylindrique et la plaque circulaire ont été étudiés en premier lieu, si bien que les formules qui s'y rapportent sont devenues classiques.

Si l'angle β garde une valeur quelconque, il n'y a plus possibilité de simplifier le système d'équations différentielles, et par conséquent sa résolution est beaucoup plus difficile. Il n'est donc pas étonnant que fort peu de chercheurs se soient attaqués à ce problème.

MM. S. Casacci et J. Bosc, ingénieurs aux Etablissements Neyrpic, Grenoble (France), sont les premiers, à notre connaissance, à avoir résolu d'une façon pratique le problème du tube conique en calculant les coefficients d'influence pour des coques de différentes longueurs, de différentes épaisseurs et de différentes conicités. Ces coefficients sont publiés sous forme de tableaux dans l'ouvrage intitulé *Calcul à la flexion des coques coniques, d'épaisseur constante, soumises à des charges axisymétriques*, édition Dunod, Paris, 1959, ouvrage que nous désignerons par la suite, en abrégé, par *Coques coniques*.

En pratique, on a souvent affaire à des agrégats formés de plusieurs coques de révolution de genre différent, par exemple un tube conique soudé à un tube cylindrique, ou encore un tube cylindrique étranglé par une frette.

Pour résoudre ces problèmes, il faudra avoir recours à des études différentes. Les notations utilisées ne seront en général pas les mêmes, car chaque auteur a sa façon personnelle de traiter un problème. Le praticien devra donc faire un effort d'adaptation pour marier les différentes formules disséminées dans plusieurs ouvrages, ce qui entraînera un surcroît de travail et augmentera les causes d'erreurs. On se rendra facilement compte des difficultés rencontrées en feuilletant par exemple l'ouvrage *Coques coniques*.

Le but de cette étude est de remédier à ces inconvénients en donnant des formules ayant toutes une même structure, cette dernière étant choisie de façon à faire ressortir l'analogie entre les différentes coques. Ces formules sont présentées sous forme de tableaux, innovation qui nous paraît particulièrement commode pour dresser le tableau des équations linéaires dont la résolution fournira les valeurs des grandeurs inconnues cherchées ; voir l'exemple qui termine cette étude.

En comparant les tableaux I et II, on se rendra compte que les formules des coques coniques et cylindriques présentent une analogie particulièrement remarquable.

Le tableau I et tous les coefficients qui s'y rapportent sont tirés de l'ouvrage *Coques coniques*.

Pour les autres tableaux, on a utilisé les études parues dans le *Bulletin technique des Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey, S.A.*, années 1942 à 1947.

Terminologie

Face	Section circulaire, faite perpendiculairement à la génératrice de la coque.
M	Valeur, par radian, du moment uniformément réparti sur une face.
H	Valeur, par radian, de la force radiale uniformément répartie sur une face.
V	Valeur, par radian, de la force axiale uniformément répartie sur une face.
p	Pression, par unité de surface, uniformément répartie sur toute la coque (positif si la pression est à l'intérieur de la coque).
$\Omega = E\omega$	Vecteur représentant la rotation ω en un point quelconque de la génératrice (positif dans le sens de β croissant).
$Y = Ey$	Vecteur représentant le déplacement radial y d'un point quelconque de la génératrice (positif pour une augmentation du rayon).
$Z_n = Ez_n$	Vecteur représentant le déplacement axial de la face supérieure par rapport à la face inférieure supposée fixe (positif lorsque la distance axiale entre les deux faces terminales augmente).
E	Module d'élasticité.
ν	Coefficient de Poisson.
Perturbation	L'une quelconque des valeurs M, H ou V.
Déformation	L'une quelconque des valeurs Ω, Y ou Z.
k	Coefficient de déformation : c'est le coefficient par lequel on doit multiplier une perturbation pour obtenir la déformation correspondante. Sa valeur dépend des unités de force et de longueur utilisées pour le calcul.
K	Coefficient d'influence : c'est un facteur adimensionnel du coefficient de déformation. Ce facteur est cependant une fonction des dimensions de la coque.
ψ	Coefficient de déformation pour la pression p.
β	Angle entre la génératrice et l'axe de révolution.
r	Rayon d'une face.
$b = r \cos \beta$	(Voir figure 1.)
h	Epaisseur de la coque.
$m = \sqrt[4]{3\,(1 - \nu^2)}$	($m = 1{,}285407$ pour $\nu = 0{,}3$).
a	Rayon intérieur de la coque plane.
c	Rayon extérieur de la coque plane.

N. B. — Les sens positifs des perturbations et de la pression p sont indiqués sans ambiguité sur les figures.

Remarques communes à toutes les coques

Les tableaux des coefficients de déformation ont cinq lignes et six colonnes. Si l'on fait abstraction de la dernière colonne, réservée aux coefficients de la pression p, on constate que chaque tableau se compose de vingt-cinq cases. Les coefficients des cases disposées symétriquement par rapport à la diagonale principale (celle partant de la case supérieure de gauche pour aboutir à la case inférieure de la cinquième colonne) sont égaux deux à deux en valeur absolue. Il s'ensuit que le nombre des coefficients à calculer est réduit de vingt-cinq à quinze. Autrement dit, il n'y a pas lieu de calculer les dix coefficients placés en dessous de la diagonale principale. Les dix égalités des coefficients k se justifient toutes par le théorème de Maxwell. A noter toutefois que si le théorème est facilement applicable à de si nombreux coefficients, cela est dû au fait que les perturbations sont exprimées *par radian* et non pas par unité de longueur, comme cela se fait d'habitude. C'est là un des avantages de notre notation. D'autres avantages ont été mentionnés dans le *Bulletin technique des Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey S.A.*, année 1950, page 44.

Aussi est-il souhaitable que cette notation soit davantage connue et plus souvent utilisée, bien qu'elle puisse paraître à première vue inutile et révolutionnaire.

I. *Tableau des coefficients de déformation pour une coque conique, selon figure 1*

	M_o	H_o	M_n	H_n	V_o	p
Ω_o	$k_{11} = + \frac{4\ m^3}{h^2\ \sqrt{b_o h}} K_{11}$ 10-2	$k_{12} = - \frac{2\ m^2}{h^2} K_{12}$ 35-2	$k_{14} = - \frac{4\ m^3}{h^2\ \sqrt{b_n h}} K_{14}$ 16-2	$k_{15} = - \frac{2\ m^2}{h^2} K_{15}$ 42-2	k_{16} 64-2	ψ_1 76-2
Y_o	$k_{21} = + k_{12}$	$k_{22} = + \frac{2m\ \sqrt{b_o h}}{h^2} K_{22}$ 49-2	$k_{24} = + \frac{2\ m^2}{h^2} K_{24}$ 28-2	$k_{25} = + \frac{2\ m\ \sqrt{b_o h}}{h^2} K_{25}$ 56-2	k_{26} 65-2	ψ_2 77-2
Ω_n	$k_{41} = - k_{14}$	$k_{42} = - k_{24}$	$k_{44} = - \frac{4\ m^3}{h^2\ \sqrt{b_n h}} K_{44}$ 78-2	$k_{45} = - \frac{2\ m^2}{h^2} K_{45}$ 82-2	k_{46} 86-2	ψ_4 92-2
Y_n	$k_{51} = - k_{15}$	$k_{52} = - k_{25}$	$k_{54} = + k_{45}$	$k_{55} = - \frac{2\ m\ \sqrt{b_n h}}{h^2} K_{55}$ 84-2	k_{56} 87-2	ψ_5 93-2
Z_n	$k_{61} = + k_{16}$	$k_{62} = + k_{26}$	$k_{64} = - k_{46}$	$k_{65} = - k_{56}$	k_{66} 115-2	ψ_6 118-2

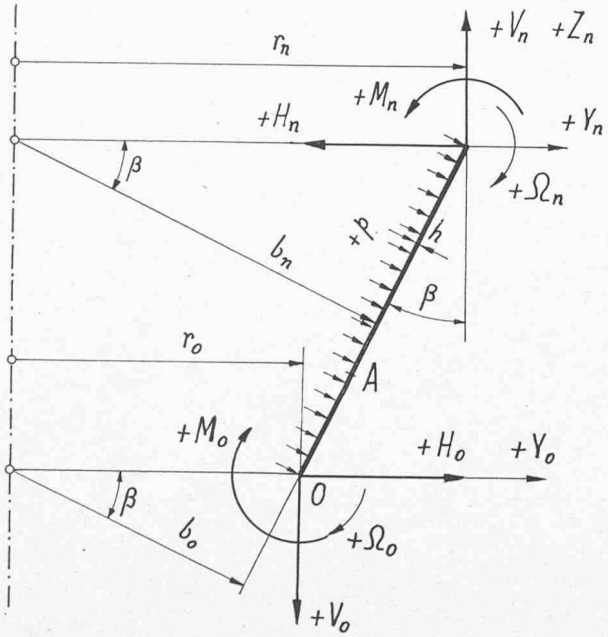


Fig. 1

Ce tableau, ainsi que les suivants, se lisent comme suit :

$$\Omega_o = k_{11}\, M_o + k_{12}\, H_o + k_{14}\, M_n + k_{15}\, H_n + k_{16}\, V_o + \psi_1\, p$$

Pour $\nu = 0{,}3$ $\quad 4\ m^3 = 8{,}495364 \quad 2\ m^2 = 3{,}304542 \quad 2\ m = 2{,}570814$

Condition d'équilibre de la coque : $V_o + \frac{r_n^2 - r_o^2}{2}\, p = V_n.$

On a indiqué au bas, à gauche de chaque case, le numéro de la formule de l'ouvrage *Coques coniques* qui a été utilisée pour établir le coefficient de déformation.

Les coefficients des deux dernières colonnes se calculent d'après les formules indiquées ci-après et qui sont beaucoup trop longues pour pouvoir figurer *in extenso* sur le tableau. Les formules 115-2 et 118-2 donnent l'allongement γ de la génératrice. Pour calculer k_{66} et ψ_6 à partir de γ, on a utilisé la relation

$$Z_n = \frac{E\gamma}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\left(Y_o - Y_n\right).$$

Valeurs des coefficients de déformation des deux dernières colonnes du tableau I pour coques coniques de longueur quelconque

$$k_{16} = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{h\,b_0} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{12} + k_{15} + \frac{h^2 \sin\beta}{12\,(1+\nu)}\left(\frac{k_{11}}{b_o} + \frac{k_{14}}{b_n}\right)\right]$$

$$k_{26} = -\frac{\nu}{h\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{22} + k_{25} + \frac{h^2 \sin\beta}{12\,(1+\nu)}\left(\frac{k_{21}}{b_o} + \frac{k_{24}}{b_n}\right)\right]$$

$$k_{46} = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{h\,b_n} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{42} + k_{45} + \frac{h^2 \sin\beta}{12\,(1+\nu)}\left(\frac{k_{41}}{b_o} + \frac{k_{44}}{b_n}\right)\right]$$

$$k_{56} = -\frac{\nu}{h\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{52} + k_{55} + \frac{h^2 \sin\beta}{12\,(1+\nu)}\left(\frac{k_{51}}{b_o} + \frac{k_{54}}{b_n}\right)\right]$$

$$k_{66} = +\frac{\mathfrak{L}\,\dfrac{b_n}{b_o}}{h\sin\beta\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{62} + k_{65} + \frac{h^2 \sin\beta}{12\,(1+\nu)}\left(\frac{k_{61}}{b_o} + \frac{k_{64}}{b_n}\right)\right]$$

$\mathfrak{L}$ = logarithme naturel.

$$\psi_1 = +\frac{3b_o \operatorname{tg}\beta}{2h\cos^2\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_o^2 k_{12} + b_n^2 k_{15} + \frac{h^2\sin\beta}{4\,(1-\nu)}\,(b_o k_{11} + b_n k_{14})\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{16}$$

$$\psi_2 = +\frac{(2-\nu)\,b_o^2}{2h\cos^3\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_o^2 k_{22} + b_n^2 k_{25} + \frac{h^2\sin\beta}{4\,(1-\nu)}\,(b_o k_{21} + b_n k_{24})\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{26}$$

$$\psi_4 = +\frac{3b_n \operatorname{tg}\beta}{2h\cos^2\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_o^2 k_{42} + b_n^2 k_{45} + \frac{h^2\sin\beta}{4\,(1-\nu)}\,(b_o k_{41} + b_n k_{44})\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{46}$$

$$\psi_5 = +\frac{(2-\nu)\,b_n^2}{2h\cos^3\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_o^2 k_{52} + b_n^2 k_{55} + \frac{h^2\sin\beta}{4\,(1-\nu)}\,(b_o k_{51} + b_n k_{54})\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{56}$$

$$\psi_6 = +\frac{(b_n^2 - b_o^2)\,(1 - 4\sin^2\beta - 2\nu\cos^2\beta)}{4h\sin\beta\cos^4\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_o^2 k_{62} + b_n^2 k_{65} + \frac{h^2\sin\beta}{4(1-\nu)}\,(b_o k_{61} + b_n k_{64})\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{66}$$

Valeurs des coefficients de déformation des deux dernières colonnes du tableau I, pour coques coniques longues

Petite base (face *o*)

$$k_{16} = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{hb_o} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{12} + \frac{h^2\sin\beta}{12\,(1+\nu)\,b_o}\,k_{11}\right]$$

$$k_{26} = -\frac{\nu}{h\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{22} + \frac{h_2\sin\beta}{12\,(1+\nu)\,b_o}\,k_{21}\right]$$

$$\psi_1 = +\frac{3b_o \operatorname{tg}\beta}{2h\cos^2\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_o^2 k_{12} + \frac{h^2 b_o\sin\beta}{4\,(1-\nu)}\,k_{11}\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{16}$$

$$\psi_2 = +\frac{(2-\nu)\,b_o^2}{2h\cos^3\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_o^2 k_{22} + \frac{h^2 b_o\sin\beta}{4\,(1-\nu)}\,k_{21}\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{26}$$

Grande base (face *n*)

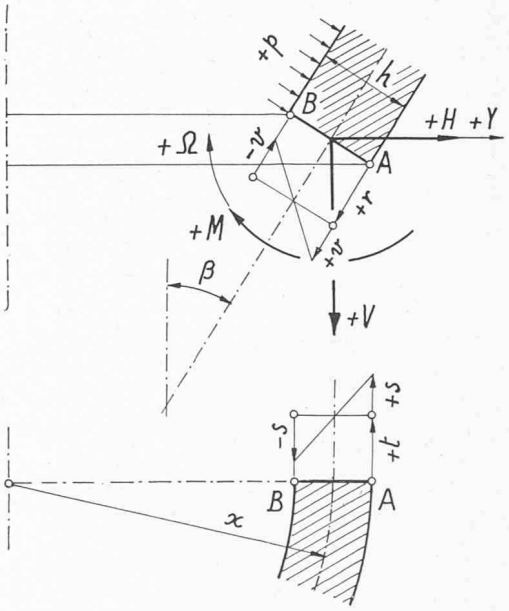
$$k_{46} = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{hb_n} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{45} + \frac{h^2\sin\beta}{12\,(1+\nu)\,b_n}\,k_{44}\right]$$

$$k_{56} = -\frac{\nu}{h\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\left[k_{55} + \frac{h^2\sin\beta}{12\,(1+\nu)\,b_n}\,k_{54}\right]$$

$$\psi_4 = +\frac{3b_n \operatorname{tg}\beta}{2h\cos^2\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_n^2 k_{45} + \frac{h^2 b_n\sin\beta}{4\,(1-\nu)}\,k_{44}\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{46}$$

$$\psi_5 = +\frac{(2-\nu)\,b_n^2}{2h\cos^3\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}\left[b_n^2 k_{55} + \frac{h^2 b_n\sin\beta}{4\,(1-\nu)}\,k_{54}\right] - \frac{r_o^2}{2}\,k_{56}$$

Fig. 5. — Tensions agissant sur une face : *(voir texte et formules à la page suivante).*



Instructions pour l'utilisation des tableaux des coefficients d'influence publiés par « Coques coniques »

On calcule

$$z_1 = \frac{2m}{\sin\beta}\sqrt{\frac{b_o}{h}} \qquad z_2 = \frac{2m}{\sin\beta}\sqrt{\frac{b_n}{h}}$$

$$2m = 2{,}570814 \quad \text{pour } \nu = 0{,}3$$

Coefficients d'influence		Numéro des tableaux de *Coques coniques*		
Selon notre notation	Selon notation de *Coques coniques*	Pour coques de longueur quelconque	Pour coques longues	
			Petite base (face o)	Grande base (face n)
K_{11}	$K^{M_1}_{Y_1}$	1	15 ou 16	—
K_{12}	$K^{F_1}_{Y_1}$	2	15 ou 16	—
K_{14}	$\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\, K^{M_2}_{Y_1}$	4	—	—
K_{15}	$\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\, K^{F_2}_{Y_1}$	5	—	—
K_{22}	$K^{F_1}_{\delta_1}$	3	15 ou 16	—
K_{24}	$\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}\, K^{M_2}_{\delta_1}$	11	—	—
K_{25}	$\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\, K^{F_2}_{\delta_1}$	6	—	—
K_{44}	$K^{M_2}_{Y_2}$	7	—	15 ou 16
K_{45}	$K^{F_2}_{Y_2}$	8	—	15 ou 16
K_{55}	$K^{F_2}_{\delta_2}$	9	—	15 ou 16

Les coefficients d'influence des tableaux de *Coques coniques* sont valables seulement pour $\nu = 0{,}3$.

Les coques coniques longues sont celles pour lesquelles les coefficients de déformation k_{14}, k_{15}, k_{24} et k_{25} peuvent être considérés comme pratiquement nuls. A remarquer que les quatre coefficients d'influence se rapportant à ces quatre coefficients de déformation, positifs pour coques courtes, deviennent négatifs lorsque les coques sont plus longues. Ceci montre que la déformation d'une coque conique est ondulatoire, comme celle d'un tube cylindrique.

On pourrait s'étonner que les tableaux 10, 12, 13 et 14 ne soient pas mentionnés dans la liste précédente ; ils sont superflus, car ils se rapportent à des coefficients de déformation qui, grâce au théorème de Maxwell, n'ont pas besoin d'être calculés. On constate que les coefficients du tableau 10 s'obtiennent en multipliant ceux du tableau 4 par le facteur z_1/z_2 et qu'en multipliant par ce même facteur les coefficients du tableau 6 on obtient ceux du tableau 12. Quant aux coefficients des tableaux 13 et 14, ils sont non seulement inutiles, mais ils ne satisfont pas même à la définition d'un coefficient d'influence.

Calcul des perturbations et des déformations pour une face quelconque *A* d'une coque

On suppose que les perturbations et déformations de la face o sont connues. On se propose de déterminer ces mêmes caractéristiques pour une face quelconque A, voir figure 1.

A cet effet, on établit le tableau des coefficients de déformation pour la coque OA.

Les deux premières lignes donnent deux équations qui permettent de déterminer M_A et H_A. V_A se calcule par l'équation d'équilibre et les trois déformations, par les équations des trois dernières lignes du tableau.

Ce procédé est applicable à une coque quelconque. Il n'est pas très rapide, mais nous n'en connaissons pas d'autres pour la coque conique. Pour les coques cylindriques longues et pour les coques planes, nous indiquerons des formules d'une application plus simple.

Calcul des tensions à partir des perturbations et des déformations

En pratique, les déformations d'une coque ne présentent pas un intérêt primordial ; ce que l'on désire connaître avant tout, ce sont les tensions dans la coque. Les formules ci-après permettent de les calculer très facilement si l'on connaît les trois perturbations agissant sur une face quelconque et les deux déformations Ω et Y de la même face. Remarquons que la déformation Z, qui est une translation de la face dans le sens axial, n'engendre pas de tensions (c'est une déformation de la coque mais non pas de la face).

Mentionnons en outre que les formules ci-dessous sont valables non seulement pour les trois genres de coques faisant l'objet de cette étude, mais encore pour les coques de révolution à génératrice curviligne et à épaisseur variable.

$$v = \pm \frac{6M}{h^2 x}$$

$$r = + \frac{V\cos\beta - H\sin\beta}{hx}$$

$$s = \mp \frac{h\,\Omega\sin\beta}{2x} + \nu v$$

$$t = + \frac{Y}{x} + \nu r$$

Les tensions sont indiquées sur la figure 5.[1] Dans ces formules, le signe supérieur correspond aux tensions en A, et le signe inférieur aux tensions en B.

A remarquer que les tensions sont indépendantes du module d'élasticité.

Les déformations réelles ω, y et z sont obtenues en divisant les vecteurs-déformation par le module d'élasticité, voir terminologie.

Pour le cas, assez rare en pratique, où la coque serait reliée à des éléments ayant un module d'élasticité différent de celle de la coque, il faudrait avoir soin d'en tenir compte, en égalant, pour établir les équations, non pas les vecteurs-déformation, mais les déformations réelles.

[1] Les besoins impérieux de la mise en pages ont obligé de mettre cette figure à la page précédente, donc avant les figures 2, 3 et 4.

II. *Tableau des coefficients de déformation pour une coque cylindrique, selon figure 2*

	M_o	H_o	M_n	H_n	V_o	p
Ω_o	$k_{11} = + \frac{4m^3}{h^2 \sqrt{bh}} K_{11}$	$k_{12} = - \frac{2\,m^2}{h^2} K_{12}$	$k_{14} = - \frac{4\,m^3}{h^2 \sqrt{bh}} K_{14}$	$k_{15} = - \frac{2\,m^2}{h^2} K_{15}$	$k_{16} = 0$	$\Psi_1 = 0$
Y_o	$k_{21} = + k_{12}$	$k_{22} = + \frac{2\,m \sqrt{bh}}{h^2} K_{22}$	$k_{24} = - k_{15}$	$k_{25} = + \frac{2\,m \sqrt{bh}}{h^2} K_{25}$	$k_{26} = - \frac{\nu}{h}$	$\Psi_2 = + \frac{b^2}{h}$
Ω_n	$k_{41} = - k_{14}$	$k_{42} = - k_{24}$	$k_{44} = - k_{11}$	$k_{45} = + k_{12}$	$k_{46} = 0$	$\Psi_4 = 0$
Y_n	$k_{51} = - k_{15}$	$k_{52} = - k_{25}$	$k_{54} = + k_{45}$	$k_{55} = - k_{22}$	$k_{56} = - \frac{\nu}{h}$	$\Psi_5 = + \frac{b^2}{h}$
Z_n	$k_{61} = 0$	$k_{62} = + k_{26}$	$k_{64} = 0$	$k_{65} = - k_{56}$	$k_{66} = + \frac{l}{bh}$	$\Psi_6 = - \frac{\nu\, bl}{h}$

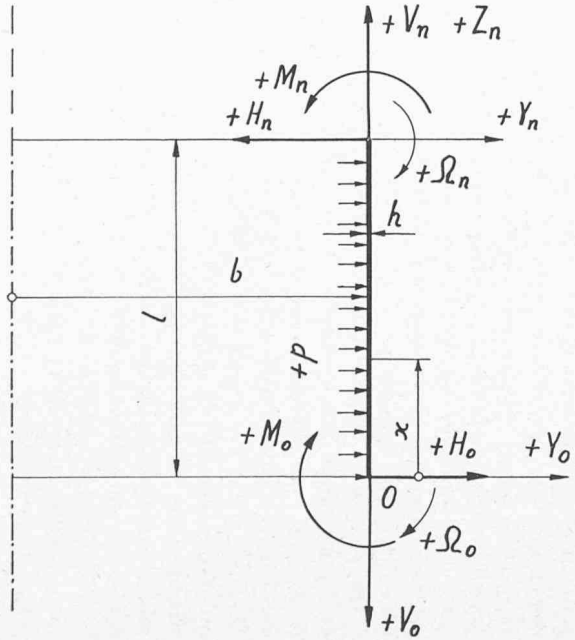


Fig. 2

Ce tableau se lit comme le tableau I.

Pour $\nu = 0{,}3$ $\quad 4\ m^3 = 8{,}495364 \quad 2\ m^2 = 3{,}304542 \quad 2\ m = 2{,}570814$

Condition d'équilibre de la coque : $V_o = V_n$.

Valeurs des coefficients d'influence K, pour un tube de longueur quelconque :

$$\varphi = \frac{ml}{\sqrt{bh}} \qquad m = 1{,}285407 \qquad D = sh^2\,\varphi - \sin^2\varphi.$$

$$K_{11} = \frac{sh\,\varphi\, ch\,\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}{D} \qquad K_{12} = \frac{sh^2\varphi + \sin^2\varphi}{D} \qquad K_{22} = \frac{sh\,\varphi\, ch\,\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{D}$$

$$K_{14} = \frac{ch\,\varphi\sin\varphi + sh\,\varphi\cos\varphi}{D} \qquad K_{15} = \frac{2\,sh\,\varphi\sin\varphi}{D} \qquad K_{25} = \frac{ch\,\varphi\sin\varphi - sh\,\varphi\cos\varphi}{D}$$

sh = sinus hyperbolique. $\quad ch$ = cosinus hyperbolique.

Longueur d'une ondulation : $l_o = \frac{2\pi}{m}\sqrt{bh} \qquad \frac{2\pi}{m} = 4{,}888091.$

Si $\frac{l}{l_o} \geqq 1 \qquad K_{11} = K_{12} = K_{22} \cong 1 \qquad K_{14} = K_{15} = K_{25} \cong 0.$

Variation des coefficients d'influence K en fonction de la longueur du tube cylindrique

l/l_o	K_{11}	K_{12}	K_{22}	K_{14}	K_{15}	K_{25}
0,1	12,3273	7,6403	3,1878	12,0135	7,5745	1,5880
0,2	1,9741	2,0628	1,6287	1,3543	1,8042	0,7680
0,3	1,1164	1,1915	1,1786	0,2340	0,6479	0,4445
0,4	1,0098	1,0185	1,0354	— 0,0351	0,1935	0,2312
0,5	1,0037	1,0000	1,0037	— 0,0866	0	0,0866
0,6	1,0028	1,0015	1,0008	— 0,0645	— 0,0543	0,0102
0,7	1,0010	1,0011	1,0007	— 0,0310	— 0,0468	— 0,0158
0,8	1,0002	1,0003	1,0003	— 0,0084	— 0,0250	— 0,0165
0,9	1,0000	1,0000	1,0001	+ 0,0015	— 0,0082	— 0,0098
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	+ 0,0037	0	— 0,0037
1,1	1,0000	1,0000	1,0000	+ 0,0028	+ 0,0023	— 0,0004
1,2	1,0000	1,0000	1,0000	+ 0,0013	+ 0,0020	+ 0,0007

Le tableau ci-dessus montre que K_{11}, K_{12} et K_{22} convergent rapidement vers 1, tandis que la convergence de K_{14}, K_{15} et K_{25} vers 0 est plus lente. Le tube long est celui pour lequel les coefficients K_{14}, K_{15} et K_{25} peuvent être considérés comme négligeables. Ce cas se présente très souvent en pratique.

Variation de M et Y le long d'un tube long

$$M_x = \left(M_o - \frac{H_o}{\alpha}\right) e^{-\alpha x} \sin \alpha x + M_o\, e^{-\alpha x} \cos \alpha x$$

$$Y_x = k_{12}\left[- M_o\, e^{-\alpha x} \sin \alpha x + \left(M_o - \frac{H_o}{\alpha}\right) e^{-\alpha x} \cos \alpha x\right] - \frac{\nu V_o}{h} + \frac{b^2}{h}\, p$$

$$\alpha = \frac{m}{\sqrt{bh}} = \frac{1{,}285407}{\sqrt{bh}} \quad (\nu = 0{,}3)$$ x = distance de la face étudiée à la face 0 (fig. 2).

Valeurs de $e^{-\alpha x} \sin \alpha x$ et $e^{-\alpha x} \cos \alpha x$

αx	0°	7° 30′	15°	22° 30′	30°	37° 30′	45°	52° 30′
x/l_o	0	1/48	2/48	3/48	4/48	5/48	6/48	7/48
$e^{-\alpha x} \sin \alpha x$	0	0,11451	0,19920	0,25840	0,29619	0,31637	0,32239	0,31734
$e^{-\alpha x} \cos \alpha x$	1	0,86980	0,74344	0,62383	0,51302	0,41231	0,32239	0,24350
αx	60°	67° 30′	75°	90°	105°	120°	135°	150°
x/l_o	8/48	9/48	10/48	6/24	7/24	8/24	9/24	10/24
$e^{-\alpha x} \sin \alpha x$	0,30390	0,28443	0,26089	0,20788	0,15454	0,10664	0,06702	0,03647
$e^{-\alpha x} \cos \alpha x$	0,17546	0,11781	0,06990	0	— 0,04141	— 0,06157	— 0,06702	— 0,06317
αx	165°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
x/l_o	11/24	6/12	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12	1
$e^{-\alpha x} \sin \alpha x$	0,01453	0	— 0,01280	— 0,01313	— 0,00898	— 0,00461	— 0,00157	0
$e^{-\alpha x} \cos \alpha x$	— 0,05423	— 0,04321	— 0,02216	— 0,00758	0	0,00266	0,00273	0,00186

III. *Tableau des coefficients de déformation pour une coque plane (anneau), selon figure 3*

	M_o	H_o	M_n	H_n	V_o	p
Ω_o	$k_{11} = + \frac{12}{h^3}\left[\frac{c^2+a^2}{c^2-a^2} + \nu\right]$	$k_{12} = 0$	$k_{14} = -\frac{24\,ac}{h^3\,(c^2-a^2)}$	$k_{15} = 0$	$k_{16} = -\frac{c}{h^3} K_{16}$	$\psi_1 = -\frac{ac^2}{h^3}\eta_1$
Y_o	$k_{21} = 0$	$k_{22} = + \frac{(1+\nu)\,c^2 + (1-\nu)\,a^2}{h\,(c^2-a^2)}$	$k_{24} = 0$	$k_{25} = -\frac{2\,ac}{h\,(c^2-a^2)}$	$k_{26} = 0$	$\psi_2 = 0$
Ω_n	$k_{41} = -k_{14}$	$k_{42} = 0$	$k_{44} = -\frac{12}{h^3}\left[\frac{c^2+a^2}{c^2-a^2} - \nu\right]$	$k_{45} = 0$	$k_{46} = -\frac{c}{h^3} K_{46}$	$\psi_4 = -\frac{c^3}{h^3}\eta_4$
Y_n	$k_{51} = 0$	$k_{52} = -k_{25}$	$k_{54} = 0$	$k_{55} = -\frac{(1-\nu)\,c^2 + (1+\nu)\,a^2}{h\,(c^2-a^2)}$	$k_{56} = 0$	$\psi_5 = 0$
Z_n	$k_{61} = +k_{16}$	$k_{62} = 0$	$k_{64} = -k_{46}$	$k_{65} = 0$	$k_{66} = +\frac{c^2}{h^3} K_{66}$	$\psi_6 = +\frac{c^4}{h^3}\eta_6$

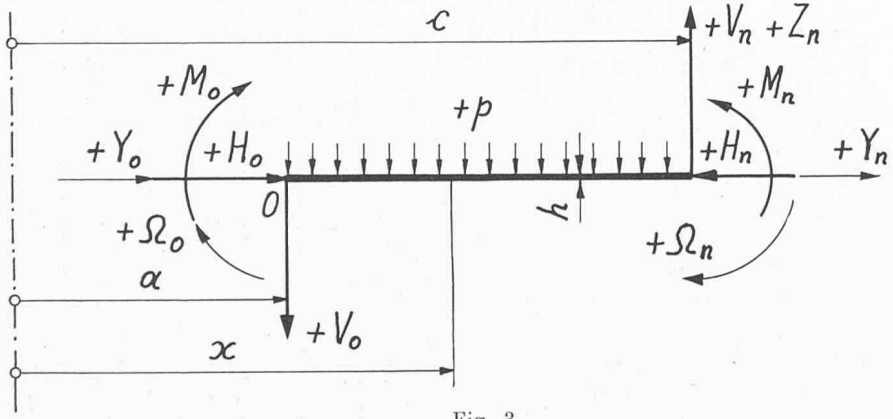


Fig. 3

Ce tableau se lit comme le tableau I.

Condition d'équilibre : $V_o + \frac{c^2-a^2}{2}\,p = V_n.$

Valeurs des coefficients d'influence des deux dernières colonnes

$$K_{16} = 12\left[\frac{1-\nu}{2}\,\frac{a}{c} + \frac{(1+\nu)\,ac}{c^2-a^2}\,\mathfrak{L}\,\frac{c}{a}\right] \qquad K_{46} = 12\left[\frac{1-\nu}{2} + \frac{(1+\nu)\,a^2}{c^2-a^2}\,\mathfrak{L}\,\frac{c}{a}\right]$$

$$K_{66} = 6\left[\frac{(1-\nu)\,(3+\nu)}{4}\,\frac{c^2-a^2}{c^2} + (1+\nu)^2\,\frac{a^2}{c^2-a^2}\left(\mathfrak{L}\,\frac{c}{a}\right)^2\right]$$

$$\eta_1 = \frac{3}{2}\left[3+\nu-(1-\nu)\,\frac{a^2}{c^2} - 4\,(1+\nu)\,\frac{a^2}{c^2-a^2}\,\mathfrak{L}\,\frac{c}{a}\right]$$

$$\eta_4 = \frac{3}{2}\left[1-\nu+(1+3\nu)\,\frac{a^2}{c^2} - 4\,(1+\nu)\,\frac{a^4}{c^2\,(c^2-a^2)}\,\mathfrak{L}\,\frac{c}{a}\right]$$

$$\eta_6 = \frac{3}{16}\left\{+(1-\nu)\,\frac{c^2-a^2}{c^2}\left[5+\nu-(7+3\nu)\,\frac{a^2}{c^2}\right] + 4\,(1+\nu)\,\frac{a^2}{c^2}\,\mathfrak{L}\,\frac{c}{a}\left[3+\nu-4\,(1+\nu)\,\frac{a^2}{c^2-a^2}\,\mathfrak{L}\,\frac{c}{a}\right]\right\}$$

$\mathfrak{L}$ = logarithme naturel.

Tableau des coefficients d'influence pour coque plane et pour $\nu = 0{,}3$

a/c	K_{16}	K_{46}	K_{66}	η_1	η_4	η_6
0,00	0	4,2000	3,4650	4,9500	1,0500	0,6956
0,05	2,5525	4,3171	3,6844	4,8888	1,0570	0,7151
0,10	4,0483	4,5628	3,9734	4,7581	1,0767	0,7498
0,15	5,1714	4,8812	4,2271	4,5858	1,1065	0,7851
0,20	6,0707	5,2461	4,4208	4,3849	1,1431	0,8132
0,25	6,8170	5,6417	4,5476	4,1635	1,1831	0,8296
0,30	7,4519	6,0576	4,6068	3,9267	1,2229	0,8313
0,35	8,0022	6,4863	4,6007	3,6782	1,2591	0,8172
0,40	8,4867	6,9227	4,5322	3,4207	1,2882	0,7869
0,45	8,9189	7,3630	4,4050	3,1559	1,3069	0,7414
0,50	9,3087	7,8044	4,2227	2,8853	1,3120	0,6819
0,55	9,6640	8,2447	3,9886	2,6100	1,3004	0,6106
0,60	9,9908	8,6825	3,7059	2,3308	1,2692	0,5301
0,65	10,2939	9,1165	3,3777	2,0481	1,2155	0,4435
0,70	10,5770	9,5459	3,0065	1,7625	1,1367	0,3543
0,75	10,8434	9,9701	2,5949	1,4743	1,0303	0,2664
0,80	11,0957	10,3885	2,1450	1,1837	0,8937	0,1838
0,85	11,3358	10,8009	1,6588	0,8909	0,7245	0,1110
0,90	11,5656	11,2071	1,1382	0,5960	0,5206	0,0528
0,95	11,7865	11,6067	0,5848	0,2990	0,2798	0,0141
1,00	12,0000	12,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Variation de M, H et Y en fonction du rayon x

$$M_x = \frac{A}{x} + Bx + Cx\,\mathfrak{L}x + Dx^3$$

$$A = \frac{ac\,(cM_o - aM_n)}{c^2 - a^2} + C\,\frac{a^2 c^2}{c^2 - a^2}\,\mathfrak{L}\,\frac{c}{a} - \frac{(3+\nu)\,a^2 c^2}{16}\,p$$

$$B = \frac{cM_n - aM_o}{c^2 - a^2} - C\,\frac{c^2\mathfrak{L}c - a^2\mathfrak{L}a}{c^2 - a^2} + \frac{(3+\nu)\,(c^2 + a^2)}{16}\,p$$

$$C = -\frac{(1+\nu)}{2}\,V_o + \frac{(1+\nu)\,a^2}{4}\,p$$

$$D = -\frac{3+\nu}{16}\,p$$

$$H_x = \frac{a\,(c^2 - x^2)}{x\,(c^2 - a^2)}\,H_o + \frac{c\,(x^2 - a^2)}{x\,(c^2 - a^2)}\,H_n$$

$$Y_x = \frac{a\,(c^2 - x^2)}{x\,(c^2 - a^2)}\,Y_o + \frac{c\,(x^2 - a^2)}{x\,(c^2 - a^2)}\,Y_n$$

Si $V_o = 0$ et $p = 0$ on a aussi

$$M_x = \frac{a\,(c^2 - x^2)}{x\,(c^2 - a^2)}\,M_o + \frac{c\,(x^2 - a^2)}{x\,(c^2 - a^2)}\,M_n$$

Cas particuliers d'une coque plane (plaque circulaire)

Il faut distinguer deux cas :

1er cas : la plaque circulaire sans trou au centre, $a = 0$.

2e cas : la plaque circulaire avec trou au centre très petit, $a \sim 0$.

Déformations et tensions communes aux deux cas :

$$\Omega_o = 0 \qquad Y_o = 0$$

$$\Omega_n = -\frac{12\,(1-\nu)}{h^3}\,M_n - \frac{3\,(1-\nu)\,c^3}{2h^3}\,p$$

$$Y_n = -\frac{1-\nu}{h}\,H_n$$

$$Z_n = +\frac{6\,(1-\nu)\,c}{h^3}\,M_n + \frac{3\,(1-\nu)\,(5+\nu)\,c^4}{16\,h^3}\,p$$

$$\varphi_n = \pm\frac{6\,M_n}{ch^2}$$

$$s_n = +\nu\,\varphi_n \mp \frac{h\,\Omega_n}{2\,c}$$

$$r_n = -\frac{H_n}{ch}$$

$$t_n = +\frac{Y_n}{c} + \nu\,r_n$$

Tensions différentes pour les deux cas :

1er cas : $a = 0$

$$\varphi_o' = \pm\frac{6\,M_n}{ch^2} \pm \frac{3\,(3+\nu)\,c^2}{8\,h^2}\,p$$

$$s_o' = \varphi_o'$$

$$r_o' = -\frac{H_n}{ch} \text{ (constante du centre au rayon } c\text{)}$$

$$t_o' = r_o'$$

2e cas : a très petit, mais non pas nul

$$\varphi_o'' = 0$$

$$s_o'' = 2\,s_o' \text{ (le double du 1er cas)}$$

$$r_o'' = 0$$

$$t_o'' = 2\,t_o' \text{ (le double du 1er cas)}$$

φ, r, s et t désignent les tensions radiales et circonférentielles dans la plaque, voir figure 5.

Les signes supérieurs correspondant aux tensions sous la plaque, les signes inférieurs, sur la plaque.

IV. *Tableau des coefficients de déformation pour une coque très courte, selon figure 4*

	M_o	H_o	M_n	H_n	V_o	$P = l\left(b - \frac{h}{2}\cos\beta\right)p$
Ω_o	$k_{11} = +\frac{b}{I}$	$k_{12} = -\frac{bl\cos\beta}{2I}$	$k_{14} = -\frac{b}{I}$	$k_{15} = -\frac{bl\cos\beta}{2I}$	$k_{16} = -\frac{bl\sin\beta}{I}$	$\eta_1 = -\frac{bl\sin^2\beta}{2I}$
Y_o	$k_{21} = +k_{12}$	$k_{22} = +\frac{b}{hl} + \frac{bl^2\cos^2\beta}{4I}$	$k_{24} = +\frac{bl\cos\beta}{2I}$	$k_{25} = -\frac{b}{hl} + \frac{bl^2\cos^2\beta}{4I}$	$k_{26} = +\frac{bl^2\sin\beta\cos\beta}{2I}$	$\eta_2 = +\frac{b\cos\beta}{hl} + \frac{bl^2\sin^2\beta\cos\beta}{4I}$
Ω_n	$k_{41} = -k_{14}$	$k_{42} = -k_{24}$	$k_{44} = -\frac{b}{I}$	$k_{45} = -\frac{bl\cos\beta}{2I}$	$k_{46} = -\frac{bl\sin\beta}{I}$	$\eta_4 = -\frac{bl\sin^2\beta}{2I}$
Y_n	$k_{51} = -k_{15}$	$k_{52} = -k_{25}$	$k_{54} = +k_{45}$	$k_{55} = -\frac{b}{hl} - \frac{bl^2\cos^2\beta}{4I}$	$k_{56} = -\frac{bl^2\sin\beta\cos\beta}{2I}$	$\eta_5 = +\frac{b\cos\beta}{hl} - \frac{bl^2\sin^2\beta\cos\beta}{4I}$
Z_n	$k_{61} = +k_{16}$	$k_{62} = +k_{26}$	$k_{64} = -k_{46}$	$k_{65} = -k_{56}$	$k_{66} = +\frac{bl^2\sin^2\beta}{I}$	$\eta_6 = +\frac{bl^2\sin^3\beta}{2I}$

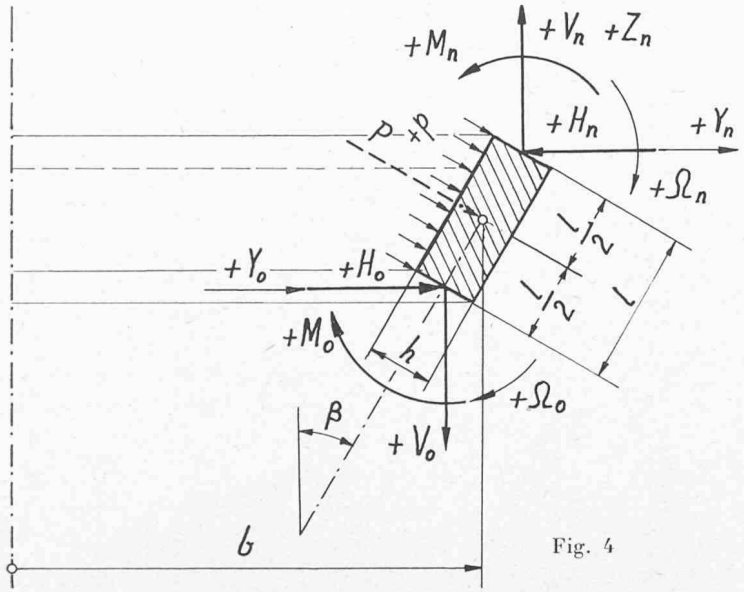


Fig. 4

Ce tableau se lit comme suit : $\Omega_o = k_{11} M_o + k_{12} H_o + k_{14} M_n + k_{15} H_n + k_{16} V_o + \eta_1 P$

Condition d'équilibre : $V_o + l\left(b - \frac{h}{2}\cos\beta\right) p \sin\beta = V_n$

$$I = \frac{h^3 l \sin^2\beta + h l^3 \cos^2\beta}{12}.$$

Pour dresser ce tableau, on a fait les hypothèses suivantes :

1° la section méridienne reste indéformable, $\Omega_o = \Omega_n$;
2° la longueur l et l'épaisseur h sont petites par rapport au rayon b ;
3° h et l sont du même ordre de grandeur ;
4° on peut avoir $h \gtreqless l$;
5° la contraction latérale est négligée ($\nu = 0$).

Ce tableau est non seulement valable pour une coque conique très courte, mais encore pour $\beta = 0$ et pour $\beta = \frac{\pi}{2}$.

(A suivre)