

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 86 (1960)
Heft: 4

Artikel: Étude expérimentale et théorique de la répartition des tensions dans les plaques circulaires fléchies d'épaisseur variable
Autor: Favre, Henry / Schumann, Walter / Martinola, Marzio
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64466>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)
de la Section genevoise de la S.I.A.
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole
polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: J. Calame, ing. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Groscurin, arch.; E. Martin, arch.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;
M. Renaud, ing.; Ch. Thévenaz, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: M. Bridel; J. Favre, arch.; R. Neeser, ing.; A. Robert, ing.;
J. P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION

Vacat
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Adresse: Case Chauderon 475, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 28.—	Etranger	Fr. 32.—
Sociétaires	»	» 23.—	»	» 28.—
Prix du numéro	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,
N° II. 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements
d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29,
Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:	
1/1 page	Fr. 290.—
1/2 »	» 150.—
1/4 »	» 75.—
1/8 »	» 37.50

Adresse: Annonces Suisses S. A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales



SOMMAIRE

Etude expérimentale et théorique de la répartition des tensions dans les plaques circulaires fléchies d'épaisseur variable, par
Henry Favre, Dr ès sc. techn., Walter Schumann, Dr ès sc. nat. et Marzio Martinola, Dr ès sc. techn.
Société genevoise des ingénieurs et des architectes: Rapport de gestion 1959.
Les Congrès. — Carnet des concours. — Avis à nos abonnés.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Nouveautés, informations diverses.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE DE LA RÉPARTITION DES TENSIONS DANS LES PLAQUES CIRCULAIRES FLÉCHIES D'ÉPAISSEUR VARIABLE

par

HENRY FAVRE
Dr ès sc. techn.
Professeur à l'E.P.F.

WALTER SCHUMANN
Dr ès sc. nat.
Privat-docent à l'E.P.F.

MARZIO MARTINOLA
Dr ès sc. techn.
Assistant à l'E.P.F.

Introduction

Dans un mémoire paru récemment¹, deux des trois auteurs ont exposé les résultats d'expériences — faites dans le Laboratoire de photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale — sur des modèles de *plaques circulaires fléchies, d'épaisseur constante*. Ils ont cherché, dans cette première étude, en interprétant les résultats donnés par la méthode du figeage des contraintes, à répondre aux trois questions: 1° quels sont les domaines où la théorie de Kirchhoff n'est pas applicable et comment y varient les tensions? 2° quelle est l'influence de l'épaisseur de la plaque sur la répartition générale des efforts intérieurs, lorsque le rapport de cette épaisseur au diamètre ne peut plus être considéré comme

petit? 3° enfin, quelles différences y a-t-il entre la répartition des tensions dans les plaques circulaires et celle des tensions dans les *poutres correspondantes* — c'est-à-dire dans les poutres de section rectangulaire ayant une portée et une hauteur respectivement égales au diamètre et à l'épaisseur de la plaque — et chargées par des forces analogues?

Dans une nouvelle étude, destinée à compléter la première et dont nous publions aujourd'hui les résultats, nous avons déterminé, également par la méthode du figeage des contraintes, la répartition des tensions dans *trois modèles de plaques circulaires d'épaisseur variable*. Comme précédemment, ces plaques étaient simplement appuyées le long du contour et supportaient, au centre, une force perpendiculaire aux faces, répartie sur une très petite surface. Les résultats ont été aussi comparés à ceux relatifs aux *poutres correspondantes*.

¹ Voir [1]. Les chiffres entre crochets se rapportent à la bibliographie placée à la fin de cette étude

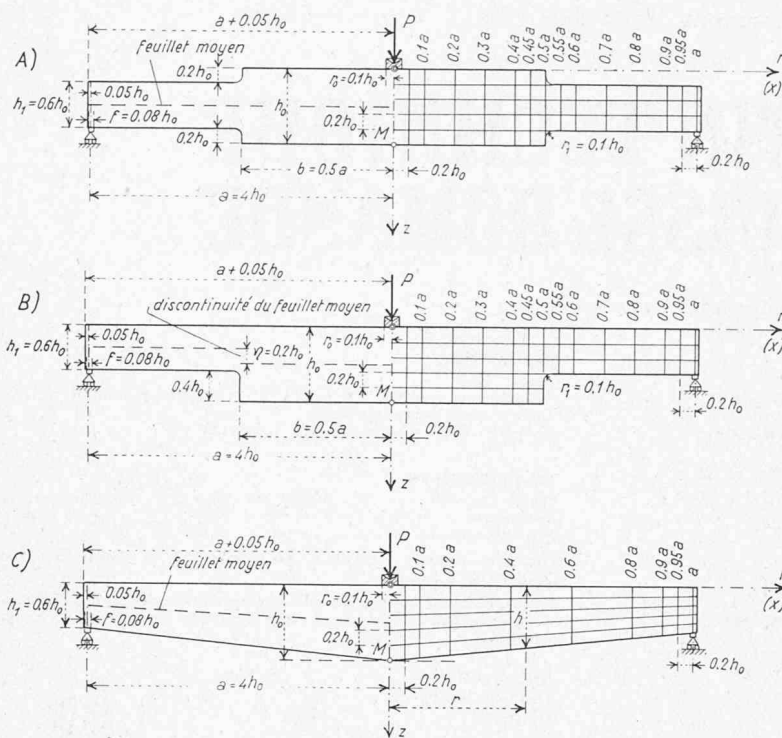


Fig. 1 A, B, C. — Coupe axiale des trois modèles de plaques étudiées (respectivement, vue des modèles des poutres correspondantes) précisant également les points situés aux intersections de deux systèmes de droites γ , où les tensions ont été déterminées ($a = 4 h_0$).

Les deux premières plaques accusaient une *variation brusque de l'épaisseur*, l'une sans discontinuité du feuillet moyen (fig. 1 A), l'autre avec discontinuité (fig. 1 B). Comme nous le verrons, l'examen de ces deux modèles — et des modèles des poutres correspondantes — nous a donné l'occasion de répondre à des questions analogues à celles posées ci-dessus. En outre, cet examen a permis de compléter les résultats d'expériences, également récentes, où *M. Martinola* a pu déterminer, par la méthode purement optique, les valeurs des moments dans des *plaques circulaires fléchies, d'épaisseur brusquement variable*². Ce procédé expérimental ne permet pas en effet d'étudier la répartition des tensions au voisinage d'une discontinuité de l'épaisseur et au voisinage des points d'application des forces, tandis que la méthode du figeage des contraintes permet de le faire dans de bonnes conditions. Les résultats obtenus à l'aide de la plaque représentée figure 1 B sont d'ailleurs utiles à un autre titre. Nous verrons en effet qu'ils confirment à nouveau l'exactitude des formules — établies dans le dernier mémoire cité — pour le calcul des efforts dans les plaques circulaires d'épaisseur brusquement variable, où le feuillet moyen subit lui-même une discontinuité³. Nous verrons également que les résultats donnés par la plaque de la figure 1 A confirment assez bien les formules établies à l'aide de la théorie de Kirchhoff.

La troisième des plaques étudiées accusait une *variation linéaire, donc continue, de l'épaisseur* (fig. 1 C). Son examen, par la méthode du figeage des contraintes, a permis de déterminer la répartition complète des tensions. A cette occasion, nous avons jugé utile d'établir une méthode de calcul, basée sur la théorie des coques, permettant d'obtenir les valeurs des efforts dans la plaque en question, à l'exception des zones voisines des forces extérieures appliquées.

Dans toute la partie expérimentale de la présente étude, nous avons utilisé les mêmes appareils et en principe la même technique de mesure et d'interprétation des résultats que dans notre travail précédent⁴. Nous ne décrirons donc pas à nouveau cette technique. Nous nous bornons, dans le § 1, à indiquer un perfectionnement récent que nous lui avons apporté. Dans le § 2, nous décrivons les modèles des trois plaques et des poutres correspondantes, et donnons pour chacun

d'eux les valeurs de la principale constante $\frac{1}{c}$, dont dépend la biréfringence accidentelle (rappelons que la grandeur c est elle-même la constante figurant dans la loi de Wertheim $\delta = ce(\sigma_1 - \sigma_2)$, où σ_1, σ_2 désignent, en élasticité bidimensionnelle, les tensions principales en un point d'une lame d'épaisseur e et où δ est la variation relative de marche de deux rayons polarisés traversant orthogonalement cette lame). Les résultats des mesures font l'objet du § 3. Dans le § 4, après avoir rappelé quelques-unes des relations établies par *M. Martinola* pour le calcul des moments dans les plaques circulaires fléchies d'épaisseur brusquement variable, nous établissons les formules — basées sur la théorie des coques — dont il a été question plus haut. Le § 5 est consacré à la discussion des résultats expérimentaux et à leur comparaison aux valeurs données par le calcul, et le § 6, à la démonstration d'un théorème d'élasticité, qui nous a été suggéré par les résultats des essais.

Cette étude, celle que nous avons rappelée au début de notre exposé, et d'autres recherches du Laboratoire de photoélasticité sur des sujets analogues, dont les résultats ont déjà été publiés⁵, ont pu être entreprises

² [2], p. 39 et suiv.

³ [2], p. 41 et suiv.

⁴ [1], §§ 1, 2 et 3.

⁵ Voir [3], [4], [5]. Signalons principalement le troisième de ces mémoires, où sont donnés les résultats de l'étude détaillée, par *W. Schumann*, d'une plaque carrée à l'aide de la méthode du figeage des contraintes, et où sont décrits plusieurs perfectionnements apportés à l'application de cette méthode.

et menées à bonne fin, grâce à une généreuse subvention du *Crédit pour les possibilités de travail*⁶. Les auteurs tiennent à exprimer ici à la Commission de gestion de ce Crédit l'expression de leur profonde gratitude.

Ils remercient également très chaleureusement la *Société anonyme Ciba*, à Bâle, de leur avoir une fois de plus livré gracieusement l'*Araldite B*, avec laquelle ont été exécutés les modèles des plaques et de certaines des poutres correspondantes (voir § 2).

§ 1. Sur un perfectionnement apporté à la détermination des lignes isoclines

Il est en général difficile d'obtenir des *lignes isoclines* précises, soit photographiquement, soit en cherchant à les dessiner sur une feuille de papier, en utilisant une chambre noire et un écran transparent. La plupart du temps, ce sont des bandes sombres plus ou moins larges et assez irrégulières qui se présentent à l'observateur et c'est avec une certaine peine qu'il peut en déduire la ligne cherchée. Une des principales causes de cette difficulté est le fait qu'il n'est jamais possible d'éliminer complètement les isochromes, même par l'emploi, en photographie, de films panchromatiques⁷.

En *photoélasticité bidimensionnelle*, on peut tourner la difficulté en utilisant un modèle spécial pour déterminer les isoclines, confectionné à l'aide d'une matière peu biréfringente, le *plexiglas* ou le *verre* par exemple. Si l'on maintient les forces extérieures au-dessous de certaines limites, seules les isoclines apparaissent. La difficulté est tout autre en *photoélasticité tridimensionnelle*, lorsqu'on applique la méthode du figeage des contraintes. Il ne serait en effet pas indiqué, dans ce cas, de procéder à l'aide de deux modèles d'*Araldite* que l'on chargerait, le premier avec de faibles forces en vue de la détermination des isoclines, le second avec de grandes forces pour le repérage des isochromes. Ces deux modèles subiraient en effet des déformations assez différentes et les résultats risqueraient d'être peu concordants⁸. En outre, l'influence des tensions latentes sur l'exactitude des résultats serait certainement beaucoup plus grande pour le premier modèle que pour le second.

En vue de perfectionner le repérage photographique des isoclines dans le cas des plaques circulaires, nous avons utilisé le procédé suivant, qui pourrait d'ailleurs être appliqué à d'autres états de tension. Considérons par exemple la *lame méridienne principale* et une *lame méridienne secondaire*⁹ du modèle de la plaque représentée figure 1 A, où les contraintes ont été figées avant d'y découper ces deux éléments. Supposons que l'épaisseur $\frac{e_0}{2}$ de la lame secondaire ait été choisie égale à la moitié de l'épaisseur e_0 de la lame principale. Plaçons, devant l'appareil photographique, la lame principale, qui restera fixe dans la suite, et successivement, en faisant coïncider deux faces, la lame méridienne secondaire, comme

l'indique la figure 2 a, puis cette même lame, conformément à la figure 2 b¹⁰. De cette façon, on aura d'abord, à droite l'épaisseur résultante $\frac{3}{2}e_0$ et à gauche l'épaisseur e_0 (fig. 2 a), puis le contraire (fig. 2 b). En exposant, dans l'appareil photographique, le même film pendant le même intervalle de temps devant chacun des deux dispositifs décrits, nous éliminerons presque entièrement les isochromes, celles-ci n'étant évidemment pas les mêmes dans les deux cas.

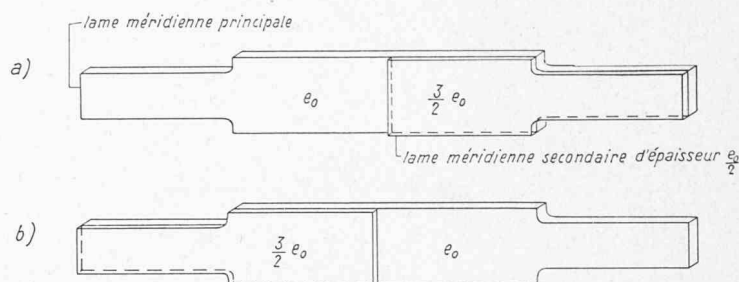


Fig. 2 a, b. — *Lame méridienne secondaire* de la plaque représentée fig. 1 A, placée successivement dans deux positions sur une *lame méridienne principale*, pour permettre de photographier les isoclines en éliminant les isochromes.

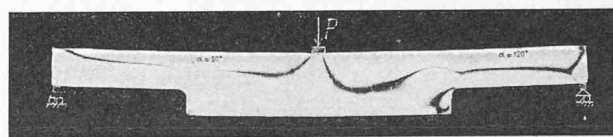


Fig. 3. — *Plaque* représentée figure 1 B. Isoclines $\alpha = 30^\circ$ et $\alpha = 120^\circ$ de la *lame méridienne principale*, photographiées selon le procédé décrit § 1.

La figure 3 montre la finesse des isoclines ainsi obtenues, pour la plaque de la fig. 1 B. Cette finesse s'est révélée largement suffisante pour l'exactitude que nous nous étions proposé d'atteindre. Ajoutons que nous avons utilisé pour ces essais un film *Agfa Repro A* et que le temps d'exposition de chacun des deux dispositifs a été de 5 minutes.

Remarque. La méthode décrite est tout à fait générale. Mais c'est évidemment surtout dans les cas où l'état de tension accuse une *symétrie de révolution* et dans ceux où cet état admet au moins un *plan de symétrie* que son application donnera les meilleurs résultats.

§ 2. Description des modèles. Valeurs de la constante $-\frac{1}{c}$.

Les figures 1 A, B et C, où $a = 4h_0$, donnent les *dimensions relatives* des trois modèles de plaques et des poutres correspondantes. Chacune de ces figures représente donc aussi bien la coupe axiale d'une plaque, que la vue de l'une de ces poutres. Toutes les longueurs y sont indiquées soit en fonction de l'épaisseur h_0 de la partie

¹⁰ Pour passer d'une position à l'autre, la lame secondaire devra donc tourner de 180° autour d'un axe vertical.

⁶ Subvention n° 557.

⁷ De très remarquables perfectionnements ont été cependant apportés, depuis une douzaine d'années, dans le repérage des isoclines. Il suffit, pour s'en rendre compte, de jeter un coup d'œil sur les belles photographies publiées dans différents ouvrages classiques, dans celui de M. M. Frocht [6] en particulier, ainsi que dans le livre très récent de L. Föppl et E. Mönch [7].

⁸ Au sujet de l'élimination des erreurs dues aux trop grandes déformations des modèles, voir [3].

⁹ La figure 2 du mémoire [1] définit ce qu'on entend par de telles lames.

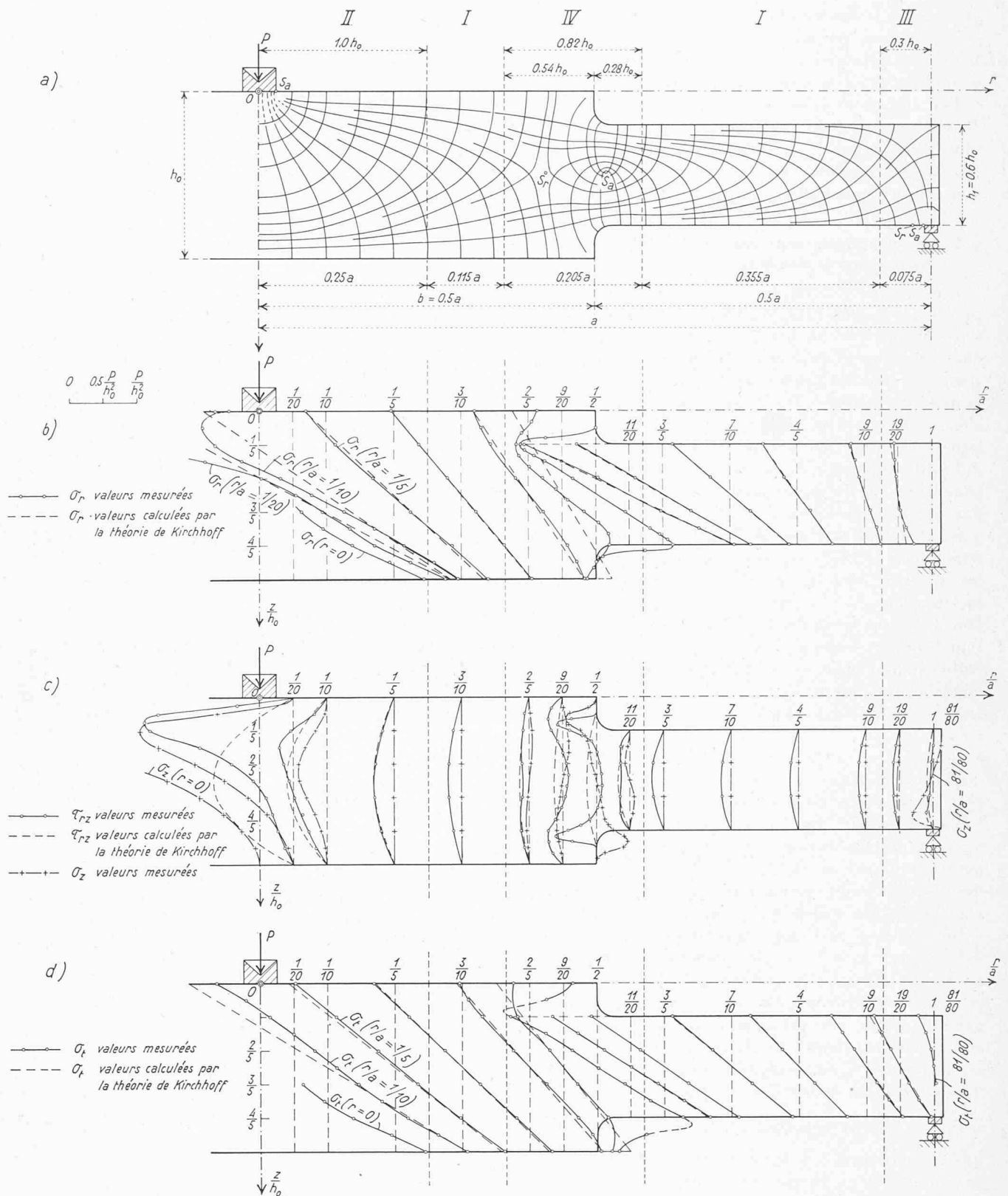


Fig. 5 a, b, c, d. — Modèle de la plaque figure 1 A.

a) Trajectoires des tensions principales b), c), d) Diagramme des tensions σ_r , σ_z , τ_{rz} et σ_t .

centrale, soit en fonction du rayon a du cercle d'appui. Les six modèles avaient la même épaisseur ou hauteur $h_0 = 2,5$ cm et le même rayon ou demi-portée $a = 10$ cm, ce qui définit leurs dimensions absolues.

Les trois figures citées montrent que le rayon des plaques, celui de leur partie centrale renforcée (fig. 1 A,

B) et celui du petit cercle de répartition de la force P , avaient les valeurs respectives $a + 0,05 h_0$, $b = 0,5 a$ et $r_0 = 0,1 h_0$. Elles montrent également que l'épaisseur h_1 le long du contour de toutes les plaques et la largeur f de la petite surface (couronne) d'appui étaient égales à $0,6 h_0$ et $0,08 h_0$. Ces figures précisent enfin le

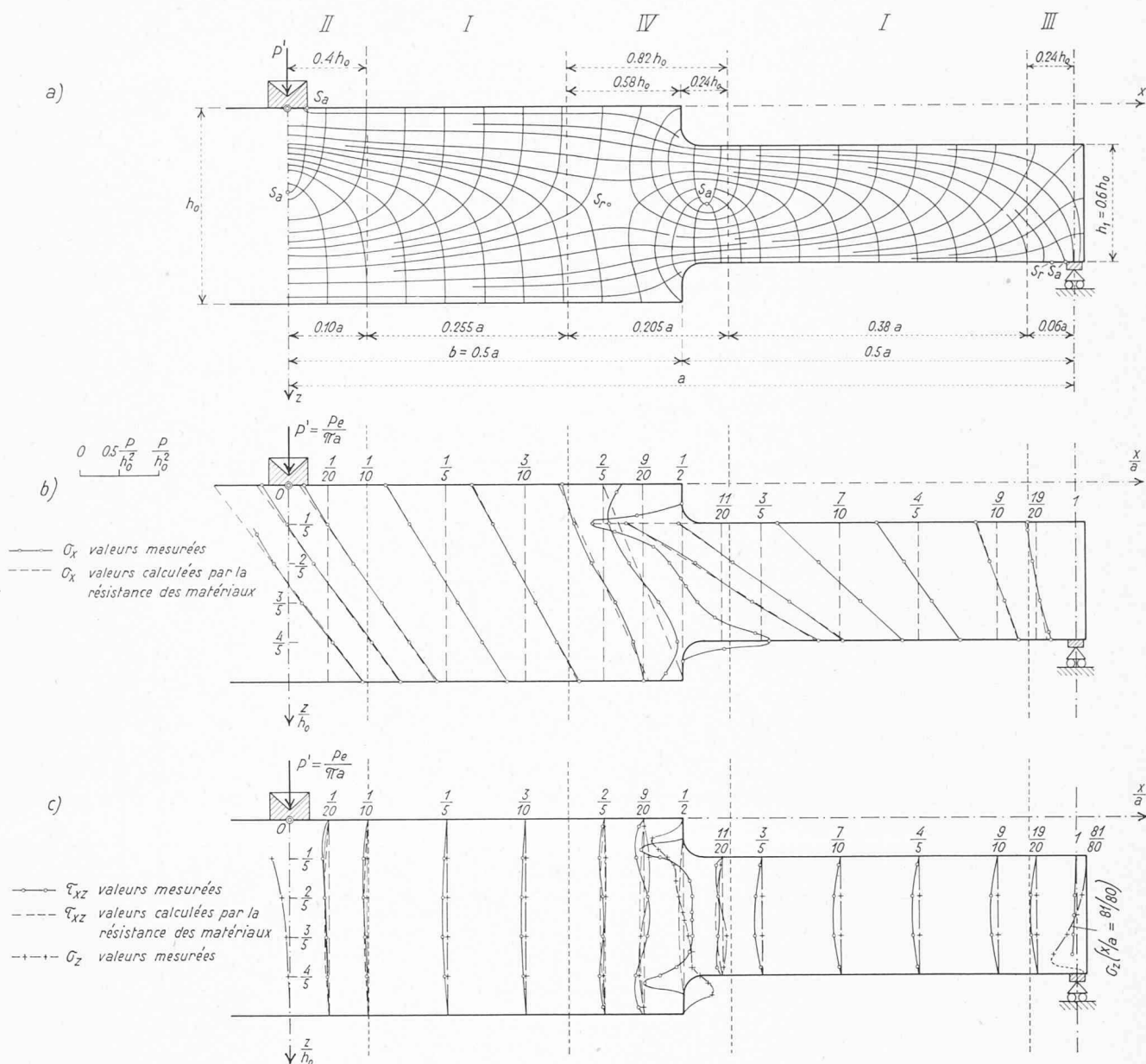


Fig. 6 a, b, c. — Modèle de la poutre figure 1 A.

a) Trajectoires des tensions principales b), c) Diagrammes des tensions σ_x , σ_z , et τ_{xz} .

système d'axes r, z (x, z pour les poutres) choisi, ainsi que le réseau de droites dont les intersections définissent les points où les tensions ont été évaluées.

Les modèles des *plaques* ont tous été exécutés avec de l'*Araldite B*. Par contre, pour les *poutres correspondantes*, on a choisi, comme matière des modèles :

1° pour mesurer les différences relatives de marche δ : l'*Allite CR39* dans le cas des figures 1 A et B, et l'*Araldite B* dans celui de la figure 1 C ¹¹ ;

2° pour déterminer les directions des tensions principales : le *plexiglas* (fig. 1 A et B) et le *verre* (fig. 1 C) ¹². Deux modèles de matières différentes ont été ainsi utilisés pour chaque poutre.

¹¹ Dans les deux premiers cas, cette mesure a été faite en procédant point par point, à l'aide d'un compensateur de Bravais, dans le troisième, en repérant les isochromes par photographie, sans avoir figé les contraintes.

¹² Pour les deux premières poutres, on a procédé point par point, en plaçant le modèle entre deux nicols croisés, pour la troisième, on a repéré les isoclines par photographie.

Le tableau I ci-dessous donne, pour les modèles de plaques et pour ceux des modèles de poutres ayant servi à mesurer δ , les valeurs de la constante $\frac{1}{c}$. Ces valeurs ont été déterminées à l'aide des plaques et des poutres elles-mêmes, selon la méthode décrite dans notre premier mémoire ¹³. Le tableau précise également les épaisseurs e (largeurs des sections rectangulaires) des modèles de poutres en question, ainsi que les valeurs des forces P (plaques) et P^* (poutres), appliquées sur les modèles.

Remarque. Comme précédemment, les valeurs obtenues pour les tensions étaient affectées d'une légère erreur due au poids propre du modèle. Une grande partie de cette erreur a été chaque fois éliminée en retranchant, des valeurs mesurées, les tensions correspondantes dues au poids propre, calculées par une méthode approchée.

¹³ [1], § 3.

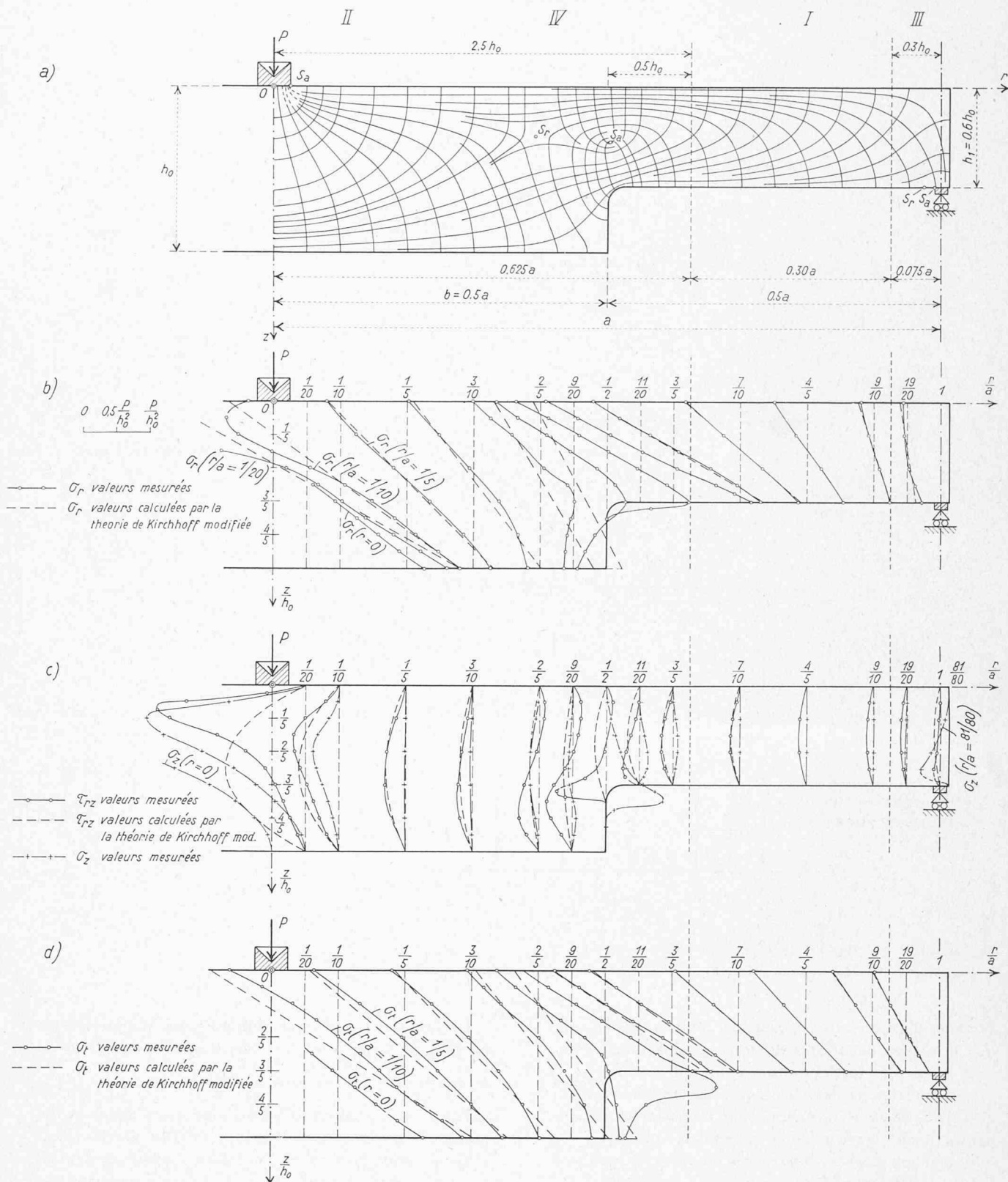


Fig. 7 a, b, c, d. — Modèle de la plaque figure 1 B.

a) Trajectoires des tensions principales b), c), d) Diagrammes des tensions σ_r , σ_z , τ_{rz} et σ_t .

§ 3. Résultats des mesures

Les figures 4 A, B, C sont des photographies des isochromes produites par les lames méridiennes principales, découpées dans les trois plaques. Les deux premières font bien ressortir la forte perturbation locale, engendrée par la discontinuité de l'épaisseur.

Pour représenter tous les résultats donnés par les expériences, nous utilisons des dessins et des diagrammes (fig. 5 à 10) analogues à ceux de nos premiers essais¹⁴. Sur trois pages de gauche successives (verso), nous donnons les résultats relatifs aux modèles

¹⁴ Comparer aux figures 13 à 18 du mémoire [1].

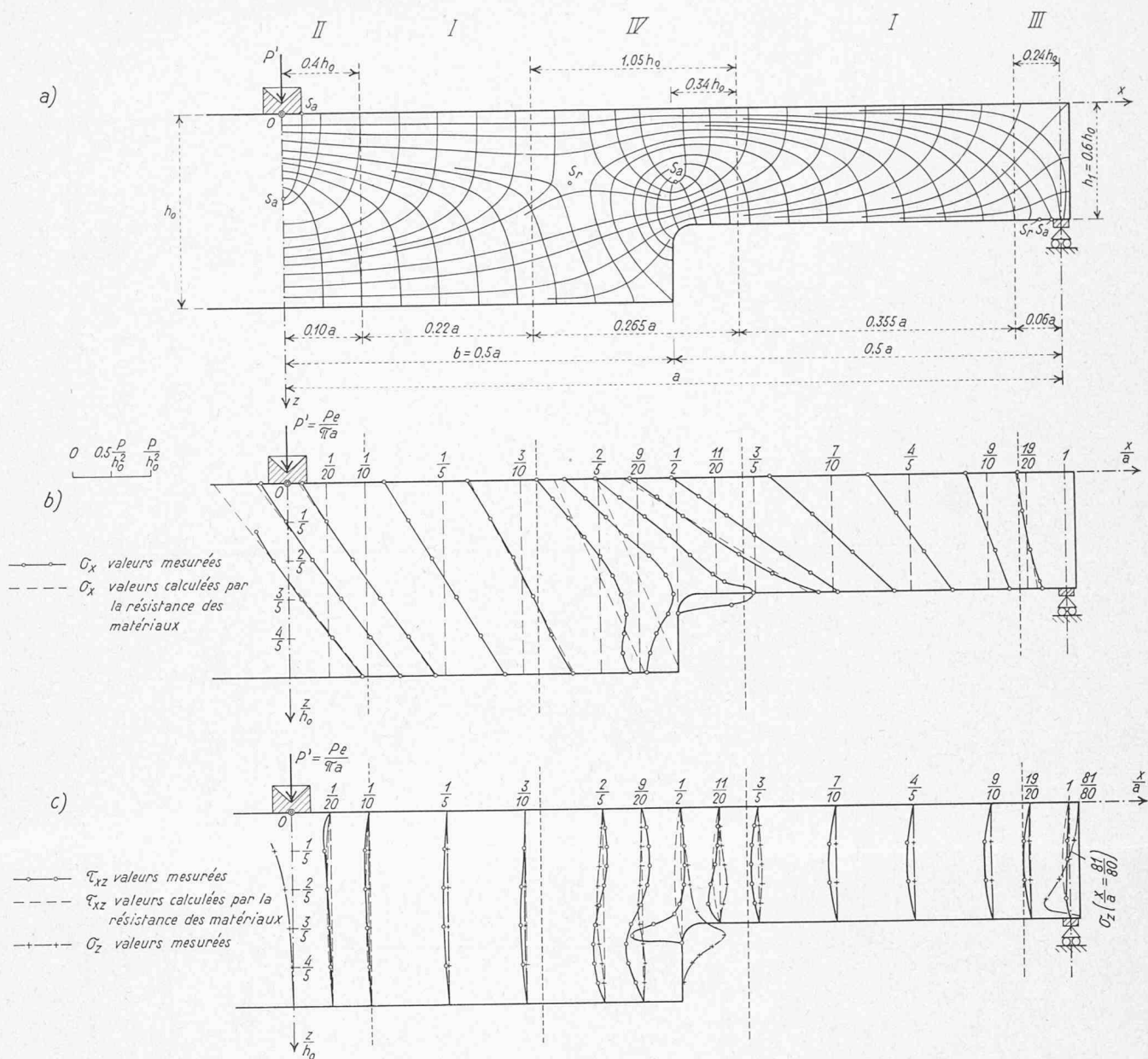


Fig. 8 a, b, c. — Modèle de la poutre figure 1 B.

a) Trajectoires des tensions principales b), c) Diagrammes des tensions σ_x , σ_z et τ_{xz} .

TABLEAU I

Grandeur des forces appliquées aux modèles de plaques et de poutres, valeurs de la constante $-\frac{1}{c}$ et de l'épaisseur e (largeur de la section rectangulaire) des modèles de poutres

Plaques circulaires (Araldite B)			Poutres simples correspondantes (modèles pour la mesure de δ)			
Modèle	Force effect. P	Constante $-\frac{1}{c}$	Matière des modèles	Epais- seur e	Force effect. P^e	Constante $-\frac{1}{c}$
Fig.	kg	$\text{kg}\lambda^{-1}\text{cm}^{-1}$		cm	kg	$\text{kg}\lambda^{-1}\text{cm}^{-1}$
1 A	7,27	0,2847	Allite CR 39	0,62	11,49	1,776
1 B	7,27	0,2855	Allite CR 39	0,63	11,49	1,755
1 C	7,27	0,3045	Araldite B (sans figeage des contraintes)	0,56	11,49	1,078

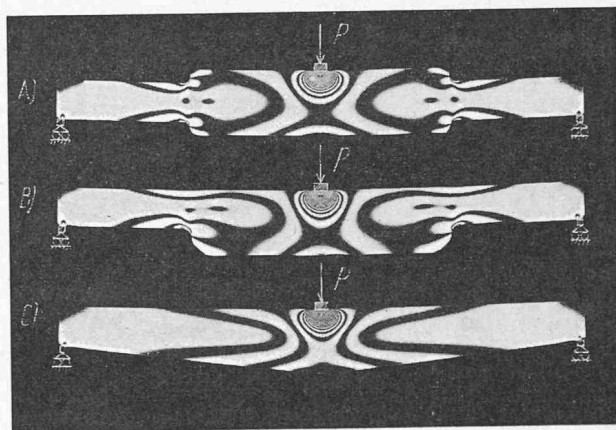


Fig. 4 A, B, C. — Photographie des isochromes des lames méridiennes principales des trois plaques étudiées (épaisseurs des lames: $e_A = 3,28$ mm, $e_B = 3,17$ mm, $e_C = 3,40$ mm, $P = 7,27$ kg).

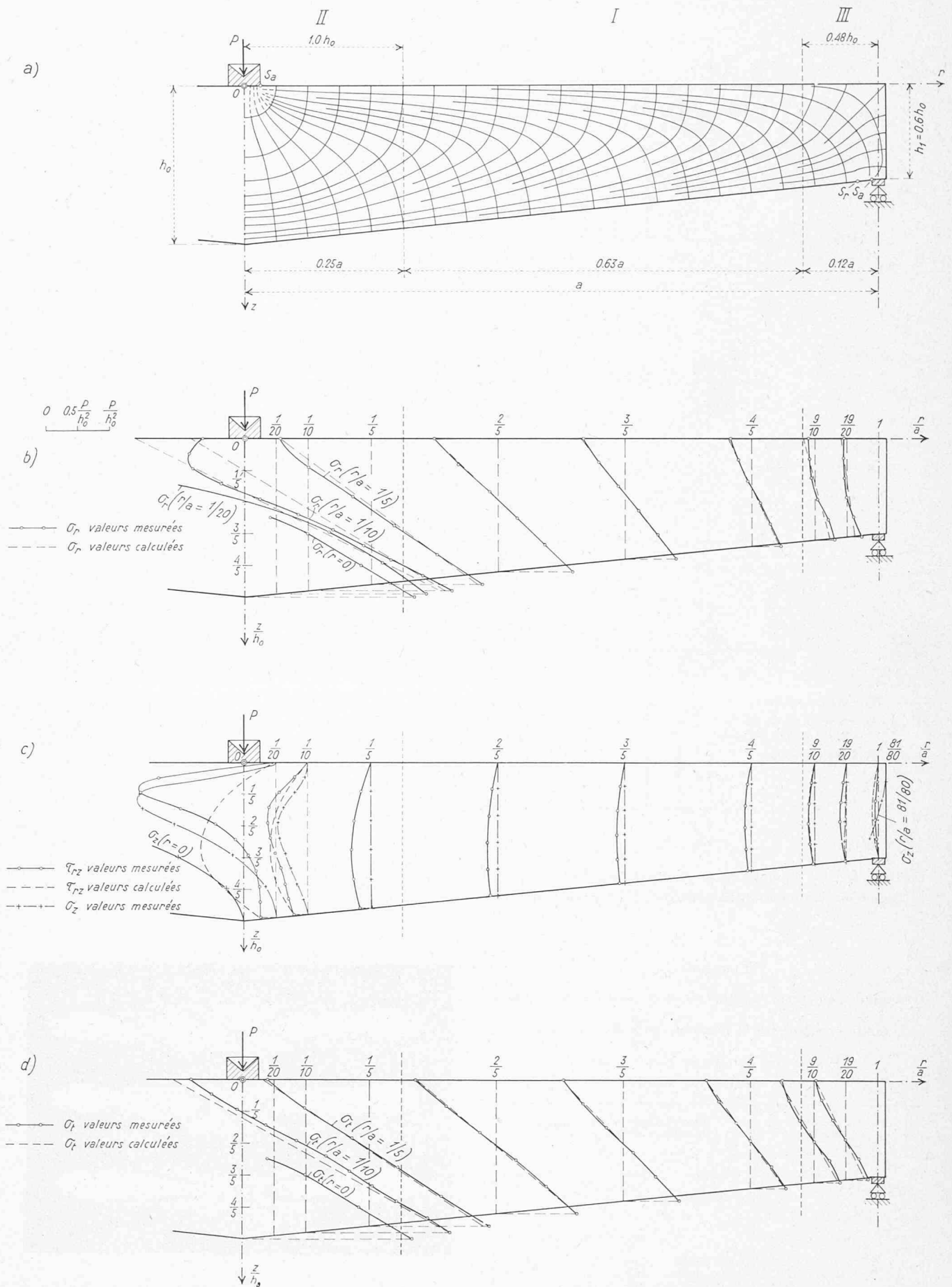


Fig. 9 a, b, c, d. — Modèle de la plaque figure 1 C.

a) Trajectoires des tensions principales b), c), d) Diagrammes des tensions σ_r , σ_z , τ_{rz} et σ_t .

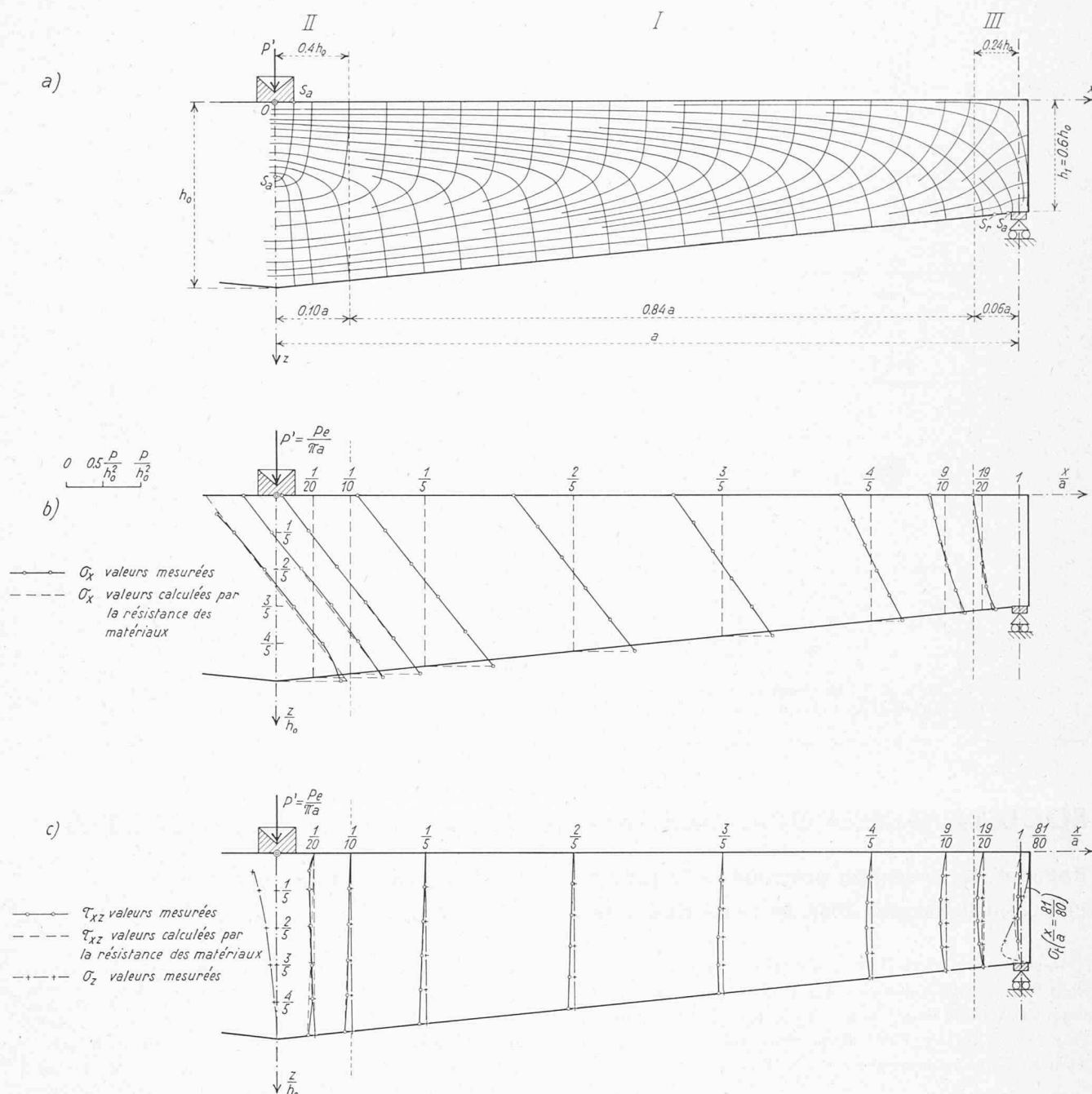


Fig. 10 a, b, c. — Modèle de la poutre figure 1 C.
a) Trajectoires des tensions principales b), c) Diagrammes des tensions σ_x , σ_z et τ_{xz} .

de plaques (fig. 5, 7, 9) et sur les pages de droite leur faisant vis-à-vis (recto), ceux relatifs aux modèles de poutres correspondantes (fig. 6, 8, 10).

Dans chacune de ces six pages, on a représenté, en haut, les trajectoires des tensions principales, et en dessous, les diagrammes des tensions σ_r , σ_z , τ_{rz} , σ_t (plaques) ou σ_x , σ_z , τ_{xz} (poutres). Les valeurs des tensions ont été reportées en choisissant P/h_0^2 comme unité. Pour dessiner les diagrammes relatifs aux poutres,

on a supposé qu'une force $P' = \frac{Pe}{\pi a}$ agissait au milieu

de la portée, e désignant l'épaisseur (largeur de la section rectangulaire) et P , la force appliquée au centre

de la plaque correspondante. Ce choix a été justifié dans notre premier mémoire¹⁵.

Dans les figures 11 A, B, nous donnons en outre les diagrammes des tensions aux bords des plaques et poutres d'épaisseur brusquement variable.

Les résultats contenus dans toutes ces figures seront commentés seulement au § 5, lorsque nous aurons préalablement rappelé, ou établi, des formules permettant de faire un calcul approché des tensions (§ 4). La comparaison des valeurs expérimentales aux valeurs théoriques facilitera en effet la discussion. Elle montrera aussi dans quelle mesure les formules en question sont applicables.

¹⁵ [1], § 4.

(à suivre)

