

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 86 (1960)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Les déformations héréditaires  
**Autor:** Colonnetti, Gustavo  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64495>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

## ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes  
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)  
de la Section genevoise de la S.I.A.  
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique  
de l'Université de Lausanne)  
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole  
polytechnique fédérale de Zurich)

## COMITÉ DE PATRONAGE

Président: J. Calame, ing. à Genève  
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne  
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève

### Membres:

Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.  
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosurin, arch.; E. Martin, arch.  
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.  
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.  
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;  
M. Renaud, ing.; Ch. Thévenaz, arch.

## CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »

Président: D. Bonnard, ing.  
Membres: M. Bridel; J. Favre, arch.; R. Neeser, ing.; A. Robert, ing.;  
J. P. Stucky, ing.  
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

## RÉDACTION

### Vacat

Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »  
Tirés à part, renseignements  
Adresse: Case Chauderon 475, Lausanne

## ABONNEMENTS

1 an . . . . .	Suisse	Fr. 28.—	Etranger	Fr. 32.—
Sociétaires . . . . .	»	» 23.—	»	» 28.—
Prix du numéro . . . . .	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,  
N° II. 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements  
d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29,  
Lausanne

## ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page . . . . .	Fr. 290.—
1/2 » . . . . .	» 150.—
1/4 » . . . . .	» 75.—
1/8 » . . . . .	» 37.50

Adresse: Annonces Suisses S. A.  
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales



## SOMMAIRE

Les déformations héréditaires, par Gustavo Colonnetti, président émérite du Conseil national italien de la Recherche.  
L'actualité aéronautique (XXI).  
Les congrès: Union des Centrales suisses d'Electricité et Association suisse des Electriciens.  
Bibliographie. — Documentation générale. — Informations diverses.

## LES DÉFORMATIONS HÉRÉDITAIRES <sup>1</sup>

par GUSTAVO COLONNETTI, président émérite du Conseil national italien de la Recherche

On sait depuis longtemps que des phénomènes irréversibles, connus sous le nom d'hystérésis, de plasticité, de fluage, de relaxation, d'écrouissage, se manifestent dans les corps naturels lorsque ceux-ci se déforment sous l'action de sollicitations dépassant certaines limites; mais aucune théorie mathématique n'avait jamais été conçue qui les encadrât.

Cela est devenu possible seulement à la suite des derniers développements d'une théorie générale des déformations très petites qui va désormais prendre sa place à côté de la théorie classique de l'élasticité.

Dans cette théorie on abandonne le slogan de la correspondance biunivoque entre efforts et déformations, slogan sur lequel repose la théorie classique. On y admet que la déformation dans un instant quelconque n'est plus seulement fonction des valeurs actuelles des efforts, mais dépend aussi des valeurs les ayant précédés dans le temps. Et voilà que, non seulement on arrive à une interprétation rationnelle des phénomènes d'hystérésis

que la théorie de l'élasticité n'aurait jamais pu expliquer, mais on parvient aussi à se rendre raison de ces variations des constantes élastiques que la théorie classique n'aurait jamais pu admettre sans se renier elle-même, variations qui témoignent des véritables changements d'état de la matière.

Or, admettre que la déformation dans un instant quelconque soit fonction non seulement des valeurs actuelles des efforts mais aussi de celles qui les ont précédés dans le temps, c'est inscrire les phénomènes dont il s'agit dans le cadre des phénomènes héréditaires; d'où la nécessité de faire recours à la théorie mathématique de l'hérédité.

Cette théorie remonte aux premières années du siècle, quoique à cette époque tout le monde ne fût pas d'accord au sujet de son applicabilité aux problèmes de la physique mathématique.

Dans un chapitre de son ouvrage *De la méthode dans les sciences*, chapitre consacré à la mécanique, M. Painlevé affirmait qu'il n'y avait pas de vrais problèmes de nature héréditaire. Ceux qui se présentent sous cet

<sup>1</sup> Conférence donnée à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne, le 20 février 1960.

aspect n'auraient été, à son avis, que des problèmes destinés à disparaître dès que nos connaissances sur la constitution des corps seraient devenues plus complètes.

Mais, à l'état actuel de nos connaissances scientifiques, ces problèmes se présentent effectivement et avec une fréquence toujours plus grande. Il est donc nécessaire de les résoudre.

Déjà en 1907 M. Picard, dans un article « Sur la Mécanique classique et ses approximations successives », affirmait la nécessité de distinguer la mécanique en deux branches : celle de l'hérédité et celle de la non-hérédité.

Celle-ci se rapporte au cas où l'avenir d'un système ne dépend, à un instant donné, que de son état actuel ; ou, d'une manière plus générale (si on regarde les forces comme pouvant dépendre aussi des vitesses), de l'état actuel et de l'état infiniment voisin qui l'a précédé.

La mécanique de l'hérédité correspond au contraire au cas où chaque action laisse un héritage dans le système, et l'état actuel dépend de toute l'histoire précédente.

Cette distinction n'avait toutefois pu amener à une étude systématique, faute de méthodes analytiques s'y prêtant.

Nous devons à un grand mathématicien italien, M. Vito Volterra, l'idée de mettre les questions physiques qui se rapportent aux problèmes de l'hérédité en rapport avec certaines classes d'équations intégrodifférentielles, pour lesquelles il avait obtenu depuis 1887 un développement en série tout à fait analogue à celui de Taylor.

Dans un mémoire très remarquable, publié en 1910,<sup>1</sup> M. Volterra a mis en évidence que, par leur nature, les problèmes de la physique mathématique et de la mécanique non héréditaire peuvent toujours se faire dépendre des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Les données initiales constituent les constantes arbitraires ou les fonctions arbitraires qui paraissent dans l'intégration.

Pour les problèmes de la physique mathématique de l'hérédité, au contraire, l'analyse des équations différentielles n'est plus suffisante. En effet, l'état actuel du système dépend de son histoire, et celle-ci est individualisée par toutes les valeurs prises par des paramètres pendant une certaine période de temps ; d'où la nécessité d'envisager des quantités qui dépendent de toutes les valeurs de ces paramètres regardés comme des fonctions du temps.

On est ainsi amené à l'analyse des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions — fonctions des lignes ou des hyperespaces — et M. Volterra a démontré, dans son mémoire, que grâce au développement en série analogue à celui de Taylor, la question se présente comme une extension tout à fait naturelle de la résolution des systèmes des équations algébriques de premier degré lorsque le nombre des équations et des inconnues croît indéfiniment.

C'est ainsi que M. Volterra a pu déduire, de l'étude de l'équation intégrodifférentielle du genre elliptique, les lignes générales d'une théorie analytique des phénomènes héréditaires sans particulariser les fonctions qui les caractérisent.

<sup>1</sup> VITO VOLTERRA : Sur les équations intégrodifférentielles et leurs applications. Acta mathematica, tome 35.

En effet, comme dans les questions ordinaires de la physique mathématique, il est utile de laisser indéterminées les constantes autant qu'il est possible, et de ne les fixer numériquement que lorsqu'on applique les formules à des questions concrètes ; de même il est utile de laisser indéterminées les fonctions qui caractérisent les phénomènes héréditaires lorsqu'on traite des questions d'hérédité en général, en résolvant les problèmes qui se présentent avec la plus grande généralité possible.

On pourra toujours déterminer ces fonctions, lorsqu'elles sont inconnues, en comparant les solutions générales que l'on obtient avec les résultats de l'observation directe.

Pour représenter les grandeurs qui dépendent de toutes les valeurs qu'une fonction  $\alpha$  du temps peut prendre dans un intervalle de temps  $(0, T)$ , Volterra avait choisi une fonction qu'il écrivait génériquement sous la forme

$$F \left[ \left[ \alpha_0^T(t) \right] \right].$$

Nous l'adopterons pour représenter une quelconque des caractéristiques de la déformation à un instant  $T$  donné, admettant avec lui que (certaines conditions étant satisfaites) la dite fonction peut être développée en une série analogue à celle de Taylor, et que dans cette série les termes d'ordre supérieur au premier sont négligeables.

C'est ce que Volterra appelait l'hérédité linéaire.

Si l'on choisit comme origine des temps l'instant où se situe la première application des forces extérieures, et si l'on suppose que, à cet instant, chaque élément du corps est dans son état naturel non déformé, une quelconque des caractéristiques de la déformation à l'instant  $T$  pourra s'exprimer comme la somme de deux termes :

la *déformation élastique*, que nous dénoterons ici génériquement avec la lettre  $\varepsilon$ , et qui est toujours, par définition, une fonction linéaire de l'état de tension ;

et la *déformation plastique*, qu'on dénotera toujours avec la même lettre grecque surlignée, dans l'expression de laquelle

$$\bar{\varepsilon}(T) = \int_0^T \alpha(t) f(T, t) dt$$

la fonction  $f$  représente ce que Volterra a appelé d'une manière générale le *coefficient d'hérédité*.

Il est facile d'en donner l'interprétation physique.

Ce coefficient est en effet, à chaque instant, égal au rapport entre la vitesse d'augmentation de la déformation plastique et la valeur de la fonction  $\alpha$ .

C'est ce qui nous suggère de donner à la fonction  $\alpha$  le nom de *fonction déterminante* des déformations plastiques.

Il s'agit à présent de formuler quelques hypothèses raisonnables sur la forme des deux fonctions  $\alpha$  et  $f$ .

Nous supposerons  $\alpha$  linéaire dans le temps, c'est-à-dire

$$\alpha = c t$$

$c$  étant une constante arbitraire. C'est une hypothèse qui pourrait à première vue paraître très limitative ;

la suite de notre discours démontrera qu'elle ne nous empêche pas d'envisager et de résoudre un grand nombre de problèmes parmi les plus intéressants dans le vaste domaine des applications techniques.

Quant au coefficient d'hérédité, nous le supposons lié à la fonction déterminante — et, par celle-ci, lié au temps — par une relation du type

$$f = a_1 + a_2 \alpha + a_3 \alpha^2 + \dots$$

où les coefficients  $a$  sont des constantes dont la valeur peut varier avec les caractéristiques du matériau et avec la vitesse de déformation qu'on lui impose.

Dans ces hypothèses, la déformation plastique à l'instant  $T$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(T) &= \int_0^T c t (a_1 + a_2 c t + a_3 c^2 t^2 + \dots) dt = \\ &= a_1 c \frac{T^2}{2} + a_2 c^2 \frac{T^3}{3} + a_3 c^3 \frac{T^4}{4} + \dots = \\ &= \frac{a_1}{2c} \alpha^2(T) + \frac{a_2}{3c} \alpha^3(T) + \frac{a_3}{4c} \alpha^4(T) + \dots \end{aligned}$$

Il va sans dire que les hypothèses que nous avons adoptées, et desquelles nous avons déduit ces expressions de la déformation plastique, sont tout à fait arbitraires.

Leur choix sera justifié *a posteriori* si la théorie physique qui en découle nous offre la possibilité de coordonner entre eux des phénomènes qui jusqu'ici se présentaient isolés et dépourvus de rapports avec les autres phénomènes connus<sup>1</sup>.

Il faut dire tout de suite que deux cas se présentent en pratique, qui exigent différents choix de la fonction déterminante.

En effet, si l'intervention des déformations plastiques se vérifie sous l'action de forces extérieures appliquées au corps, et des tensions intérieures que celles-ci font naître dans les différents points du corps, on choisira comme fonction déterminante une des caractéristiques de la déformation élastique.

Au contraire, lorsqu'il s'agira d'étudier un état de coaction déterminé par des déformations imposées, on choisira comme fonction déterminante une des caractéristiques de la déformation totale.

Quant au coefficient d'hérédité, une distinction s'impose selon que les termes variables avec le temps sont, ou ne sont pas, négligeables par rapport au terme constant.

Dans le premier cas — c'est-à-dire lorsque le coefficient d'hérédité est, ou peut être considéré, constant — les déformations envisagées seront de simples changements de forme et de dimensions.

Le cas du coefficient variable va, au contraire, nous permettre d'envisager des phénomènes où la variation de forme et de dimensions est accompagnée par des changements de l'état physique du corps.

Cette distinction est d'importance fondamentale.

C'est en effet — à ma connaissance — la première fois qu'on a la possibilité de caractériser analytiquement par une différente forme d'une fonction (le coefficient d'hérédité) les deux classes de phénomènes : ceux qui — comme l'hystérésis à cycles fermés — admettent un retour de la matière à l'état initial ; et ceux qui — comme la relaxation ou l'érouissage — sont décidément irréversibles.

Il va de soi que l'étude des phénomènes de la première classe est nécessairement subordonnée au choix d'un état initial bien défini et facile à reproduire. Tel est d'ailleurs tout état neutre tel qu'on peut l'obtenir par la méthode bien connue des sollicitations alternées décroissantes.

En partant d'un tel état, la loi de variation des déformations plastiques, pour des sollicitations et donc des déformations élastiques croissantes linéairement avec le temps, sera représentée, avec une très bonne approximation, par une parabole tangente, à l'origine des axes, à la droite qui traduit graphiquement la loi de Hooke.

L'équation de cette parabole se déduit de la dernière des équations générales dont nous venons de parler, en choisissant comme fonction déterminante la déformation élastique et en négligeant, dans le développement en série, les termes d'ordre supérieur.

On peut donc l'écrire sous la forme

$$\bar{\epsilon} = k \epsilon^2 \quad \left( k = \frac{a_1}{2c} \right).$$

Analoguement, après inversion du sens de variation de la sollicitation — et plus généralement toutes les fois que la sollicitation varie périodiquement à vitesse constante entre des limites bien déterminées — la loi de variation des déformations plastiques sera représentée par d'autres paraboles du type

$$\bar{\epsilon}' = k' \epsilon'^2$$

où la condition du cycle fermé exige qu'on ait

$$k' = \frac{1}{2} k.$$

L'expression plus générale du coefficient d'hérédité devra au contraire être utilisée dans l'étude des problèmes de la deuxième classe, c'est-à-dire des phénomènes irréversibles.

La loi de variation des déformations plastiques sera alors exprimée par une équation du type

$$\bar{\epsilon} = k_1 \epsilon^2 + k_2 \epsilon^3 + k_3 \epsilon^4 + \dots$$

Deux cas peuvent alors se présenter, selon que l'ensemble des termes d'ordre supérieur est positif ou négatif.

Dans le premier cas, la courbe représentative du phénomène, après avoir suivi de près pendant un certain temps la parabole dont nous avons parlé, s'en éloignera pour se diriger plus ou moins rapidement vers l'axe des déformations (Fig. 1).

Cette allure traduit bien celle que les techniciens appellent la relaxation du matériau, c'est-à-dire la ménomation progressive de la résistance — ou si vous

<sup>1</sup> GUSTAVO COLONNETTI: *Elastoplasticità. Saggio di interpretazione delle deformazioni plastiche come fenomeni ereditarij*. Pontificiae Academiae scientiarum scripta varia n. 19 (1960).

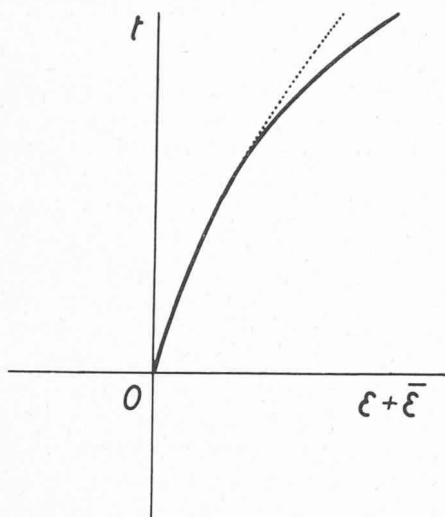


Fig. 1.

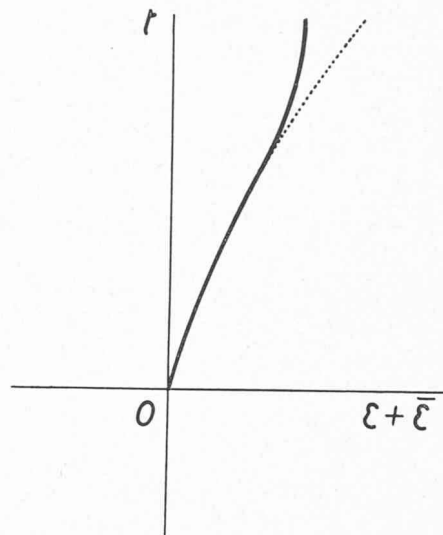


Fig. 2.

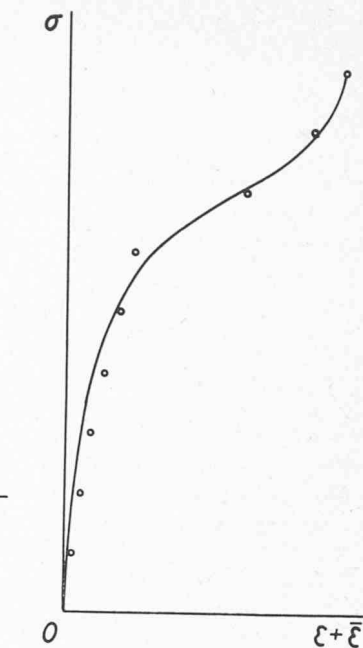


Fig. 3.

le préférez : la plus grande déformabilité — que certains matériaux présentent lorsqu'ils sont déformés plastiquement.

Si au contraire l'ensemble des termes d'ordre supérieur est négatif, la courbe représentative du phénomène s'éloignera de la parabole du côté opposé, et se dirigera vers l'axe des forces (ou des temps) (Fig. 2).

C'est le cas de l'écroutissement ou augmentation de la résistance — dans le sens d'une moindre déformabilité — qui se produit dans certains corps lorsque les déformations plastiques croissent au-delà d'une certaine limite.

Voici un exemple où la correspondance entre les déductions théoriques et les résultats de l'expérience est particulièrement significative.

Un fil d'acier de 1,9 mm de diamètre a été soumis à l'action d'un effort de traction croissant dans le temps en raison de deux kilogrammes par seconde. Les déformations ont été mesurées, sur 60 mm de longueur, par un extensomètre Amsler qui permet d'évaluer le centième de millimètre.

Les résultats de ces mesures sont représentés dans la figure 3 par de petits cercles, et interprétés par la courbe qui correspond à l'équation

$$\bar{\epsilon} = k_2 \epsilon^3 + k_4 \epsilon^5 + k_6 \epsilon^7$$

dont les coefficients ont été déterminés de manière à rendre minimales les écarts entre la fonction et les résultats de l'expérience.

Il faut dire que l'opération est assez délicate ; elle a été conduite à bon terme par la machine FINAG de l'Institut national pour les applications du calcul à Rome, avec laquelle on a pu pousser la précision des calculs jusqu'au dix-huitième chiffre décimal. Mais le résultat est tellement satisfaisant qu'aucun doute ne peut raisonnablement subsister sur la validité de notre interprétation du phénomène.

Je veux vous présenter un autre exemple, qui se rapporte à un tout autre chapitre de la résistance des matériaux.

Il s'agit cette fois d'un prisme en béton, auquel on impose une déformation croissant lentement avec le temps.

C'est donc la déformation totale (et non plus la déformation élastique) qu'on choisira comme fonction déterminante. La courbe représentative, si le coefficient d'hérédité était constant, serait encore une parabole, mais placée comme celle pointillée dans la figure 4.

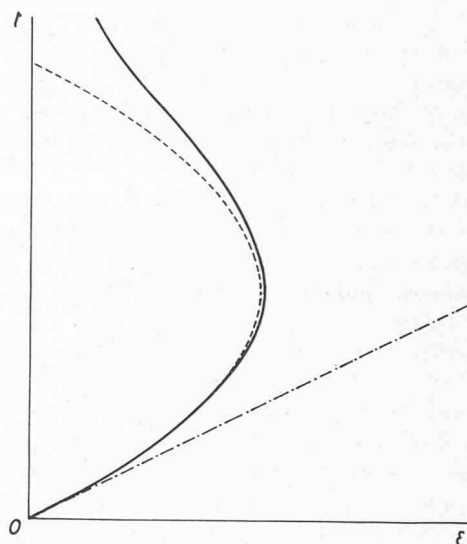


Fig. 4.

Avec un coefficient d'hérédité variable, elle prend des allures du genre de celle tracée dans la même figure par une ligne pleine, et s'éloigne de la parabole plus ou moins en raison de la plus ou moins grande importance des termes d'ordre supérieur.

On peut ainsi réaliser des courbes qui s'approchent autant qu'on veut de celles qu'on obtient expérimentalement sur les différents bétons, en faisant varier la vitesse de déformation entre les plus larges limites.

Voyez par exemple la figure 5 qui se trouve dans un rapport de M. Rusch et dont j'aurai l'occasion de reparler d'ici peu.

Les quatre courbes que vous y voyez ont été obtenues avec des vitesses de déformation très différentes :

- un pour mille par minute ;
- un pour mille par heure ;
- un pour mille par jour ;
- un pour mille en cent jours.



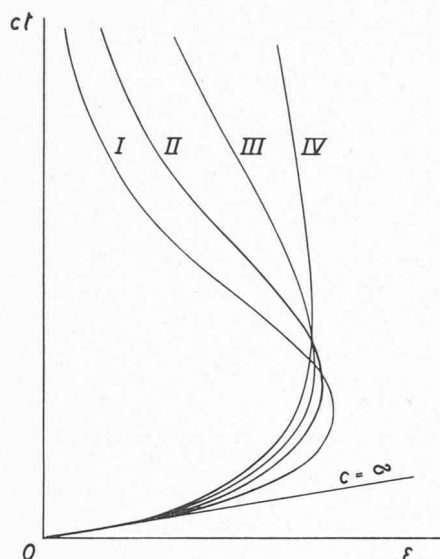


Fig. 5.

A chacune de ces courbes correspond une loi bien déterminée de variation du coefficient d'hérédité, dont la connaissance suffit à caractériser l'allure du phénomène.

\* \* \*

Mais je ne veux pas abuser de votre attention en vous exposant les détails de ces calculs qui ne présentent plus aucune difficulté substantielle.

Je préfère vous entretenir sur les conclusions auxquelles la théorie nous conduit au sujet de la distribution des tensions sur la section droite d'une poutre fléchie.

C'est un des problèmes fondamentaux de la résistance des constructions, qui intéresse mathématiciens, physiciens, ingénieurs. Et à propos de ce problème, pourtant si connu et étudié depuis longtemps, j'ai quelque chose de nouveau à vous dire.

Prenons donc en considération le cas d'une poutre fléchie, supposons sa déformation croissant linéairement dans le temps, et proposons-nous d'en définir l'état d'équilibre à l'instant  $T$ . C'est dire que nous voulons savoir quelle sera, à cet instant, la distribution soit des déformations, soit des tensions, sur chaque section droite de la poutre.

Nous nous rapporterons à l'équation générale

$$\bar{\epsilon}(T) = a_1 c \frac{T^2}{2} + a_2 c^2 \frac{T^3}{3} + a_3 c^3 \frac{T^4}{4} + \dots$$

où, pour une quelconque valeur donnée de  $T$ , la vitesse  $c$  est une fonction de la position du point qu'on considère. Plus précisément  $c$  croît proportionnellement à la distance du point à l'axe neutre de la section droite où le point est placé.

Nous poserons donc

$$c = \omega y$$

$\omega$  étant une constante arbitraire. On obtient ainsi pour la déformation plastique une expression du type

$$\bar{\epsilon} = K_1 y + K_2 y^2 + K_3 y^3 + \dots$$

dont les coefficients dépendent des caractéristiques du matériau et de la vitesse avec laquelle la poutre fléchit.

En ayant choisi comme fonction déterminante la déformation totale

$$\epsilon + \bar{\epsilon} = ct$$

on en déduit immédiatement l'expression de la déformation élastique à l'instant  $T$

$$\epsilon = \omega T y - K_1 y - K_2 y^2 - K_3 y^3 - \dots$$

Après quoi différentes possibilités se présentent en raison des différentes caractéristiques du matériau et des différentes vitesses de déformation.

Prémettons que, si l'on supposait constant le coefficient d'hérédité — et donc  $K_1$  seul, parmi les coefficients  $K$ , différent de zéro — autant la déformation plastique

$$\bar{\epsilon} = K_1 y$$

que la déformation élastique

$$\epsilon = (\omega T - K_1) y$$

seraient proportionnelles à  $y$ ; la distribution des déformations (et des tensions) sur la section droite serait linéaire, comme si la poutre se conservait parfaitement élastique.

Généralement une telle hypothèse est à écarter. Il suffit d'ailleurs d'admettre qu'un autre des coefficients  $K$  soit différent de zéro pour que la théorie nous offre l'explication de certains faits que l'expérience nous a désormais révélés.

Supposons par exemple que le coefficient d'hérédité puisse s'écrire sous la forme

$$f = a_1 + a_n (\epsilon + \bar{\epsilon})^{n-1}.$$

On a alors

$$\bar{\epsilon} = K_1 y + K_n y^n$$

et

$$\epsilon = (\omega T - K_1) y - K_n y^n$$

L'intervention des déformations plastiques va donc déterminer des changements non seulement quantitatifs, mais qualitatifs, dans la loi de distribution de la déformation élastique — et donc des tensions — sur la section droite de la poutre. Telle loi ne sera plus linéaire.

Dans les figures qui suivent (fig. 6, 7 et 8), cette loi de distribution des déformations élastiques, et des

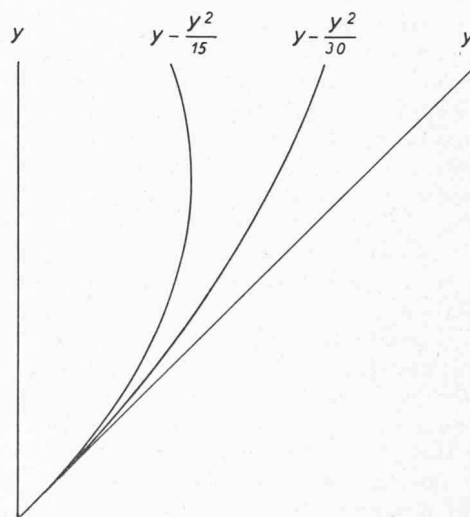


Fig. 6.

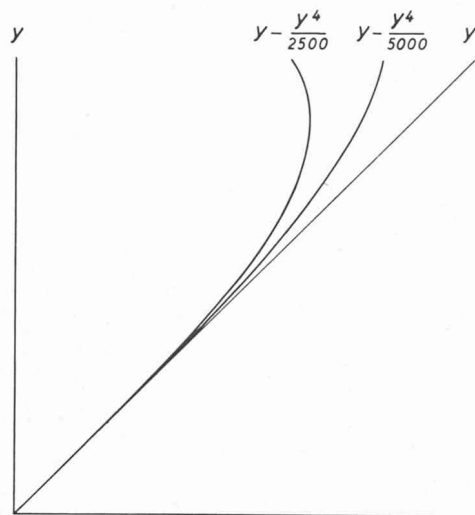


Fig. 7.

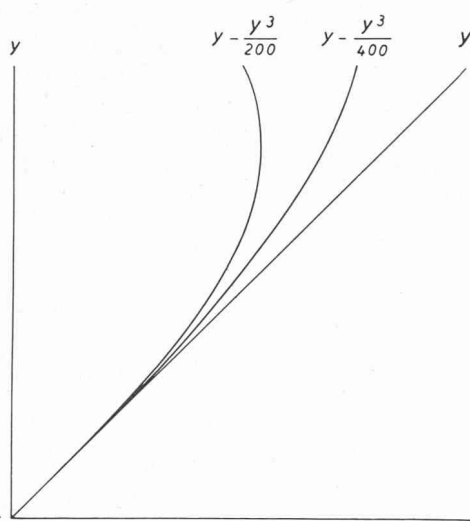


Fig. 8.

tensions, a été représentée graphiquement dans certains cas particuliers correspondant respectivement à trois valeurs différentes, 2, 3 et 4 de  $n$ , et pour deux différentes valeurs du rapport entre le coefficient  $K_n$  et le coefficient  $\omega T - K_1$ .

Certaines conclusions s'ensuivent immédiatement.

Contrairement à ce qu'on admet habituellement — et contrairement à ce que j'ai admis moi-même dans mes premiers exposés — les déformations plastiques peuvent se manifester même dans les régions de la poutre les plus proches de l'axe neutre, et donc moins sollicitées.

Telle intervention ne peut en aucun cas se traduire dans un simple accroissement de la déformation totale, c'est-à-dire de la courbure de la poutre, qui peut toujours être interprété comme la conséquence d'un accroissement fictif de la sollicitation extérieure dû à l'ensemble des déformations plastiques.

Déformations et tensions dans un point quelconque de la section droite dépendent non seulement de la sollicitation extérieure (et de son accroissement fictif dû à l'ensemble des déformations plastiques) mais aussi des valeurs des déformations plastiques qui se sont vérifiées dans ce point.

Le nouveau diagramme des tensions, rapporté à celui qu'on aurait eu en régime élastique (représenté dans la figure 9 par la ligne pointillée) dénonce immédiatement une diminution de valeurs là où le matériau en régime

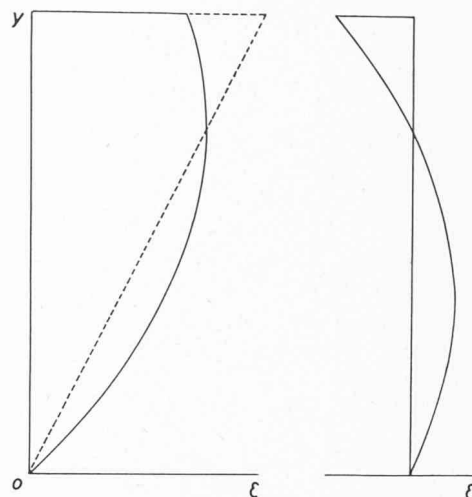


Fig. 9.

élastique aurait été soumis aux tensions les plus élevées, et une augmentation de valeurs là où en régime élastique la résistance du matériau aurait été moins utilisée.

On ne peut même plus dire que les tensions les plus grandes se vérifient tout près des bords de la section, et en tout cas dans les points de la section les plus éloignés de l'axe neutre. Cela arrive évidemment pour des valeurs de  $K_n$  inférieures à une certaine limite ; mais pour des valeurs de  $K_n$  plus grandes — telles qu'on peut les rencontrer lors d'un accroissement de la vitesse de déformation ou du temps — les déformations élastiques et les tensions se maintiennent croissantes seulement jusqu'à une certaine valeur de  $y$ , puis elles se mettent à décroître plus ou moins rapidement.

Les plus grandes tensions peuvent donc se présenter dans des points situés à l'intérieur de la section.

A titre de conclusion, nous sommes conduits à reconnaître qu'un état de coaction peut toujours se produire, même sous l'action de sollicitations très petites ; et que, en conséquence, un retour pur et simple de la poutre à sa configuration initiale non déformée ne sera plus généralement possible.

Cet état de coaction peut être caractérisé en rapportant le diagramme des déformations élastiques à la ligne pointillée. Ce diagramme (reproduit à part dans notre figure) peut être utilisé pour représenter l'état de coaction après déchargement de la poutre.

\* \* \*

Certaines de ces conclusions correspondent à des faits connus depuis longtemps.

Le fait par exemple que, à l'occasion de la première application de charges, même très faibles, les constructions en béton armé présentent des déformations permanentes, est bien connu des constructeurs. Mais c'est, je crois, la première fois qu'il trouve une interprétation rationnelle et la possibilité d'être prévu et évalué quantitativement.

En effet personne ne prend garde aux états de coaction qui s'ensuivent, et on néglige ce phénomène à cause de sa petitesse qui exclut tout danger immédiat.

Ces états sont pourtant appelés à exercer une influence qui n'est pas nécessairement négligeable, sur les états successifs de la structure, même sur ceux qui en pourraient compromettre la résistance.

Une expérimentation systématique, conduite avec des procédés et des instruments qui permettent de déceler la présence de courbures (et plus généralement de déformations) permanentes, même très petites,

pourrait offrir aux ingénieurs l'occasion d'approfondir le problème.

En attendant, il faut dire que la nécessité d'une révision des idées courantes, dans le sens que nous venons d'indiquer, est en train de s'imposer même à ceux qui étudient le problème en vue des applications pratiques.

Je me rapporterai à ce propos aux plus récents travaux de la « Commission pour la pression excentrique » du Comité européen du Béton, tels qu'ils ont été documentés par le président même de la commission, M. Rusch, dans le rapport qu'il a présenté à Vienne en avril dernier.

Dans ce rapport<sup>1</sup>, on reconnaît la nécessité de remplacer, dans les calculs pour le dimensionnement d'éléments en béton armé, le diagramme contraintes-déformations qui suppose un comportement purement élastique du béton par un autre diagramme tenant compte de son comportement élasto-plastique.

Plusieurs fois déjà — nous dit M. Rusch — on avait essayé de déduire un tel diagramme des résultats connus. A ce sujet, un intérêt particulier revient à un travail de M. Scholz, qui s'est proposé de contrôler si tous les résultats expérimentaux peuvent s'expliquer par une seule et unique loi contraintes-déformations. Le résultat a été négatif. Les différences avec une loi unique n'étaient négligeables que pour des bétons de haute résistance dont le comportement est presque élastique. Par contre, un béton de faible résistance, pour lequel l'influence des déformations plastiques est importante, faisait apparaître des différences sensibles.

M. Rasch a tenté d'expliquer ces échecs rencontrés jusqu'ici dans la recherche d'une loi fondamentale unique. Il estime que, jusqu'à présent, on n'avait pas suffisamment tenu compte de la vitesse de mise en charge. Quand une poutre est sollicitée en flexion, les diverses fibres de la zone comprimée se trouvent déformées à des vitesses différentes, qui sont proportionnelles à leur distance à l'axe neutre. Il faut en tenir compte lorsqu'on détermine la répartition des contraintes.

Dans ce but, M. Rasch a proposé d'étudier sur des prismes en compression simple l'influence de la vitesse de déformation sur la forme de la courbe contraintes-déformations.

Des prismes identiques ont été mis en charge à des vitesses différentes, ces vitesses étant maintenues constantes lors de chaque essai.

On peut, d'après Rasch, déduire de ces courbes contraintes-déformations la loi de répartition des contraintes dans les différents points de la zone comprimée d'une poutre fléchie.

Or les diagrammes que M. Rasch obtient de cette manière ont décidément la même allure que ceux que je viens de vous présenter; on pourrait donc dès maintenant considérer la théorie comme pleinement confirmée par l'expérience. Toutefois il ne faut pas oublier qu'il s'agit de résultats obtenus par voie indirecte. Quelque doute pourrait donc encore subsister.

Des déterminations directes — c'est-à-dire effectuées directement sur les fibres de la poutre — sont évidemment très délicates, mais non impossibles.

On travaille à la résolution de ce problème dans les laboratoires de l'Institut dynamométrique de Turin<sup>2</sup>.

Les différentes fibres d'une poutre fléchie, assemblées

de manière à les rendre solidaires quand elles doivent résister aux sollicitations extérieures, peuvent être rendues indépendantes après déchargement de la poutre.

Des extensomètres électriques de haute précision sont placés sur ces différentes fibres, et enregistrent leurs déformations, soit avant, soit après la destruction des liens existant entre elles.

Une mesure directe des déformations plastiques dans les différents endroits de la poutre est ainsi rendue possible.

C'est grâce à des essais de ce genre que nous serons bientôt définitivement fixés au sujet de la possibilité d'interpréter les plus différents phénomènes élasto-plastiques par la théorie de l'hérédité telle que je viens de vous l'exposer.

#### NOTE

Dans la discussion qui a suivi cette conférence, certains parmi mes auditeurs ont manifesté leur hésitation à accepter l'idée du caractère héréditaire que j'attribue aux déformations plastiques.

C'est à leur intention que j'expose ici de quelle manière mon point de vue peut se justifier par une analyse directe et tout à fait élémentaire du problème, indépendamment de tout recours à la théorie des fonctions intégral-différentielles.

Etant donné que dans toute déformation d'un corps naturel il y a toujours une partie non élastique qui persistera même après que les causes qui l'ont déterminée auront cessé d'agir, il faut bien admettre que, à un instant quelconque  $T$ , on se trouvera en présence de toutes les déformations non élastiques qui auront pris naissance depuis l'origine des temps.

A chaque élément  $dt$  de l'intervalle de temps  $(0, T)$  on devra donc attribuer la présence, à l'instant  $T$ , d'une déformation plastique élémentaire

$$d\bar{\epsilon}(T)$$

dont la grandeur dépendra de l'état du corps à l'instant  $t$  et plus précisément de la valeur, à l'instant  $t$ , d'une fonction  $\alpha(t)$  ayant le caractère de « déterminante » des déformations plastiques.

Ce sera, peut-être, une composante de la déformation élastique, ou bien une composante de la déformation totale, selon les cas.

Mais, quoi qu'il en soit, la déformation plastique élémentaire pourra toujours s'écrire sous la forme

$$d\bar{\epsilon}(T) = \alpha(t) f(T, t) dt$$

$f(T, t)$  étant un coefficient mesurant la vitesse avec laquelle la déformation plastique  $\bar{\epsilon}(T)$  se produirait sous l'action d'une fonction déterminante  $\alpha(t)$  égale à l'unité.

Par intégration, on obtient pour la déformation plastique totale à l'instant  $T$  l'expression

$$\bar{\epsilon}(T) = \int_0^T \alpha(t) f(T, t) dt.$$

Et c'est précisément l'expression que M. Volterra avait obtenue comme terme de premier ordre du développement en série d'une fonction qui dépend de toutes les valeurs qu'une fonction du temps prend dans l'intervalle  $(0, T)$ ; terme qu'il avait choisi pour exprimer les lois de l'hérédité.

Même l'analyse directe et tout à fait élémentaire du problème conduit donc à replacer les phénomènes plastiques dans le cadre des phénomènes héréditaires.

Turin, 24 février 1960.

<sup>1</sup> Comité européen du Béton (Luxembourg). Bulletin d'information n° 15, mars 1959.

<sup>2</sup> Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris 1960.