

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 83 (1957)
Heft: 6

Artikel: Calcul de la vitesse critique d'un arbre par intégrations numériques
Autor: Tâche, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-62775>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Abonnements:

Suisse: 1 an, 26 francs
 Etranger: 30 francs
 Pour sociétaires:
 Suisse: 1 an, 22 francs
 Etranger: 27 francs
 Prix du numéro: Fr. 1.60
 Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande »
 N° II. 57 75, à Lausanne.

Adresser toutes communications concernant abonnements, changements d'adresse, expédition à Imprimerie La Concorde, Terreaux 31, Lausanne

Rédaction
 et éditions de la S.A. du Bulletin technique (tirés à part), Case Chauderon 475
**Administration de la S.A.
du Bulletin Technique**
 Ch. de Roseneck 6 Lausanne

Paraissant tous les quinze jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale

Comité de patronage — Président: J. Calame, ingénieur, à Genève ; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne — Membres: Fribourg : MM. H. Gicot, ingénieur; M. Waeber, architecte — Vaud: MM. A. Gardel, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. Cl. Grosgruin, architecte; E. Martin, architecte — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. G. de Kalbermatten, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration
 de la Société anonyme du Bulletin technique: A. Stucky, ingénieur, président;
 M. Bridel; G. Epitaux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

Tarif des annonces

1/1 page	Fr. 275.—
1/2 "	140.—
1/4 "	70.—
1/8 "	35.—

**annonces Suisses S. A.
(ASSA)**



Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26
 Lausanne et succursales

SOMMAIRE : *Calcul de la vitesse critique d'un arbre par intégrations numériques*, par J. TÂCHE, ingénieur E.P.U.L. aux Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey S. A. — *Concours pour un centre d'enseignement professionnel, à Yverdon*. — **LES CONGRÈS :** *Conférence mondiale de l'énergie*. — Société suisse des ingénieurs et des architectes: *Voyage d'étude aux Etats-Unis*. — **SERVICE DE PLACEMENT**. — **DOCUMENTATION GÉNÉRALE**. — **DOCUMENTATION DU BATIMENT**. — **INFORMATIONS DIVERSES**.

CALCUL DE LA VITESSE CRITIQUE D'UN ARBRE PAR INTÉGRATIONS NUMÉRIQUES

par J. TÂCHE, ingénieur E.P.U.L.

aux Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey, S. A.

La vitesse critique d'un arbre dépend de plusieurs facteurs, entre autres de la masse propre de l'arbre et des masses portées par cet arbre et tournant avec lui. Dans la plupart des cas on peut soit négliger la masse propre, soit en tenir compte en majorant judicieusement les autres masses. Si l'on adopte l'une ou l'autre de ces solutions, la détermination de la vitesse critique se ramène au calcul des flèches de l'arbre produites par des forces égales aux poids des masses tournantes, ces flèches étant mesurées aux endroits où agissent ces forces.

Il est possible de résoudre analytiquement ce problème lorsque le diamètre de l'arbre et par conséquent son moment d'inertie sont constants. Très fréquemment cette condition n'est pas satisfaite. On peut alors, soit admettre un diamètre constant équivalent, soit traiter le problème graphiquement.

L'estimation d'un diamètre équivalent rend le résultat incertain à tel point qu'on ne peut plus se contenter de cette méthode approximative si la vitesse critique

obtenue est voisine de la vitesse maxima que peut atteindre l'arbre.

L'intégration graphique, fort ingénieuse, a été inventée à une époque où le technicien n'avait à sa disposition que sa règle à calcul, son té et son équerre.

Comme actuellement la machine à calculer s'introduit de plus en plus dans les bureaux de construction, il nous a paru opportun de mettre au point une méthode qui soit appropriée à ce nouvel outil et en utilise toutes les ressources.

Terminologie

E	Module d'élasticité.
I	Moment d'inertie.
P	Force concentrée agissant sur l'arbre.
Charge	Force P correspondant au poids d'une masse tournante.

Réaction d'appui	Force P correspondant à la réaction d'un palier.
------------------	--

Tronçon	Portion de l'arbre le long de laquelle le moment d'inertie peut être considéré comme pratiquement constant et dont la longueur n'est coupée par aucune force P .
Faces	Sections de l'arbre délimitant un tronçon.
l	Longueur d'un tronçon.
m	Indice de la face à partir de laquelle débute l'intégration numérique. On choisit de préférence cette face vers le milieu de l'arbre, au droit d'un appui ou d'une charge.
ω'	Tangente à la ligne élastique.
$\Omega = E\omega'$	Vecteur de rotation d'une face, c'est aussi l'inclinaison du tronçon à l'endroit de cette face.
y	Ordonnée de la ligne élastique.
$Y = Ey$	Vecteur représentant le déplacement d'une face perpendiculairement à l'axe passant par les appuis et compté à partir de cet axe.
t	Nombre de tronçons.
p	Nombre d'appuis.
q	Nombre de charges.
g	Accélération terrestre.
ω	Vitesse angulaire de l'arbre.
n	Vitesse critique de l'arbre en t/min.

N.B. — Le sens positif des vecteurs Ω , Y et P est indiqué sur la figure 1.

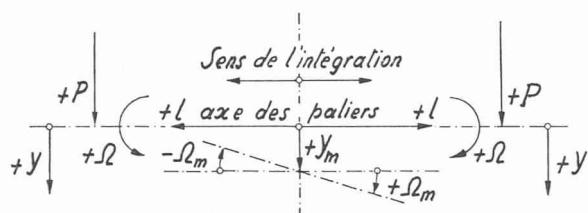


Fig. 4. — Sens positif des vecteurs P , Ω et Y en fonction du sens de l'intégration.

Exposé de la méthode

On décompose l'arbre en tronçons et on numérote les faces de 0 à t en commençant par la gauche.

On choisit la face m , à partir de laquelle commenceront les intégrations, voir terminologie. Les vecteurs de déformation de cette face sont désignés par Ω_m et Y_m ; ce sont des inconnues.

Si l'intégration se fait de gauche à droite, la rotation Ω est positive lorsqu'elle a lieu dans le sens des aiguilles d'une montre, voir figure 1; par contre, si l'intégration se fait de droite à gauche, le sens positif de Ω est inversé. Dans les deux cas, les vecteurs P et Y sont positifs lorsqu'ils sont dirigés vers le bas.

Pour procéder à l'intégration, on ne fait aucune différence entre les charges et les réactions d'appui; on les considère toutes comme des forces positives P , dont l'indice correspond au numéro de la face. Aucune valeur numérique n'est attribuée aux forces P , on a donc $p + q$ intégrations numériques.

On intègre d'abord le premier tronçon, puis le deuxième, et ainsi de suite jusqu'à l'extrémité de l'arbre, en appliquant les formules générales suivantes :

$$(1) \quad \Omega_{i \pm 1} = \Omega_i + P \left(b \frac{l}{I} + \frac{l^2}{2I} \right).$$

$$(2) \quad Y_{i \pm 1} = Y_i + \Omega_i l + P \left(b \frac{l^2}{2I} + \frac{l^3}{3I} \right).$$

Ces formules se rapportent à la figure 2. Elles sont si élémentaires que nous nous abstenons d'en donner la démonstration.

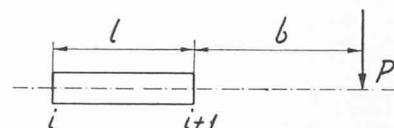


Fig. 2.

Le dernier terme de la formule (1) représente la variation de la rotation Ω due à la déformation du tronçon sous l'action de la force P . Le terme $\Omega_i l$ de l'équation (2) exprime l'augmentation de la flèche due à l'inclinaison Ω_i , tandis que le dernier terme de cette même équation correspond à la variation de la flèche due à la déformation du tronçon. Le signe + de l'indice $i + 1$ est valable lorsque l'intégration se fait de gauche à droite, le signe —, pour l'intégration en sens inverse.

Lorsque toutes les intégrations sont achevées, le déplacement d'une face quelconque se présente sous la forme

$$(3) \quad Y_i = Y_m \pm \Omega_m \sum_m^i l + \Sigma \psi P.$$

Le deuxième terme du second membre correspond au déplacement de la face i produit par l'inclinaison initiale Ω_m . Le signe + est valable si l'intégration s'est faite de gauche à droite, le signe — correspond à l'intégration en sens inverse.

Le dernier terme est la somme des déplacements engendrés par toutes les forces P agissant sur le secteur intégré. Les facteurs ψ sont les facteurs numériques obtenus par les intégrations.

On connaît donc les déplacements de toutes les faces en fonction des forces P et des vecteurs initiaux Ω_m et Y_m . Parmi ces forces, il y en a un nombre p qui sont inconnues, ce sont les réactions d'appui. Les vecteurs Ω_m et Y_m le sont aussi. On a donc $p + 2$ inconnues. Pour les déterminer, il faut un nombre égal d'équations. Deux seront fournies en exprimant l'équilibre des forces P et les p autres, en égalant à zéro les déplacements de toutes les faces correspondant aux appuis.

Les inconnues étant ainsi parfaitement déterminées pourront s'exprimer en fonction des charges P . On peut donc calculer, en appliquant la formule (3), les déplacements des faces au droit des charges. Ces déplacements seront des fonctions linéaires des charges. On obtiendra donc des équations de la forme suivante :

$$(4) \quad \begin{aligned} Y_\alpha &= K_{\alpha\alpha} P_\alpha + K_{\alpha\beta} P_\beta + K_{\alpha\gamma} P_\gamma \dots \\ Y_\beta &= K_{\beta\alpha} P_\alpha + K_{\beta\beta} P_\beta + K_{\beta\gamma} P_\gamma \dots \\ Y_\gamma &= K_{\gamma\alpha} P_\alpha + K_{\gamma\beta} P_\beta + K_{\gamma\gamma} P_\gamma \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Le nombre d'équations et le nombre de termes du second membre de chaque équation sont égaux au

nombre de charges. Les K sont des facteurs numériques connus, nous les appellerons : *coefficients de déformation*. A remarquer que les coefficients K affectés des mêmes indices, mais permутés, doivent être égaux ; autrement dit, les coefficients disposés symétriquement par rapport à la diagonale $K_{\alpha\alpha} K_{\beta\beta} \dots$ sont égaux. Ces égalités sont un contrôle de l'exactitude des calculs numériques.

Les équations (4) sont valables quelles que soient les valeurs attribuées aux charges P .

Nous avons donc le droit de remplacer chaque charge P par une force centrifuge proportionnelle à P et à la flèche au droit de cette charge.

$$(5) \quad C = y \frac{P}{g} \omega^2 = YP \frac{\omega^2}{Eg}.$$

On pose

$$(6) \quad x = \frac{Eg}{\omega^2}.$$

Donc

$$(7) \quad \omega = \sqrt{\frac{Eg}{x}}.$$

$$(8) \quad C = YP \frac{1}{x}.$$

Après remplacement des P par les C , les équations (4) se présentent sous la forme suivante :

$$(9) \quad \begin{aligned} xY_\alpha &= Y_\alpha K_{\alpha\alpha} P_\alpha + Y_\beta K_{\alpha\beta} P_\beta + Y_\gamma K_{\alpha\gamma} P_\gamma \dots \\ xY_\beta &= Y_\alpha K_{\beta\alpha} P_\alpha + Y_\beta K_{\beta\beta} P_\beta + Y_\gamma K_{\beta\gamma} P_\gamma \dots \\ xY_\gamma &= Y_\alpha K_{\gamma\alpha} P_\alpha + Y_\beta K_{\gamma\beta} P_\beta + Y_\gamma K_{\gamma\gamma} P_\gamma \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On peut alors introduire dans les équations (9) les valeurs numériques des charges P . On obtiendra des équations de la forme :

$$(10) \quad \begin{aligned} xY_\alpha &= A_1 Y_\alpha + B_1 Y_\beta + C_1 Y_\gamma \dots \\ xY_\beta &= A_2 Y_\alpha + B_2 Y_\beta + C_2 Y_\gamma \dots \\ xY_\gamma &= A_3 Y_\alpha + B_3 Y_\beta + C_3 Y_\gamma \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

En comparant les équations (9) et (10), on constate que les coefficients A représentent les flèches au droit de chaque charge P produites par une force P_α égale au poids de la première masse. Ces coefficients s'obtiennent donc en multipliant la première colonne des K (voir équations (9) et aussi équations (4)) par la première charge. De même les B sont le produit de la deuxième colonne des K par la deuxième charge, et ainsi de suite. Le calcul de ces coefficients est donc très simple et très rapide.

En éliminant les Y des équations (10) on obtient une équation en x dont le degré est égal au nombre q de charges.

$$(11) \quad x^q + ax^{q-1} + bx^{q-2} + \dots = 0.$$

Pour que le système d'équations (10) puisse être satisfait, il faut que x soit l'une des racines de l'équation (11).

Dans ce cas, les rapports des flèches $\frac{Y_\beta}{Y_\alpha}, \frac{Y_\gamma}{Y_\alpha}$, etc., sont parfaitement déterminés, par contre, les valeurs de ces

flèches sont indéterminées. Elles peuvent par conséquent croître jusqu'à la destruction de l'arbre.

Les racines de l'équation (11) correspondent donc aux vitesses critiques de l'arbre.

Connaissant x , on calcule ω par la formule (7) et la vitesse critique par la relation bien connue

$$(12) \quad n = \frac{30}{\pi} \omega = 9,549297 \omega.$$

Le problème est ainsi complètement résolu.

Ajoutons cependant que la détermination de l'équation (11) en partant des équations (10) peut se faire algébriquement. Voici les formules pour 1, 2 et 3 charges.

1 charge

$$(13) \quad x = A_1.$$

2 charges

$$(14) \quad a = -(A_1 + B_2).$$

$$(15) \quad b = A_1 B_2 - A_2 B_1.$$

$$(16) \quad \frac{Y_\beta}{Y_\alpha} = \frac{x - A_1}{B_1}.$$

3 charges

$$(17) \quad a = -(A_1 + B_2 + C_3).$$

$$(18) \quad b = A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_1 C_3 - A_3 C_1 + B_2 C_3 - B_3 C_2.$$

$$(19) \quad c = -A_1(B_2 C_3 - B_3 C_2) - A_2(B_3 C_1 - B_1 C_3) - A_3(B_1 C_2 - B_2 C_1).$$

$$(20) \quad \frac{Y_\beta}{Y_\alpha} = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1 - C_3 x}{C_1 B_2 - B_1 C_2 - C_3 x}.$$

$$(21) \quad \frac{Y_\gamma}{Y_\alpha} = \frac{A_1 B_3 - A_3 B_1 - B_3 x}{B_1 C_3 - B_3 C_1 - B_1 x}.$$

Application numérique

L'exposé de la méthode pouvant paraître quelque peu abstrait, il est utile de le concrétiser par un exemple numérique. A cette occasion, nous donnerons quelques directives sur la manière de conduire les calculs et d'utiliser au mieux la machine à calculer.

Considérons l'arbre à 2 charges et 3 appuis de la figure 3.

Il est scindé en dix tronçons. On intègre à partir de la face 5, qui correspond à un appui. On a donc

$$Y_5 = 0.$$

Intégrations

Tous les calculs se font en cm.

On dresse deux tableaux, l'un pour les intégrations de gauche à droite (secteur 5-10), l'autre pour celles de droite à gauche (secteur 5-0).

Le premier tableau se compose essentiellement de trois colonnes, aux sommets desquelles on met en évidence Ω_5 , P_8 et P_{10} . Sur les lignes réservées aux vecteurs Ω et Y , on inscrit les coefficients numériques obtenus par intégration. Entre les deux lignes d'une face et les deux lignes de la face suivante est intercalée une ligne sur laquelle s'inscrivent les caractéristiques du tronçon compris entre les deux faces considérées,

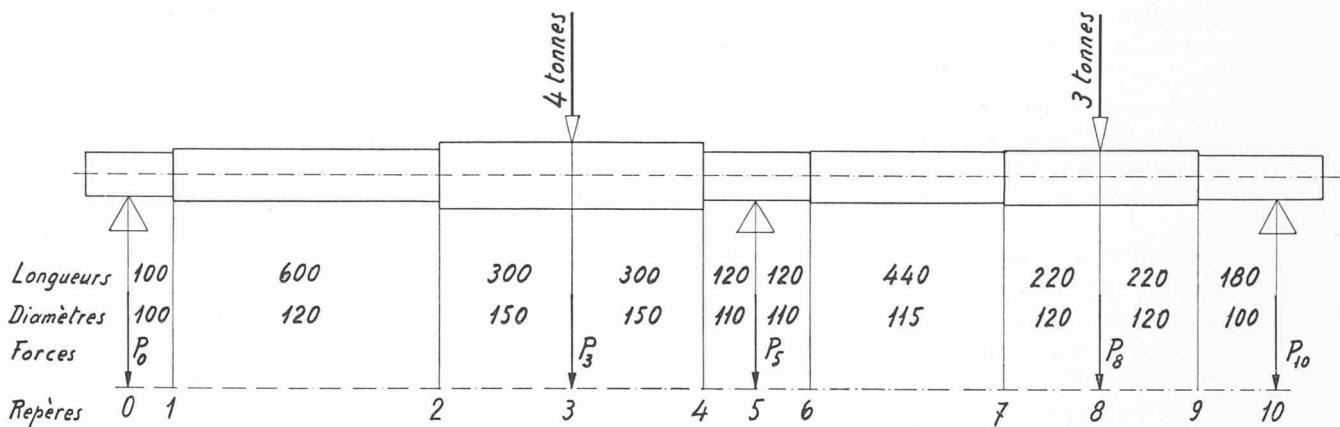


Fig. 3. — Les cotes sont en mm.

caractéristiques qui serviront à calculer les accroissements des vecteurs Ω et Y .

Après avoir rempli toutes les lignes réservées aux caractéristiques des tronçons, on intègre numériquement.

La colonne Ω_5 représente la ligne élastique due uniquement à l'inclinaison initiale Ω_5 . Cette inclinaison est constante et les Y croissent proportionnellement à la somme des l , voir formule (3).

Passons à la colonne P_8 . Pour cette colonne, Ω_5 et Y_5 sont nuls. Elle donne donc des points de la ligne élastique engendrée par la force P_8 agissant seule, l'arbre étant considéré comme encastré en 5.

On calcule d'abord les coefficients de P_8 pour les Ω de toutes les faces, en appliquant la formule (1).

Pour Ω_6 on a

$$0,016697 \times 66 + 0,100181 = 1,202183.$$

On conserve ce nombre dans la machine à calculer et on y ajoute :

$$0,051252 \times 22 + 1,127548.$$

La machine indique le nombre 3,457275, que l'on inscrit sur la ligne Ω_7 .

On poursuit ainsi de suite les opérations. A partir de la ligne où dans la case des b on a inscrit « à gauche », Ω cesse de croître, car P_8 , étant à gauche des tronçons considérés, n'exerce aucune action sur ceux-ci.

On passe ensuite au calcul des coefficients se rapportant aux Y , en appliquant la formule (2).

Pour Y_6 on a

$$0,100181 \times 66 + 0,801447 = 7,413393.$$

On conserve ce nombre dans la machine et on y ajoute

$$1,202183 \times 44 + 1,127548 \times 22 + 33,073459.$$

La machine indique le nombre 118,188960, que l'on inscrit sur la ligne Y_7 .

On poursuit ainsi de suite les opérations, en tenant compte qu'à partir de « à gauche » les tronçons ne fléchissent pas.

Pour passer de Y_8 à Y_9 on ajoute au coefficient 197,735585 seulement le produit $3,694996 \times 22$, qui représente l'augmentation due à l'inclinaison 3,694996.

On remarque que grâce à la machine à calculer, les seules écritures que l'on doit faire sont celles qui figurent au tableau. Les intégrations numériques sont de ce fait très rapides. Ainsi pour les deux tableaux, l'intégration de toutes les colonnes a duré à peine une demi-heure, ceci en utilisant une machine à main et en faisant deux fois toutes les opérations à titre de contrôle.

Détermination des inconnues : Ω_5 , P_0 et P_{10}

Le moment des forces par rapport à la face 5 donne

$$142P_0 + 42P_3 - 78P_8 - 118P_{10} = 0.$$

D'autre part, on pose

$$Y_0 = -142\Omega_5 + 103,6791P_3 + 670,3769P_0 = 0.$$

$$Y_{10} = +118\Omega_5 + 345,5354P_8 + 659,6378P_{10} = 0.$$

En résolvant ces trois équations on obtient

$$\Omega_5 = -0,391477P_3 + 0,316262P_8$$

$$P_0 = -0,237581P_3 + 0,066991P_8$$

$$P_{10} = +0,070030P_3 - 0,580401P_8.$$

Calcul de x et des vitesses critiques

Les flèches Y_3 et Y_8 sont données par les tableaux des intégrations. En remplaçant Ω_5 , P_0 et P_{10} par les valeurs que l'on vient de déterminer, on obtient

$$Y_3 = +17,2712P_3 - 6,3374P_8$$

$$Y_8 = -6,3374P_3 + 21,8549P_8$$

On constate que le coefficient de P_8 dans la première équation est égal au coefficient de P_3 dans la seconde équation. Les calculs sont donc corrects.

Ces deux équations sont les équations (4) de l'exposé de la méthode.

Les charges P_3 et P_8 sont connues.

Supposons qu'elles aient les valeurs suivantes :

$$P_3 = 4 \text{ tonnes} \quad P_8 = 3 \text{ tonnes}$$

En appliquant la règle énoncée dans l'exposé de la méthode, on obtient

$$A_1 = 69,0848 \quad B_1 = -19,0122$$

$$A_2 = -25,3496 \quad B_2 = 65,5647$$

Les formules (14) et (15) nous donnent l'équation caractéristique

PREMIER TABLEAU
Intégration du secteur 5-10 (de gauche à droite)

l	I	$\frac{l}{I}$	$\frac{l^2}{2I}$	$\frac{l^3}{3I}$	Repère		Ω_5	P_8	P_{10}
							Ω_5 Y_5	— 1	—
12	718,7	0,016697	0,100181	0,801447	5-6	b		66	106
							Ω_6 Y_6	+ 1 + 12	1,202183 7,413393
44	858,5	0,051252	1,127548	33,073459	6-7	b		22	62
							Ω_7 Y_7	+ 1 + 56	3,457275 118,188960
22	1018	0,021611	0,237721	3,486575	7-8	b		0	40
							Ω_8 Y_8	+ 1 + 78	3,694996 197,735585
22	1018	0,021611	0,237721	3,486575	8-9	b		à gauche	18
							Ω_9 Y_9	+ 1 + 100	3,694996 279,025497
18	490,9	0,036667	0,330005	3,960073	9-10	b			0
							Ω_{10} Y_{10}	+ 1 + 118	3,694996 345,535425
									8,234120 659,637833

SECOND TABLEAU
Intégration du secteur 5-0 (de droite à gauche)

l	I	$\frac{l}{I}$	$\frac{l^2}{2I}$	$\frac{l^3}{3I}$	Repère		Ω_5	P_3	P_0
							Ω_5 Y_5	— 1	—
12	718,7	0,016697	0,100181	0,801447	5-4	b		30	130
							Ω_4 Y_4	— 1 — 12	0,601091 3,806877
30	2485	0,012072	0,181087	3,621730	4-3	b		0	100
							Ω_3 Y_3	— 1 — 42	0,782178 25,461337
30	2485	0,012072	0,181087	3,621730	3-2	b		à droite	70
							Ω_2 Y_2	— 1 — 72	0,782178 48,926677
60	1018	0,058939	1,768173	70,726916	2-1	b			10
							Ω_1 Y_1	— 1 — 132	0,782178 95,857357
10	490,9	0,020371	0,101854	0,679025	1-0	b			0
							Ω_0 Y_0	— 1 — 142	0,782178 103,679137
									7,144622 670,376948

$$x^2 - 134,6495 x + 4047,5725 = 0$$

dont les racines sont :

$$x_1 = 89,3485 \quad x_2 = 45,3009$$

A ces valeurs correspondent les vitesses critiques calculées par les formules (7) et (12). A remarquer que les charges P ayant été exprimées en tonnes

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

on obtient

$$n_1 = 1450 \text{ t/min} \quad n_2 = 2036 \text{ t/min}$$

En appliquant la formule (16), on a

$$\frac{Y_8}{Y_3} \Big|_1 = -1,0658 \quad \frac{Y_8}{Y_3} \Big|_2 = +1,2510.$$

On en conclut que pour la vitesse n_1 , les flèches et par conséquent les forces centrifuges sont de sens contraire, tandis qu'elles sont de même sens pour la seconde vitesse critique n_2 .

Intégrations dans le cas $Y_m \neq 0$,

Il nous paraît utile de traiter encore le cas où le début de l'intégration ne se fait pas sur un appui. Pour ne pas allonger les calculs outre mesure, nous prendrons le même exemple et supposerons que le palier intermédiaire est supprimé.

On a donc

$$Y_5 \neq 0.$$

Les tableaux d'intégration sont encore valables, à condition d'ajouter à chaque déplacement Y la valeur Y_5 .

Y_5 est une inconnue de plus, par contre on a une réaction de palier en moins. De ce fait, les forces P_0 et P_{10} sont statiquement déterminées.

On a

$$\begin{aligned} P_0 &= -0,615385 P_3 - 0,153846 P_8 \\ P_{10} &= -0,384615 P_3 - 0,846154 P_8. \end{aligned}$$

D'autre part, on pose

$$\begin{aligned} Y_0 &= Y_5 - 142 \Omega_5 + 103,6791 P_3 + 670,3769 P_0 = 0 \\ Y_{10} &= Y_5 + 118 \Omega_5 + 345,5354 P_8 + 659,6378 P_{10} = 0. \end{aligned}$$

De ces quatre équations, on tire

$$\begin{aligned} \Omega_5 &= -0,212132 P_3 + 0,421096 P_8 \\ Y_5 &= +278,7381 P_3 + 162,9304 P_8. \end{aligned}$$

Les tableaux nous donnent

$$\begin{aligned} Y_3 &= Y_5 - 42 \Omega_5 + 25,4613 P_3 + 103,6791 P_0 \\ Y_8 &= Y_5 + 78 \Omega_5 + 197,7356 P_8 + 345,5354 P_{10}. \end{aligned}$$

Il faut éliminer Y_5 , Ω_5 , P_0 et P_{10} ; grâce à la machine, ces éliminations se font très rapidement, sans écriture aucune.

On obtient

$$\begin{aligned} Y_3 &= 249,3064 P_3 + 129,2937 P_8 \\ Y_8 &= 129,2937 P_3 + 101,1353 P_8. \end{aligned}$$

Les calculs se poursuivent comme dans le cas précédent et on obtient finalement

$$n_1 = 393 \text{ t/min} \quad n_2 = 1497 \text{ t/min.}$$

Remarque finale

La méthode par intégrations numériques s'applique non seulement au calcul de la vitesse critique d'un arbre, mais aussi à celui d'une poutre quelconque, surtout si le moment d'inertie de cette poutre est variable. Elle permet par exemple de calculer rapidement la ligne élastique et les réactions d'appuis quand le système est statiquement indéterminé.

CONCOURS POUR UN CENTRE D'ENSEIGNEMENT PROFESSIONNEL, À YVERDON

Extrait du programme

En mars 1956, la Municipalité d'Yverdon, sur mandat du Conseil communal, ouvrira un concours de projets pour un *Centre d'enseignement professionnel* à construire au lieu dit « Dessus les Moulins », à Yverdon.

Etaient admis à participer au concours tous les architectes reconnus par l'Etat de Vaud :

- a) d'origine vaudoise, domiciliés ou non dans le canton ;
- b) d'origine suisse, domiciliés ou propriétaires d'un bureau dans le canton avant le 1^{er} janvier 1950.

Le jury était composé comme suit :

Président : M. André Martin, syndic d'Yverdon ; vice-président : M. Georges Steiner, municipal, Yverdon ; membres : MM. Rudolf Christ, architecte F.A.S. et S.I.A., Bâle ; Roger Falconnier, ingénieur, Yverdon ; Marc Piccard, architecte F.A.S. et S.I.A., Lausanne ;

Raymond Rouilly, architecte de la Ville, Yverdon ; R. Von der Mühl, architecte F.A.S. et S.I.A., Lausanne ; membres suppléants : MM. Eugène d'Okolski, architecte S.I.A., Lausanne, et Edward Aubert, directeur de l'Ecole professionnelle, Yverdon.

Les projets devaient être remis avant le 18 octobre 1956, à 18 h.

Le jury disposait d'un montant de 13 500 fr. pour primer les cinq meilleurs projets. Il avait la latitude de proposer l'achat de projets.

Sous réserve expresse des restrictions contenues à l'article 41 des Normes de la S.I.A., n° 101, l'autorité organisatrice du concours devait charger l'auteur du projet recommandé par le jury du mandat d'exécution, y compris la direction des travaux et la surveillance locale.

En plus de l'Ecole professionnelle faisant l'objet du concours, les concurrents avaient à tenir compte de la