

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | Bulletin technique de la Suisse romande   |
| <b>Band:</b>        | 82 (1956)   |
| <b>Heft:</b>        | 11  |
| <b>Artikel:</b>     | Une méthode simple de calcul de l'absorption du son par viscosité seule, dans des fluides homogènes limités |
| <b>Autor:</b>       | Botta, A.   |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-62065">https://doi.org/10.5169/seals-62065</a>                       |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

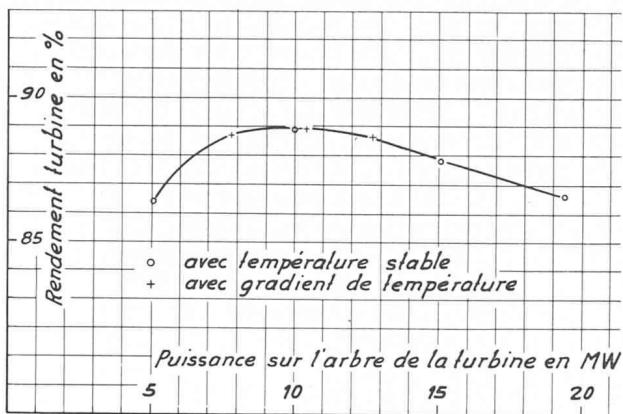


Fig. 5.

la température, ainsi que le montre la courbe de rendements représentée par la figure 5.

Les essais de Gondo ayant eu en partie un caractère démonstratif, il n'est pas possible de donner la durée des différentes opérations, montage, essai et démontage. Toutefois, les participants à ces essais ont pu se persuader de la grande simplicité du montage et des manœuvres nécessaires aux mesures, doublée d'une grande rapidité d'exécution.

#### Comparaisons des relevés obtenus par des mesures thermodynamiques avec des relevés obtenus par d'autres méthodes

Les essais effectués à l'usine de Gondo ne permettent pas d'établir une telle comparaison et ce n'est d'ailleurs pas leur but. Il s'agissait, dans le cas particulier, de contrôler les caractéristiques des machines après une modification destinée à en augmenter la puissance. Par contre, Electricité de France a publié un certain nombre de comparaisons entre les mesures thermodynamiques et des mesures aux moulinets ou au déversoir dans l'article de MM. Willm et Campmas qu'il est intéressant d'étudier.

On remarque d'une façon générale que les mesures effectuées par la méthode thermodynamique se comparent favorablement avec les autres types de mesure, tant en ce qui concerne la valeur absolue des rendements que la dispersion des points.

#### Conclusion

Non seulement une méthode de mesures de rendements, rapide et peu coûteuse, est utile aux constructeurs parce qu'elle peut leur permettre de vérifier leurs calculs et leurs essais en laboratoire plus fréquemment que ce n'est le cas actuellement, mais elle représente aussi un avantage certain pour l'exploitant. En effet, celui-ci peut effectuer lui-même et dans de bonnes conditions un contrôle périodique des rendements, déterminer ainsi l'état d'usure de ses machines et échelonner judicieusement ses campagnes de réparations.

Dans l'état actuel de la technique, la mesure de rendements par la méthode thermodynamique permet d'effectuer d'excellents relevés dans un temps très court et à peu de frais. Elle n'exige qu'un minimum d'appareillage et réduit les arrêts nécessaires pour la mise en place et le démontage des installations à des valeurs absolument négligeables. On se rend compte qu'il serait particulièrement intéressant de pouvoir effectuer des séries de comparaisons avec d'autres méthodes lors d'essais de réception, comparaisons permettant de définir le champ d'application pratique et de préciser la valeur des mesures thermodynamiques par rapport aux essais classiques. Ceci étant fait, il n'est pas impossible que la méthode thermodynamique constitue la méthode de mesure la plus favorable et la plus sûre dans le domaine des chutes moyennes et élevées.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. WEISS : *Les turbines de la centrale de Gondo*. Bulletin technique Vevey, n° 1, 1952.
2. *Méthode thermométrique pour la mesure du rendement des turbines hydrauliques*. Revue générale de l'Electricité, 26 novembre 1921.
3. L. BARBILLON : *Méthode thermométrique de mesure du rendement des turbines hydrauliques*. Revue générale de l'Electricité n° 13, 28 septembre 1929.
4. G. WILLM et P. CAMPMAS : *Mesure du rendement des turbines hydrauliques par la méthode thermométrique Poirson*. La Houille Blanche n° 4 et 5, juillet-octobre 1954.
5. E. FONTAINE et P. CAMPMAS : *Sur la séparation des pertes dans une turbine Francis*. La Houille Blanche n° 2, avril 1952.

534.845.08

## UNE MÉTHODE SIMPLE DE CALCUL DE L'ABSORPTION DU SON PAR VISCOSITÉ SEULE, DANS DES FLUIDES HOMOGÈNES LIMITÉS

par A. BOTTA, ingénieur E.P.U.L.

Voici une solution élémentaire du problème de la propagation des ondes acoustiques dans des fluides homogènes contenus dans certaines limites.

Les résultats simples mais non négligeables auxquels on est conduit, sont susceptibles d'être développés et employés dans les applications techniques.

D'autre part, le mot élémentaire justifie les simplifications introduites dans ce problème complexe et nous dispense d'y revenir, d'autant plus que ce genre de calculs est bien connu.

**Champ sonore dans un fluide homogène contenu entre deux demi-plans parallèles et parfaitement rigides, en l'absence de sources, sauf à une limite.**

Dans les champs sonores, la transmission de l'énergie mécanique se fait par vibrations « élastiques » des « particules » constituant le milieu continu.

L'énergie se dissipe aussi en se propageant, notamment du fait de la viscosité.

Un élément du fluide se déplace et se déforme autour

d'une position moyenne. Nous exprimons dans notre cas l'hypothèse que le mouvement vibratoire n'a lieu que parallèlement aux parois, selon l'axe  $ox$ , et qu'il est le même pour tous les points des droites parallèles à l'axe  $oz$ .

Ce sont les conditions aux limites et l'absence de sources sonores à l'intérieur, qui nous amènent à admettre un tel mouvement.

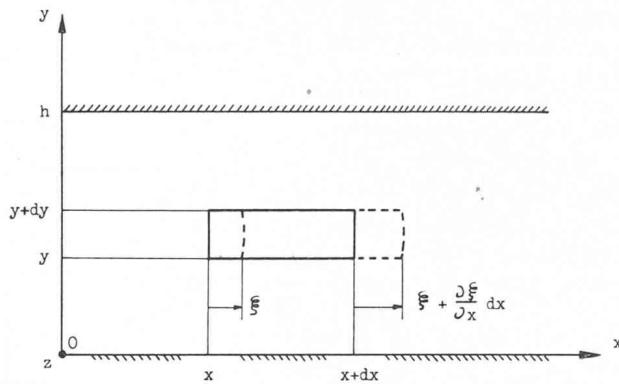


Fig. 1.

Considérons (fig. 1) un élément de masse  $dm$ , ayant au repos une densité  $\rho_0$  et occupant le volume  $dV_0 = dx dy dz$  :

$$dm = \rho_0 dV_0$$

Exprimons la loi de son mouvement en écrivant qu'il y a proportionnalité entre les forces appliquées et l'accélération acquise par son barycentre (théorème du mouvement du barycentre).

Nous retiendrons les forces de pression sur les faces  $dy dz$ , et de viscosité sur les faces  $dx dz$ .

Désignons par  $\xi(x, y, t)$  le déplacement approximatif de la face  $dy dz$  se trouvant à l'abscisse  $x$  au repos, et en  $x + \xi$  au temps  $t$ ,

par

$$\delta P \text{ et } \delta P' = \delta P + \frac{\partial \delta P}{\partial x} dx$$

les variations de pression, entre le mouvement et le repos, sur les faces  $dy dz$ ,

et par

$$\tau \text{ et } \tau' = \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

les forces de viscosité, par unité de surface, sur les faces  $dx dz$ .

La dynamique permet d'écrire, en première approximation,

$$\begin{aligned} & [\delta P(x, y, t) - \delta P'(x + dx, y, t)] dy dz - \\ & - [\tau(x, y, t) - \tau'(x, y + dy, t)] dx dz = \\ & = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial t^2} dx dy dz. \end{aligned}$$

Or, le volume occupé au temps  $t$  par la masse  $dm$  est

$$dV_t \cong \left( dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Nous admettons que le coefficient de compressibilité

$$\kappa = - \frac{dV_t - dV_0}{dV_0 \delta P}$$

est constant, étant donné les faibles variations de pression.

Alors

$$\delta P = - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

et

$$\delta P - \delta P' = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

D'autre part

$$\tau = \eta \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t},$$

où  $\eta$  est le coefficient de viscosité du fluide.

Donc

$$\tau - \tau' = - \eta \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^2 \partial t} dy.$$

Posons pour simplifier  $\frac{1}{\kappa \rho_0} = c^2$  et  $\frac{\eta}{\rho_0} = v$ .  $v$  est, par définition, le coefficient de viscosité cinématique. Nous pouvons écrire finalement

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{v}{c^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^2 \partial t}$$

On voit qu'on obtient une équation de d'Alembert (qui régit la propagation des ondes indéformables de vitesse  $c$ ) du type

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

complétée par un second membre dû à la présence des forces de viscosité dans le continu fluide.

Cherchons le régime permanent du champ sonore correspondant à des vibrations sinusoïdales et satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{array}{ll} \xi = 0 & \text{pour : } x \geq 0 \\ \xi = F(y) \sin \omega t & : x = 0 \\ \xi \text{ reste fini} & : x \rightarrow \infty, 0 \leq y \leq h \end{array} \right\} t \geq 0$$

$\xi = F(y) \sin \omega t$  représente l'action d'une source en  $x = 0$ .

Passons aux fonctions complexes et cherchons une solution de la forme

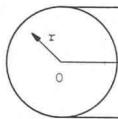
$$\xi^* (x, y, t) = X(x) Y(y) e^{i \omega t}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\xi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{h} y e^{-\alpha_n x} \sin(\omega t - k_n x)$$

avec

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{h} y.$$



Les constantes  $C_n$  sont donc les coefficients de Fourier de la fonction  $F(y)$ .

(Il est légitime d'écrire les deux séries précédentes étant donné la forme de l'équation aux dérivées partielles et la nature physique du problème.)

Nous nous intéressons en particulier aux valeurs du coefficient d'amortissement  $\alpha$  et du nombre d'onde  $k$ . Le calcul donne

$$\alpha_n = + \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{n^2 \pi^2 v}{h^2 \omega}\right)^2}}{2}}$$

$$k_n = + \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{n^2 \pi^2 v}{h^2 \omega}\right)^2}}{2}}$$

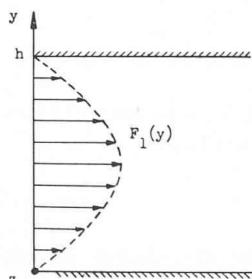


Fig. 2.

Plaçons-nous dans le cas (fig. 2) où l'amplitude des vibrations de la source est distribuée selon une sinusoïde

$$F_1(y) = C_1 \sin \frac{\pi}{h} y.$$

Alors seulement les coefficients  $\alpha_1$  et  $k_1$  existent. Nous pouvons les écrire d'autant plus exactement que la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  est élevée

$$\alpha_1 = \frac{v\pi^2}{2ch^2}$$

et

$$k_1 = \frac{\omega}{c}$$

On remarquera que la dispersion de la célérité est devenue pour nous une quantité négligeable, puisque  $k_1 \approx \omega/c$ .

Voici un deuxième exemple d'intégration :

#### **Champ sonore dans un cylindre à section circulaire**

Si, au lieu de prendre comme limites deux demi-plans, on considère une surface cylindrique (fig. 3), nous pouvons écrire, avec les notations en figure,

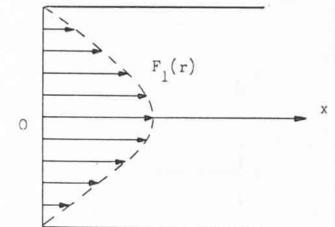


Fig. 3.

Fig. 4.

$$\frac{v^2 \xi}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{v}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial t} \right).$$

La recherche d'une solution du même type que précédemment, avec les mêmes conditions aux limites, mutatis mutandis, amène à

$$\xi(x, r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_o \left( \frac{a_i}{R} r \right) e^{-\alpha_i x} \sin(\omega t - k_i x)$$

avec, si  $F(r) \sin \omega t$  représente l'action d'une source à la limite  $x = 0$ ,

$$F(r) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_o \left( \frac{a_i}{R} r \right).$$

Les constantes  $C_i$  sont les coefficients d'un développement de Fourier-Bessel de la fonction  $F(r)$ ;  $R$  est le rayon du cylindre, tandis que les  $a_i$  sont les racines positives de l'équation en  $a$ :

$$J_o(a) = 0.$$

(On remarquera que, par la nature du problème, la fonction de Bessel  $J_o$  apparaît seule, car la fonction de Neumann  $N_o$  est exclue de la solution).

Les expressions donnant les coefficients  $\alpha_i$  et  $k_i$  sont celles calculées dans le problème précédent, où la quantité

$$\frac{n\pi}{h} \text{ est remplacée par } \frac{a_i}{R}.$$

Comme auparavant, supposons d'être en présence du cas le plus simple, c'est-à-dire celui où l'amplitude des vibrations de la source est donnée par

$$F_1(r) = C_1 J_o \left( \frac{a_1}{R} r \right)$$

où  $a_1$ , la plus petite racine positive de  $J_o(a) = 0$ , vaut

$$a_1 = 2,4048.$$

Dans ce cas, nous aurons ainsi uniquement les coefficients

$$\alpha_1 = \frac{va_1^2}{2cR^2}$$

et

$$k_1 = \frac{\omega}{c}$$

avec les mêmes remarques que pour le cas précédent.

### Conclusion

Voilà donc esquissé en un minimum de lignes cette solution élémentaire.

Cherchons maintenant un point de comparaison.

A défaut de résultats empiriques, nous l'avons choisi dans la solution du même problème (champ sonore entre deux plans) donnée par Lord Rayleigh dans son ouvrage *The Theory of Sound* (§ 352, Second Edition, Dover Publications, New York, 1945).

Par la voie plus générale des équations fondamentales de la mécanique des fluides, Lord Rayleigh a recherché, en variables d'Euler, le champ permanent des vitesses pour des ondes sinusoïdales, en admettant toutefois des hypothèses moins restrictives que les nôtres sur la direction des mouvements vibratoires : il les suppose avoir lieu dans les plans  $z = cte$ , mais non uniquement selon l'axe  $ox$  (se rapporter à la fig. 1).

On peut remarquer que nous avons calculé le champ de l'elongation en variables de Lagrange, mais la comparaison des coefficients d'amortissement et des nombres d'ondes obtenus par les deux méthodes a un sens.

D'autre part, quels que soient les mouvements hypothétiques des « particules », le problème réel à résoudre est identique : il n'est par conséquent pas incohérent de comparer certains résultats.

Bornons nous à extraire des calculs de première approximation du début du § 352, l'égalité 19) que nous séparons en deux et présentons ici avec nos notations

$$\alpha = \frac{1}{hc} \sqrt{\frac{v\omega}{2}} \quad \text{et} \quad k = \frac{\omega}{c} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{h}{v} 2\omega}} \right)$$

tout en conservant la forme simplifiée originale.

(Ces expressions sont uniques, la solution n'étant pas donnée sous la forme d'une série.)

Constatons d'abord qu'à ce stade d'approximation il n'y a pas lieu d'épiloguer sur les valeurs des nombres d'ondes, assimilables dans les deux cas de calculs à

$$k \cong \frac{\omega}{c}.$$

Puis dessinons la figure 5 où  $\alpha(h, \omega)$  donne un plan en coordonnées logarithmiques.

Les positions des plans A) et B) sont certainement différentes, mais l'écart est plausible, car il s'agit aussi de résultats tous deux approchés sous plusieurs aspects.

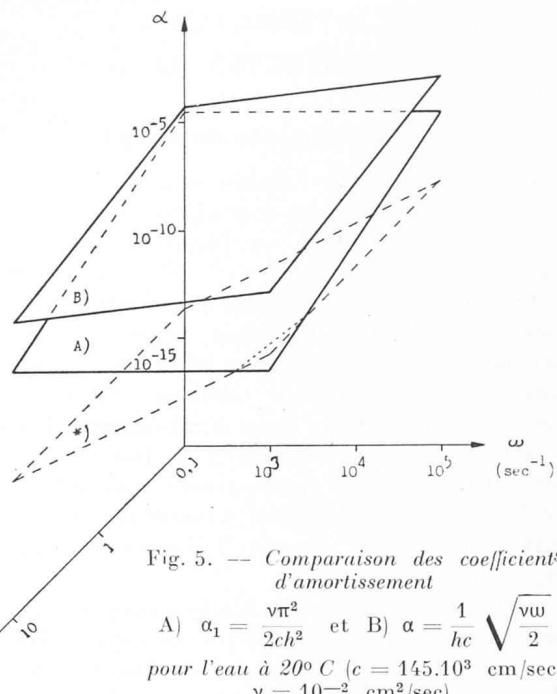


Fig. 5. -- Comparaison des coefficients d'amortissement

A)  $\alpha_1 = \frac{v\pi^2}{2ch^2}$  et B)  $\alpha = \frac{1}{hc} \sqrt{\frac{vw}{2}}$   
pour l'eau à  $20^\circ C$  ( $c = 145 \cdot 10^3$  cm/sec,  
 $v = 10^{-2}$  cm $^2$ /sec).  
(échelles logarithmiques)

Il est aléatoire de s'engager dans un choix général, et la conclusion pourrait être la suivante :

Les surfaces A) et B) devraient situer la zone donnant l'ordre de grandeur du coefficient d'amortissement par viscosité des ondes de la forme étudiée et de fréquence audible, se propageant dans de l'eau comprise entre deux plans limites, parallèles et rigides, situés à faible distance l'un de l'autre.

Il en est de même dans le cas des autres liquides et de gaz.

\* Appendice relatif à l'emploi, dans des problèmes aux limites, du coefficient d'amortissement

$$\alpha = \frac{2}{3} v \frac{\omega^2}{c^3}$$

des grandeurs caractéristiques attachées aux ondes sinusoïdales unidimensionnelles ayant leur siège dans un milieu supposé sans bornes.

En figure 5 est dessiné en pointillé (puisque non réel) un plan qui a pour ligne de plus grande pente la droite (en coordonnées logarithmiques)

$$\alpha(\omega) = \frac{2}{3} v \frac{\omega^2}{c^3}.$$

Il ressort de la comparaison que la simplification consistant à employer cette formule dans des problèmes aux limites serait une approximation excessive, du moins dans la région des basses fréquences et faibles distances entre limites.

Ce fait pourrait manifester son importance, par exemple, dans les calculs de filtres acoustiques où l'on fait intervenir la viscosité.

[Un exemple de filtre acoustique pour canalisations d'eau se trouve dans un article de M. Pierre Liénard paru dans le « Colloque international d'acoustique architecturale », Marseille, 11-17 avril 1950 (C.N.R.S.).]

Ce filtre est basé sur une étude de M. Yves Rocard faisant appel à une théorie du même auteur, théorie qui a, à son point de départ, le coefficient d'absorption pour un milieu sans bornes.

Remarquons d'ailleurs qu'il est possible de trouver dans ces exemples de calcul de filtres acoustiques quelques questions à préciser, dont celle-ci :

Il nous semble que, dans l'article cité, les formules n'aient pas été adaptées d'une manière complète au cas des liquides.]