

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 81 (1955)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Théorie des plaques plastiques  
**Autor:** Prager, William  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61329>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

**Abonnements:**  
Suisse: 1 an, 24 francs  
Etranger: 28 francs  
Pour sociétaires:  
Suisse: 1 an, 20 francs  
Etranger: 25 francs  
Prix du numéro: Fr. 1.40  
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande »  
N° II. 57 78, à Lausanne.  
**Expédition**  
Imprimerie « La Concorde »  
Terreaux 31 — Lausanne.  
**Rédaction**  
et éditions de la S. A. du  
Bulletin technique (tirés à  
part), Case Chauderon 475  
**Administration générale**  
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; † E. Lateltin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. † L. Archinard, ingénieur; Cl. Groscurin, architecte; E. Martin, architecte — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; Burgener, D. architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration  
de la Société anonyme du Bulletin technique: A. Stucky, ingénieur, président;  
M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

## Tarif des annonces

1/1 page	Fr. 264.—
1/2 »	» 134.40
1/4 »	» 67.20
1/8 »	» 33.60

Annonces Suisses S. A.  
(ASSA)



Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26  
Lausanne et succursales

**SOMMAIRE:** *Théorie des plaques plastiques*, par WILLIAM PRAGER, professeur de mécanique appliquée, Brown University, Providence, R. I., U. S. A. — **DIVERS:** *Problèmes soulevés par le projet du canal transhelvétique*. — Société suisse des ingénieurs et des architectes: *Communiqué du Secrétariat*. — **BIBLIOGRAPHIE.** — **LES CONGRÈS:** *Journées internationales de Traction dans les chemins de fer; Journées internationales de l'usinage.* — **SERVICE DE PLACEMENT.** — **DOCUMENTATION GÉNÉRALE.** — **NOUVEAUTÉS, INFORMATION DIVERSES.**

## THÉORIE DES PLAQUES PLASTIQUES

par WILLIAM PRAGER

Professeur de mécanique appliquée  
Brown University, Providence, R.I., U.S.A.

### 1. Introduction

L'étude de la flexion des plaques a été un des premiers problèmes de l'élasticité qui ait attiré l'attention des savants, probablement à cause de l'analogie avec la théorie de la poutre, qui était bien développée. Cauchy s'est intéressé à l'élasticité quand il fut nommé membre d'une commission chargée d'étudier un mémoire de Navier, traitant les plaques élastiques, soumis à l'Académie des sciences en 1820. A cause de l'importance des contributions de Cauchy [1], le développement de la théorie mathématique de l'élasticité est donc étroitement lié à celui de la théorie des plaques élastiques.

La théorie de la plasticité, inaugurée par de Saint-Venant [2], en 1870, n'a pas suivi la même voie. Même dans les ouvrages récents sur la théorie de la plasticité, on ne trouve que peu d'études traitant la flexion plastique des plaques [3]. Des progrès considérables ont cependant été réalisés ces dernières années. Nous présentons, dans cet article, un résumé de ces recherches pouvant servir d'introduction aux travaux plus détaillés publiés dans nombre d'articles et rapports récents, dont certains ne sont pas encore accessibles.

### 2. Relations entre les moments fléchissants principaux et les courbures principales

Les problèmes envisagés dans cet article traitent les plaques circulaires avec charges et supports à symétrie cylindrique. Soient  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$  les coordonnées cylindriques,  $z$  étant l'axe vertical dirigé vers le bas, et supposons la plaque limitée par les plans  $z = \pm h/2$  et le cylindre  $r = R$ . La plaque est soit simplement appuyée, soit encadrée tout le long de son bord. La charge transversale appliquée  $p = p(r)$  est considérée comme positive quand elle est dirigée vers le bas.

A cause de la symétrie cylindrique de la charge et du support, aucune tension tangentielle n'est transmise à travers les sections  $\phi = \text{const.}$  De plus, si l'épaisseur  $h$  de la plaque est petite comparée au rayon  $R$ , les tensions normales transmises à travers les sections  $z = \text{const.}$  et les tensions tangentielles verticales transmises à travers les sections  $r = \text{const.}$  sont petites comparées aux tensions de flexion radiales et circonférentielles. Il s'ensuit que l'état de tension en un point quelconque peut être considéré comme un état plane, les tensions principales étant la tension radiale  $\sigma$  et la tension circonférentielle  $\tau$ .

L'approximation de la théorie des plaques minces est valable pour autant que les conditions tri-dimensionnelles d'équilibre des tensions locales soient remplacées par les conditions bi-dimensionnelles d'équilibre des résultantes des tensions, et que les conditions tri-dimensionnelles de compatibilité pour les déformations locales soient remplacées par les conditions bi-dimensionnelles pour les courbures et la torsion de la plaque.

Dans le cas de la symétrie cylindrique considéré ici, les résultantes des tensions sont le moment fléchissant radial  $M$ , le moment fléchissant circonferentiel  $N$  et l'effort tranchant  $T$ . Les moments fléchissants  $M$  et  $N$  résultant respectivement des tensions  $\sigma$  et  $\tau$  sont considérés comme positifs s'ils produisent des tensions de traction dans la surface inférieure de la plaque. L'effort tranchant  $T$  résulte des tensions tangentielle verticales transmises à travers une section  $r = \text{const.}$ ; la force  $T$  transmise de l'extérieur à l'intérieur du cylindre  $r = \text{const.}$  est considérée comme positive si elle est dirigée vers le bas. Toutes les résultantes des tensions sont données par unité de longueur d'éléments d'arc de la surface moyenne de la plaque.

Les conditions d'équilibre pour ces résultantes des tensions sont

$$(rT)' + rp = 0, \quad (1)$$

$$(rM)' - N - rT = 0, \quad (2)$$

où le prime indique la dérivée par rapport à  $r$ . Sauf dans le cas d'une charge appliquée au centre de la plaque, l'effort tranchant  $T$  doit s'annuler pour  $r = 0$ . L'intégration de l'équation (1) et la substitution du résultat dans (2) donnent alors

$$(rM)' - N = - \int r p dr. \quad (3)$$

Les équations d'équilibre sont indépendantes des propriétés mécaniques de la matière constituant la plaque. Elles ne sont cependant pas suffisantes pour déterminer les résultantes des tensions en fonction de  $r$ , et nous devons y adjoindre des équations qui reflètent le comportement mécanique de la matière constituant la plaque. Nous supposons que cette matière soit parfaitement plastique et obéisse à la condition de plasticité de Tresca [4], ainsi qu'à la règle de fluage y associée [5]. La matière ne peut supporter aucun état

de tension dont la tension tangentielle maximum dépasserait  $\sigma_0/2$ , où  $\sigma_0$  est la tension critique de plasticité en traction simple. Le fluage plastique peut avoir lieu seulement quand la tension tangentielle maximum est égale à  $\sigma_0/2$ , et la matière reste rigide tant que la tension tangentielle maximum est inférieure à  $\sigma_0/2$ .

Dans le cadre de notre approximation, les tensions principales en un point de la plaque sont respectivement la tension radiale de flexion  $\sigma$ , la tension circonferentielle de flexion  $\tau$ , et la tension normale au plan de la plaque, cette dernière tension étant négligeable. Puisque la tension tangentielle maximum est égale à la moitié de la différence maximum des tensions principales, les états critiques de tension pour lesquels il peut y avoir fluage plastique sont représentés dans le plan  $\sigma, \tau$  par les points du périmètre de l'hexagone de Tresca (fig. 1).

La règle de fluage adoptée dans cet article stipule que pour tout état critique de tension qui n'est pas représenté par un sommet de l'hexagone de Tresca, le mécanisme de fluage est du cisaillement pur, les vitesses de dilatation principales suivant les directions des tensions principales maximum, intermédiaire, et minimum étant respectivement  $\alpha$ , 0, et  $-\alpha$ . Puisque la matière ne présente pas d'effet de viscosité, la vitesse de dilatation  $\alpha$  peut prendre une valeur positive quelconque.

Pour illustrer cette règle de fluage, soient  $\epsilon$  et  $\eta$  les vitesses de dilatation radiale et circonferentielle. Pour un état critique de tension représenté par un point intérieur du segment  $BC$  (fig. 1), nous avons  $\epsilon = 0$ ,  $\eta > 0$ . De même pour un point intérieur du segment  $CD$ , nous avons  $-\epsilon = \eta > 0$ .

Pour un état critique de tension représenté par un sommet de l'hexagone de Tresca, nous supposons que le mécanisme de fluage puisse être une combinaison linéaire arbitraire, à coefficients positifs, des mécanismes de fluage correspondants aux côtés adjacents de l'hexagone. Par exemple, au point  $B$ , nous aurons donc  $\epsilon > 0$ ,  $\eta > 0$ , tandis qu'au point  $C$  nous aurons  $0 < -\epsilon < \eta$ .

Comme ces exemples le montrent, notre règle de fluage n'établit pas une correspondance bi-univoque entre les états critiques de tension et les mécanismes de fluage. Il est cependant aisé de s'assurer que les vitesses de dilatation radiale et circonferentielle déterminent univoquement la puissance dissipée lors du fluage. On trouve que, par unité de volume, la puissance dissipée est donnée par

$$d = \sigma\epsilon + \tau\eta = \sigma_0 \max(|\epsilon|, |\eta|, |\epsilon + \eta|). \quad (4)$$

Soit  $v = v(r)$  la vitesse verticale avec laquelle les points de la surface moyenne de la plaque se déplacent vers le bas. Les vitesses de courbure dans les directions radiale et circonferentielle sont alors

$$\kappa = -v'', \quad \lambda = -v'/r. \quad (5)$$

L'élimination de  $v$  entre ces équations conduit à la condition de compatibilité

$$\kappa - (r\lambda)' = 0. \quad (6)$$

Nous supposons que les points qui se trouvent initialement sur une normale au plan moyen de la plaque restent sur la normale correspondante de la surface

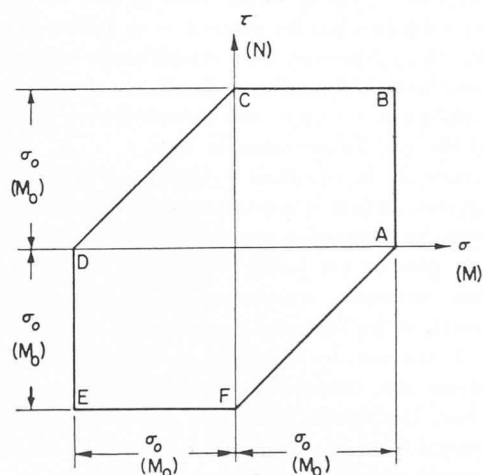


Fig. 1.

moyenne fléchie, comme cela est supposé généralement dans la théorie des plaques. Les vitesses de dilatation radiale et circonférentielle sont alors

$$\varepsilon = \kappa z, \quad \eta = \lambda z. \quad (7)$$

Introduisant (1) dans (4) et intégrant dans l'épaisseur  $h$  de la plaque, nous obtenons la puissance dissipée par unité d'aire de la surface moyenne

$$D = M_o \max(|\kappa|, |\lambda|, |\kappa + \lambda|), \quad (8)$$

avec  $M_o = \sigma_o h^2/4$ . D'autre part

$$D = M\kappa + N\lambda. \quad (9)$$

Du rapprochement de (8) et (9) nous tirons la correspondance qu'il y a entre les vitesses de courbure et les moments fléchissants. Par exemple, si  $\kappa$  et  $\lambda$  sont positifs, le second membre de (8) se réduit à  $M_o(\kappa + \lambda)$ . En égalant, pour des valeurs positives arbitraires de  $\kappa$  et  $\lambda$ , cette expression au second membre de (9), on a  $M = N = M_o$ . Parmi les relations qui peuvent être obtenues de cette manière, nous avons groupé dans la table suivante celles qui nous seront utiles dans cet article.

TABLE I

$\kappa > 0, \lambda > 0 :$	$M = N = M_o ;$	(B)
$\kappa = 0, \lambda > 0 :$	$(0 < M < M_o), N = M_o ;$	(BC)
$0 < -\kappa < \lambda :$	$M = 0, N = M_o ;$	(C)
$0 < -\kappa = \lambda :$	$\left\{ \begin{array}{l} M - N = -M_o, \\ (-M_o < M < 0, 0 < N < M_o) ; \end{array} \right\}$	(CD)
$-\kappa > \lambda > 0 :$	$M = -M_o, N = 0.$	(D)

Si les axes de coordonnées de la figure 1 représentent maintenant  $M$  et  $N$ , et si  $\sigma_o$  est remplacé par  $M_o$ , chaque ligne de cette table correspond à un sommet ou à un côté de l'hexagone, comme il est indiqué entre parenthèses. Les points du périmètre de l'hexagone représentent des états critiques de tension  $M, N$  pour lesquels l'élément considéré de la plaque peut se déformer plastiquement. L'élément de la plaque reste rigide pour les états de tension  $M, N$  représentés par les points intérieurs de l'hexagone et ne peut pas supporter des états de tension représentés par des points extérieurs à l'hexagone. Cette dernière condition se traduit par les inégalités entre parenthèses des deuxième et quatrième lignes de la table I. Nous dirons dorénavant qu'une région circulaire ou annulaire de la plaque est en régime plastique  $B, BC...$  quand les conditions de la ligne correspondante de cette table sont satisfaites.

Le régime plastique correspondant au côté  $AB$  de l'hexagone implique que  $\kappa > 0$  et  $\lambda = 0$ . Puisque ceci est en contradiction avec la condition de compatibilité (6), ce régime est impossible. La même remarque peut être faite pour le régime  $DE$ . Finalement les régimes  $E, EF, F, FA$  et  $A$  impliquent des valeurs négatives de  $\lambda$ , et donc des valeurs positives de  $\nu'$  qu'il n'est pas probable de voir se produire sous des charges positives. En conséquence, seuls les régimes de la table I seront considérés dans la discussion suivante.

### 3. Charge de fluage

Considérons une plaque circulaire simplement appuyée, ou encastrée sur son contour et constituée d'une matière rigide parfaitement plastique obéissant à la condition de plasticité de Tresca et à la règle de fluage  $y$  associée. Supposons cette plaque soumise à une certaine distribution de charges graduellement croissantes. La plaque restera rigide pour des charges suffisamment faibles, et le fluage n'apparaîtra que quand l'intensité des charges aura atteint une valeur critique dite charge de fluage de la plaque pour les conditions considérées.

En appliquant les formules du paragraphe précédent pour déterminer la charge de fluage d'une plaque, nous devons garder présent à l'esprit le fait qu'en général la plaque se scindera en une région circulaire centrale, et en régions annulaires concentriques qui seront dans des régimes plastiques différents. C'est pourquoi nous allons discuter les relations qui existent entre les différentes grandeurs mécaniques de part et d'autre d'une circonférence  $\Gamma$  séparant deux de ces régions.

Pour le problème statique considéré dans ce paragraphe, l'équilibre et la cohésion de la plaque impliquent que l'effort tranchant  $T$ , le moment fléchissant radial  $M$  et la vitesse de déplacement  $\nu$  soient continus au travers de  $\Gamma$ . En discutant le comportement des grandeurs mécaniques restantes  $N, \kappa$  et  $\lambda$ , nous ne considérerons pas le cas où  $\kappa = \lambda = 0$  sur  $\Gamma$ , car il est peu probable qu'il se présente dans les applications.

Si  $N, \kappa$  et  $\lambda$  sont continus au travers de  $\Gamma$ , l'état de tension sur  $\Gamma$  doit être représenté par un sommet de l'hexagone. Il en est de même si  $\lambda$  est continu mais  $\kappa$  discontinu au travers de  $\Gamma$ .

Une circonférence au travers de laquelle  $\lambda$  et  $\nu'$  sont discontinus sera appelée une circonférence-charnière. Dans le cas de la symétrie cylindrique considéré ici, le concept de la circonférence-charnière remplace le concept de la rotule plastique, familière dans l'étude de la poutre plastique. Une circonférence-charnière doit être considérée comme le cas limite d'un anneau borné par des circonférences très voisines, au travers duquel  $\nu'$  varie très rapidement, mais de façon continue. Quand les circonférences bornant l'anneau se confondent, le rapport  $\kappa/\lambda$  devient infini. En conséquence, sur une circonférence-charnière, nous devons avoir le régime  $B$  ou le régime  $D$ , si nous ne considérons que les régimes de la table I. En d'autres termes, la vitesse angulaire  $\nu'$  doit être continue sauf, au plus, sur les circonférences pour lesquelles  $|M| = M_o$ .

Pour déterminer la charge de fluage d'une plaque circulaire avec charges et supports à symétrie cylindrique, nous devons donc résoudre le problème suivant. L'intensité  $p = p(r)$  de la charge étant donnée à un facteur constant près, trouver la plus grande valeur  $f$  de ce facteur pour laquelle on peut trouver des fonctions  $M(r), N(r)$  et  $\nu(r)$  telles que, dans le domaine  $0 \leq r \leq R$ , les conditions suivantes soient satisfaites :

1. Le domaine  $0 \leq r \leq R$  se scinde en des intervalles tels que, dans tout intervalle, les fonctions  $M, N$  et  $\nu$  soient respectivement de classe  $C^1, C^0$  et  $C^2$ .

2.  $M$  et  $N$  satisfont à l'équation d'équilibre (3) dans laquelle  $p$  doit être remplacé par  $f p$ ; au centre de la plaque,  $M = N$ .

3. Le point  $M$ ,  $N$  se trouve à l'intérieur de l'hexagone, ou sur le périmètre de l'hexagone de la figure 1 ; dans le premier cas, les vitesses de courbure (5) doivent s'annuler ; dans le second cas, elles doivent être liées aux moments fléchissants  $M$ ,  $N$ , en conformité avec la table I.

4. La vitesse angulaire  $\varphi'$  ne peut être discontinue que lorsque  $M = M_o$ .

5. Quand la plaque est simplement appuyée,  $M = 0$  et  $\varphi = 0$  pour  $r = R$  ; quand la plaque est encastrée,  $\varphi = 0$  et soit  $\varphi' = 0$ , soit  $M = M_o$  pour  $r = R$  ; dans ce dernier cas le contour  $r = R$  est une circonférence-charnière.

Les exemples suivants illustreront la façon de résoudre de tels problèmes.

#### 4. Exemples

La plaque simplement appuyée, représentée dans la figure 2, a une épaisseur constante et est soumise aux

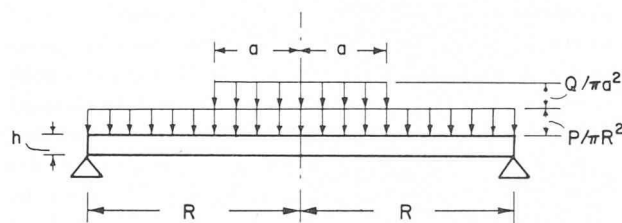


Fig. 2.

charges  $P$  et  $Q$  ; la première est distribuée uniformément sur toute la plaque, tandis que la seconde est distribuée uniformément sur un cercle central de rayon  $a$ . En conséquence

$$p = \begin{cases} \frac{P}{\pi R^2} + \frac{Q}{\pi a^2} & \text{pour } 0 \leq r < a, \\ \frac{P}{\pi R^2} & \text{pour } a < r \leq R. \end{cases} \quad (10)$$

Les moments fléchissants  $M$  et  $N$  résultant de ces charges sont positifs dans toute la plaque. Il s'ensuit que la plaque se trouve dans le régime plastique  $BC$ , c'est-à-dire que le moment fléchissant circonférentiel  $N$  a partout la valeur  $M_o$ . Avec cette valeur connue de  $N$ , et avec la condition initiale  $M = N = M_o$  pour  $r = 0$ , l'intégration de l'équation d'équilibre pour la charge  $f p$  donne

$$M = \begin{cases} M_o - \frac{1}{6} f \left( \frac{P}{\pi R^2} + \frac{Q}{\pi a^2} \right) r^2 & \text{pour } 0 \leq r \leq a, \\ M_o - \frac{1}{6} f \frac{P}{\pi R^2} r^2 - \frac{1}{6} f \frac{Q}{\pi a^2} \left( 3a^2 - 2 \frac{a^3}{r} \right) & \text{pour } a < r \leq R. \end{cases} \quad (11)$$

Puisque  $M$  doit s'annuler pour  $r = R$ , le facteur  $f$  déterminant la charge de fluage vaut

$$f = \frac{6 \pi M_o}{P + Q \left( 3 - 2 \frac{a}{R} \right)}. \quad (12)$$

Notons que ce facteur ne dépend pas du rayon  $R$  de la plaque, mais uniquement du rapport  $a/R$ . L'équation (12) contient les cas particuliers suivants :

1. Une charge  $P$  uniformément répartie sur toute la plaque :  $f = 6 \pi M_o / P$ .

2. Une charge concentrée  $Q$  appliquée au centre de la plaque :  $f = 2 \pi M_o / Q$ .

La vitesse verticale  $\varphi$  associée aux moments fléchissants (11) est donnée par

$$\varphi = \varphi_o \left( 1 - \frac{r}{R} \right), \quad (13)$$

où  $\varphi_o$  est la vitesse verticale du centre de la plaque. Puisque la matière n'est pas visqueuse, la vitesse  $\varphi$  n'est déterminée qu'au facteur  $\varphi_o$  près.

Considérons maintenant une plaque encastrée d'épaisseur uniforme et soumise à une charge  $p$  uniformément répartie. La partie de la plaque intérieure à une certaine circonférence  $r = \rho$  sera dans le régime plastique  $BC$ , et l'anneau extérieur sera dans le régime  $CD$ . Cette dernière condition implique que  $\kappa = -\lambda$ , d'où :

$$\varphi'' + \varphi'/r = 0 \quad \text{pour } \rho \leq r \leq R. \quad (14)$$

Puisque  $\varphi$  s'annule pour  $r = R$ , l'équation différentielle (14) implique que la vitesse verticale  $\varphi$  est proportionnelle à  $\log(R/r)$  dans l'anneau  $\rho \leq r \leq R$ . Il s'ensuit que la vitesse angulaire  $\varphi'$  ne peut pas s'annuler à l'encastrement, qui doit donc être une circonférence-charnière. En conséquence,  $M = -M_o$  à l'encastrement.

Dans la région centrale  $r < \rho$ , nous avons le régime plastique  $BC$ , donc  $N = M_o$ . Avec cette valeur de  $N$  et la condition initiale  $M = N = M_o$  pour  $r = 0$ , l'intégration de l'équation d'équilibre pour la charge  $f p$  donne

$$M = M_o - \frac{1}{6} f p r^2 \quad \text{pour } 0 \leq r \leq \rho. \quad (15)$$

Puisque sur la circonférence  $r = \rho$  nous passons du régime plastique  $BC$  au régime plastique  $CD$ , il faut que  $M = 0$  sur cette circonférence. Donc

$$\rho^2 = \frac{6 M_o}{f p}. \quad (16)$$

Pour  $r > \rho$  nous avons le régime  $CD$ , donc  $N = M = -M_o$ . Avec cette valeur de  $N$  et la condition initiale  $M = 0$  pour  $r = \rho$ , l'intégration de l'équation d'équilibre pour la charge  $f p$  donne

$$M = M_o \log \frac{r}{\rho} - \frac{1}{4} f p (r^2 - \rho^2). \quad (17)$$

Au contour  $r = R$ , nous avons  $M = -M_o$ . Si nous remplaçons, dans l'équation (17),  $f p$  par la valeur tirée de (16), nous obtenons l'équation transcendante

$$1 + \log \frac{R}{\rho} = \frac{3}{2} \left( \frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right), \quad (18)$$

qui détermine  $R/\rho$ . La résolution numérique de cette équation, et la substitution du résultat dans (16), donnent le facteur  $f$ . Exprimé en fonction de la charge totale  $P = \pi R^2 p$ , ce facteur est  $f = 11,26 M_o / P$ . Pour la plaque encastrée ce facteur est donc presque le double du facteur trouvé pour la plaque simplement appuyée.

Le lecteur trouvera des résultats supplémentaires concernant les charges de fluage des plaques circulaires dans un article de Hopkins et Prager [7].



### 5. Economie maximum de matière

Considérant une plaque circulaire avec charges et supports à symétrie cylindrique, nous nous proposons de déterminer l'épaisseur variable  $h = h(r)$  de la plaque de telle façon qu'il n'y ait pas fluage avant que les charges atteignent une valeur prescrite. Une solution quelconque de ce problème sera dite *admissible*. La solution admissible qui utilise le minimum de matière est particulièrement intéressante. Même si cette plaque de poids minimum n'est pas de réalisation pratique, elle sert de point de comparaison utile pour juger d'autres déterminations de plaques.

Une solution admissible a en général un mode unique de fluage plastique. Par exemple, une plaque simplement appuyée, d'épaisseur constante et soumise à une charge uniformément répartie se déformera suivant le mode (13). D'autre part, la solution admissible de poids minimum doit présenter une infinité de modes de fluage. En effet, le nombre de modes de fluage linéairement indépendants d'une structure de poids minimum est égal au nombre des dimensions qui sont au choix du constructeur. Une plaque dont l'épaisseur varie continuellement présentera donc une infinité de modes de fluage linéairement indépendants. Pour que ces modes de fluage soient possibles, tout en satisfaisant à l'équation d'équilibre, l'état de tension en tout point de la plaque doit admettre des mécanismes de fluage multiples. En d'autres termes, l'état de tension en tout point d'une plaque de poids minimum est représenté par un sommet de l'hexagone de la figure 1.

Pour illustrer l'application de ce principe, considérons la plaque simplement appuyée représentée dans la figure 3. Puisqu'en tout point de la plaque,  $M$  et  $N$

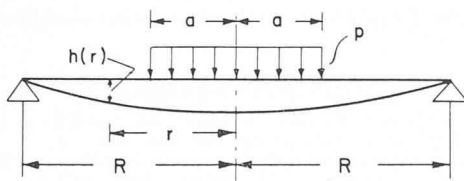


Fig. 3.

sont positifs, l'état de tension doit partout être représenté par le sommet B de l'hexagone, mais maintenant, le moment critique  $M_o$  est une fonction de  $r$ . Avec  $M = N = M_o$ , l'intégration de l'équation d'équilibre (3) donne

$$M_o = \begin{cases} \frac{pa^2}{2} \log \frac{R}{a} + \frac{pa^2}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & \text{pour } 0 \leq r \leq a, \\ \frac{pa^2}{2} \log \frac{R}{r} & \text{pour } a \leq r \leq R, \end{cases} \quad (19)$$

où les constantes d'intégration ont été déterminées par le fait que  $M_o$  est continu à travers la circonférence  $r = a$ , et s'annule au contour  $r = R$ . Puisque  $M_o = \sigma_o h^2/4$ , l'équation (19) donne la valeur de l'épaisseur  $h$  de la plaque en fonction de  $r$ .

Notons que (19) donne  $h = 0$  pour  $r = R$ . Ceci est une conséquence du fait que les tensions tangentielles verticales transmises à travers les sections  $r = \text{const.}$  ont été supposées petites comparées aux tensions de flexion  $\sigma$  et  $\tau$ . Si cette hypothèse est valable pour la plupart des plaques, elle ne se justifie cependant plus

au voisinage d'un contour simplement appuyé, car les tensions de flexion s'annulent sur ce contour. Le calcul de la poutre simplement appuyée et de poids minimum [8], présente le même défaut.

### 6. Expériences. Accroissement de la charge de fluage avec la flèche

La théorie précédente est faite pour une matière très idéalisée qui reste rigide au-dessous de la limite de plasticité, et qui est capable de déformations plastiques illimitées, une fois ce point atteint. Il reste à voir jusqu'à quel point les résultats de cette théorie concordent avec les mesures effectuées sur une matière élastico-plastique, telle que l'acier doux. Un important programme d'expériences, élaboré pour répondre à cette question, est en cours à Brown University. La figure 4 montre quelques résultats obtenus par Foulkes et Onat, dans le cadre de ce programme [9]. Des plaques circulaires en acier doux, simplement appuyées, ont été soumises à une charge appliquée au centre. La figure 4 montre l'accroissement de la flèche centrale  $\delta$  en fonction de la charge  $Q$  pour des plaques qui avaient le même rayon de 5 pouces et des épaisseurs de 1 pouce, 0,5 pouce et 0,25 pouce. Le comportement théorique d'une plaque parfaitement plastique, est représenté dans la figure 4, par la ligne brisée  $OAB$ . Pour les ordres de grandeur des flèches donnés par la figure 4, le comportement de chacune des plaques expérimentées est représenté approximativement par deux droites; la charge correspondant à l'ordonnée de leur point d'intersection définit la charge pratique de fluage. Pour les plaques épaisses, avec  $R/h = 5$  et 10, cette charge pratique de fluage est aux environs de 90 % de la charge théorique de fluage. Ceci nous donne une mesure de la signification pratique de notre théorie, pour les plaques relativement épaisses. Pour la plaque très mince où  $R/h = 20$ , la théorie précédente ne nous donne aucune indication valable. Ceci est dû à l'importante déformation que cette plaque peut subir dans le domaine élastique. Au début du fluage plastique, la plaque n'est plus plane, comme le suppose la théorie.

Même dans le cas de la plaque relativement épaisse, pour laquelle la surface moyenne est pratiquement plane au début du fluage, la théorie précédente ne peut guère donner plus qu'une estimation de la charge au début du fluage. Quand le fluage continue, la plaque plane se déforme en une coque de révolution. Pour prévoir l'accroissement de la charge qui est nécessaire pour maintenir le fluage, les formules précédentes doivent être remplacées par les formules correspondantes pour les coques de révolution [10]. Comme cette façon de procéder est assez complexe, Onat et Haythornthwaite [11] ont proposé la méthode simplifiée suivante.

La distribution des vitesses (13) implique que le plan moyen de la plaque se transforme en un cône. Supposons donc que la plaque conserve une forme conique au début du fluage. Si la plaque peut glisser librement sur son support annulaire, ce type de déformation n'entraîne aucune vitesse de dilatation radiale ou de courbure radiale. Il s'ensuit que la distance  $r$  d'un point de la surface moyenne conique, au sommet du cône, est la même que la distance initiale de ce point au centre de la plaque plane. Quand l'angle  $\beta$  que les génératrices

du cône forment avec sa base horizontale, est petit, la flèche centrale peut s'écrire

$$\delta \approx R\beta, \quad (20)$$

et la dilatation circonférentielle de la surface moyenne vaut

$$\cos \beta - 1 \approx -\beta^2/2. \quad (21)$$

Puisque la matière n'est pas visqueuse, l'unité de temps est arbitraire et nous pouvons donc identifier le temps avec l'angle  $\beta$ . La vitesse de dilatation circonférentielle de la surface moyenne est alors

$$\eta_o \approx -\beta. \quad (22)$$

De même, on trouve que la vitesse de courbure circonférentielle vaut

$$\lambda \approx 1/r. \quad (23)$$

La puissance dissipée par unité d'aire de la surface moyenne est donc

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_o |\eta_o + \lambda z| dz = \sigma_o \left\{ \frac{\eta_o^2}{|\lambda|} + |\lambda| \frac{h^2}{4} \right\}. \quad (24)$$

Remplaçons  $\eta_o$  et  $\lambda$  par leurs valeurs (22) et (23) et intégrons (24) sur la surface moyenne de la plaque. Nous obtenons ainsi la puissance totale dissipée

$$\int_0^R 2\pi r D dr = \frac{2}{3} \pi \sigma_o R \delta^2 + 2\pi M_o R, \quad (25)$$

avec  $M_o = \sigma_o h^2/4$ . D'autre part, la puissance de la charge centrale  $Q$  vaut  $QR$ , puisque l'équation (20) donne la valeur  $R$  pour la vitesse verticale du point d'application de  $Q$ . En égalant le second membre de (25) à  $QR$ , et résolvant par rapport à  $Q$ , nous trouvons

$$Q = 2\pi M_o \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{\delta^2}{h^2} \right). \quad (26)$$

A cause des hypothèses simplificatrices faites au cours de l'établissement de cette formule, qui est représentée par la courbe AC de la figure 4, nous ne pouvons pas espérer plus qu'une évaluation grossière de l'accroissement de la charge  $Q$  en fonction de la flèche  $\delta$ . Pour la plaque la plus épaisse, pour laquelle  $R/h = 5$ , nous obtenons un accord assez bon entre l'expérience et les valeurs données par cette formule.

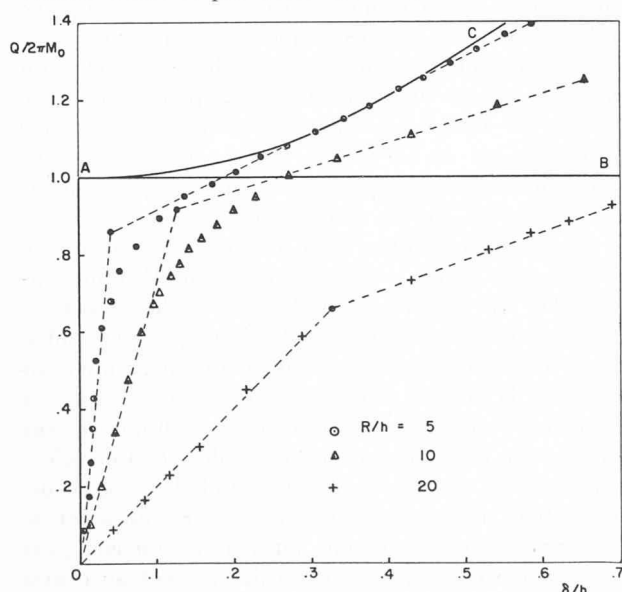


Fig. 4.

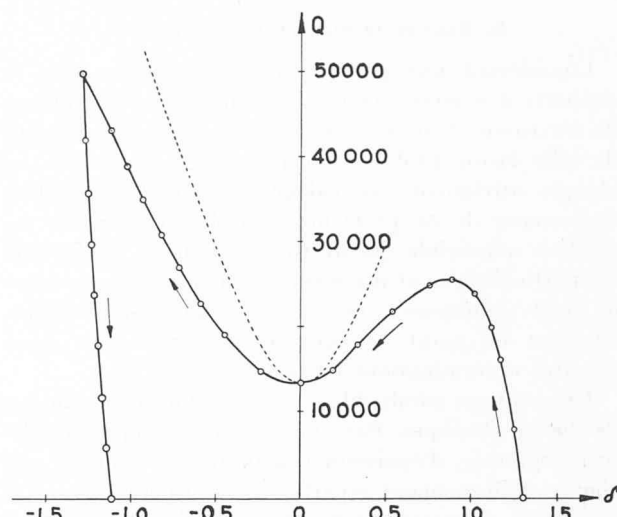


Fig. 5.

Une autre confirmation de notre théorie peut être obtenue de la façon suivante, indiquée par Haythornthwaite et Onat [12]. Après que la plaque a subi une certaine déformation plastique, elle est déchargée et inversée sur son support annulaire, de façon qu'elle présente l'aspect d'une coque légèrement bombée. Quand cette coque est de nouveau chargée, le fluage plastique en réduit la flèche et la charge de fluage décroît avec elle. A l'instant où la flèche s'annule, la charge de fluage doit avoir la valeur donnée par notre théorie. La figure 5 représente les résultats d'une telle expérience réalisée par Haythornthwaite et Onat. La ligne pointillée de cette figure correspond à la formule (26). Pour des valeurs suffisamment petites de la flèche, l'accord entre l'expérience et la théorie est excellent.

#### NOTES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. L. CAUCHY, *Exercices de Math.*, vol. 2 (1827), p. 1, 42, 60, 108; vol. 3 (1828), p. 160, 188, 213, 237.
- [2] B. DE SAINT-VENANT, *C. R. Ac. Sci.*, vol. 70 (1870), p. 473; vol. 73 (1871), p. 1181; vol. 74 (1872), p. 1009, 1083.
- [3] V. V. SOKOLOVSKY, *Teoriya Plastichnosti*, Moscou, 1946, contient une discussion de la flexion plastique des plaques, mais comme ce travail est basé sur une relation entre les tensions et la déformation plastique totale, les récentes critiques faites au sujet des lois de tension-déformation de ce type rendent sa valeur problématique. (Voir, par exemple, W. PRAGER, *Journal Applied Physics*, vol. 19 (1948), p. 540.) La flexion plastique des plaques n'est pas examinée dans A. NADAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 1, New York, 1950; la flexion cylindrique seule est traitée dans R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford, 1950, et O. HOFFMAN et G. SACHS, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*, New York, 1953. La charge de fluage des plaques parfaitement plastique est discutée brièvement dans W. PRAGER et P. G. HODGE, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, New York, 1951, mais aucun problème concret n'est résolu complètement dans cet ouvrage.
- [4] H. TRESCA, *Mém. prés. par div. sav.*, vol. 18 (1868), p. 733.
- [5] Voir par exemple, W. PRAGER, *Journal Appl. Mech.*, vol. 20 (1953), p. 317.
- [6] On notera que  $d$  est la fonction de support pour l'hexagone de Tresca. (Voir H. MINKOWSKI, *Math. Annalen*, vol. 57 (1903), p. 447.)
- [7] H. G. HOPKINS et W. PRAGER, *Journal Mech. Physics of Solids*, vol. 2 (1953), p. 1.
- [8] Voir par exemple, S. TIMOSHENKO, *Strength of Materials*, vol. 1, New York, 1940, p. 215, Problème 8.
- [9] L'auteur remercie MM. J. Foulkes et E. T. Onat pour la permission d'inclure leurs résultats dans cet article.
- [10] E. T. ONAT et W. PRAGER, Brown University Report DA-789/13 (à paraître dans les *Proceeds.*, K. Nederl. Akad. Wet.).
- [11] E. T. ONAT et R. M. HAYTHORNTHWAITE, Brown University Report OOR-3172/4.
- [12] R. M. HAYTHORNTHWAITE et E. T. ONAT, Brown University Report OOR-3172/5.