Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 81 (1955)

Heft: 25

Artikel: L'emploi en topographie de l'affinité et de la transformation d'Helmert

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61403

81e année | 10 décembre 1955 | N° 25

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Abonnements:
Suisse: 1 an, 24 francs
Etranger: 28 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 20 francs
Etranger: 25 francs
Prix du numéro: Fr. 1.40
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande » N° II. 57 75, à Lausanne.
Expédition
Imprimerie « La Concorde » Terreaux 31 — Lausanne.
Rédaction
et éditions de la S. A. du Bulletin technique (tirés à part), Case Chauderon 475
Administration générale
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

SOMMAIRE : *L'emploi en topographie de l'affinité et de la transformation d'Helmert*, par A. Ansermet, ing. prof. EPUL. — Association amicale des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne : *Rapport du Comité sur l'exercice 1954*. — — Bibliographie. — Les Congrès : *Comité national suisse pour l'irrigation et le drainage*. — *Avis à nos abonnés*. — Service de placement. — Documentation générale. — Documentation du batiment. — Nouveautés, Informations diverses.

L'EMPLOI EN TOPOGRAPHIE DE L'AFFINITÉ ET DE LA TRANSFORMATION D'HELMERT

par A. ANSERMET, ing. prof. EPUL

Généralités

Lorsqu'on exécute des travaux de génie civil de très grande envergure, tels que le percement de longs tunnels, il faut disposer d'éléments topographiques précis, sous la forme d'un réseau de points fixes servant de bases aux divers tracés. Une solution consiste à utiliser, en la complétant, la triangulation existante. Parfois on préfère créer un réseau autonome ; ce fut le cas lors de la construction du tunnel du Simplon où on eut recours à une mensuration de caractère local. Les déformations résultant de la représentation plane étaient alors négligeables ou presque ce qui est un avantage. Dans le système de coordonnées ayant son origine à Berne ces déformations sont sensibles ; la transformée plane d'un côté du réseau a une courbure variable, exprimée par une fonction F en coordonnées conformes (voir [3]) et en un point (x, y) :

$$d\alpha : ds = F(x, y, K, \alpha)$$

où K est le rapport de similitude, développé en général sous forme de série, tandis que α varie avec l'orientation de ds.

En tenant compte de ces déformations et en appliquant les formules connues de la géométrie analytique on peut transformer les coordonnées et passer du système local au réseau général et réciproquement. Un tel calcul est nécessaire car certains points, au nombre de n, sont communs aux deux réseaux. Or des discordances se révèlent qu'il est impossible ou presque d'analyser et d'interpréter. C'est ce problème complexe que les praticiens s'efforcent de résoudre depuis de nombreuses années et qui tend à éliminer ces discordances, tout au moins partiellement ; ce calcul ne vise donc pas à compenser les éléments mesurés.

Les méthodes modernes d'aéromensuration donnent lieu à des difficultés analogues quand on compare les coordonnées déterminées au sol et celles obtenues par les levers aériens, appelées parfois les coordonnées de la machine (appareil à cartographier).

Parmi les multiples solutions envisagées nous en retiendrons en principe deux, en traitant le cas général (3 dimensions) :

1° on renonce à éliminer complètement les discordances ; bien qu'il ne s'agisse pas d'une véritable compensation on applique le principe des moindres carrés. C'est la méthode d'Helmert comportant, pour les figures spatiales définies par un double système de coordonnées, des déplacements et amplifications (variations d'échelle).

Considérons un cas concret : celui de 4 points dont on connaît les 12 coordonnées dans un système (xyz)

et 12 coordonnées dans un autre système $(x'y'z')$. A ces 24 éléments devrait correspondre un tétraèdre unique et bien déterminé ce qui n'est pas rigoureusement le cas, Il est impossible de trouver des formules de transformation donnant autre chose qu'une solution approchée ; des discordances subsistent. Désignons par T et T' ces deux tétraèdres, matérialisés par 4 points sur le sol. On peut déjà pressentir le rôle de la transformation affine.

2° la transformation d'Helmert n'éliminant pas complètement les discordances, de nombreux praticiens, surtout à l'étranger, ont suggéré de fractionner la figure spatiale constituée par les n points en *mailles* (Maschenweise Abbildung) ; en général c'est l'affinité qui trouve alors son application plutôt que l'homographie qui donne lieu déjà à des calculs assez laborieux.

Transformation d'Helmert

Emettons l'hypothèse que seules de petites discordances subsistent encore ; chacune d'elles est la résultante de trois composantes et l'on peut écrire le système de 3 n équations résiduelles ci-après (voir [2]) où les l, l', l'' sont ces composantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} l_i + v_{xi} &= da + x_i\,dm \qquad\quad + z_i d\eta - y_i d\zeta \\ l'_i + v_{yi} &= db + y_i\,dm - z_i d\xi \qquad\quad + x_i d\zeta \\ l''_i + v_{yi} &= dc + z_i\,dm + y_i d\xi - x_i d\eta \end{aligned}\right.$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots n$$

les v_x, v_y, v_z sont les résidus, dm une variation d'échelle et non une différentielle, $d\xi, d\eta, d\zeta$ des petites rotations, da, db, dc des translations dont l'élimination est implicitement réalisée si :

$[x] = [y] = [z] = [l] = [l'] = [l''] = 0$ (mise en coïncidence de l'origine et des centres de gravité). De plus ces trois inconnues donnent lieu aux équations normales:
$[v_x] = [v_y] = [v_z] = 0 \qquad [\ldots] = \Sigma\ldots$.

$$(2)\qquad \frac{\partial [vv]}{\partial dm} = 0 \text{ entraîne : } [xv_x] + [yv_y] + [zv_z] = 0$$

où les termes à coefficients non-quadratiques s'éliminent. On en déduit le poids de dm : $P_m = \{[xx] + [yy] + [zz]\}$ expression assimilable à un moment d'inertie polaire, donc indépendante de l'orientation des axes de coordonnées, ce que l'on pouvait présumer. Rappelons l'hypothèse faite : coïncidence des centres de gravité et de l'origine. La méthode est parfois dite du « centre de gravité » (Schwerpunktverfahren).

Il ne reste plus que trois équations normales :

$$(3)\qquad [yv_z] - [zv_y] = 0,\ [zv_x] - [xv_z] = 0,\ [xv_y] - [yv_x] = 0$$

et l'on s'efforcera de réaliser les conditions :

$$(4)\qquad [xy] \cong 0, \quad [xz] \cong 0, \quad [yz] \cong 0$$

car les coefficients quadratiques seuls subsistent et l'on a, pour les poids :

$$(5)\qquad P\xi = \{[yy] + [zz]\}, \quad P\eta = \{[xx] + [zz]\}, \quad P\zeta = \{[xx] + [yy]\}$$

On voit combien ces relations (4) simplifieraient les calculs ; on le constatera encore davantage ci-après. Les discordances v_s qui subsistent encore, après la transformation, si on les assimile à des forces, constituent un système en équilibre. (Théorème de S. Finsterwalder.)

$$v_s^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \,.$$

Variante

La même hypothèse que précédemment est faite en ce sens que la nouvelle origine des coordonnées et les centres de gravité, amenés en coïncidence, sont confondus. Entre les n points de chaque système on peut, par des combinaisons binaires, calculer $\dfrac{n(n-1)}{2}$ longueurs ce qui fournit autant de valeurs pour l'inconnue dm. Admettons comme définitif le résultat obtenu en moyennant ces valeurs (calcul pondéré).

On applique les formules connues de transformation à 9 cosinus liés par les relations dont on fait provisoirement abstraction

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

ces a, b, c, étant des cosinus dont on connaît des valeurs provisoires. Les équations résiduelles deviennent (voir [2]) :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} f_i + v'_{xi} &= x_i da_1 + y_i da_2 + z_i da_3 \\ f'_i + v'_{yi} &= \quad + x_i db_1 + y_i db_2 + z_i db_3 \\ f''_i + v'_z &= \qquad + x_i dc_1 + y_i dc_2 + z_i dc_3 \end{aligned}\right.$$

les da, db, dc étant, non pas des différentielles, mais des accroissements tandis que les termes absolus f, f', f'' et les résidus ne sont plus les mêmes qu'avant. Enfin les coordonnées x_i, y_i, z_i tiennent compte ici de l'inconnue dm déterminée ci-dessus.

Les 9 équations normales sont caractérisées par une certaine symétrie :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} [xv'_x] &= [yv'_x] = [zv'_x] = 0 \\ [xv'_y] &= [yv'_y] = [zv'_y] = 0 \\ [xv'_z] &= [yv'_z] = [zv'_z] = 0 \end{aligned}\right.$$

et si on peut négliger les coefficients non-quadratiques le gain réalisé est considérable.

Deuxième stade des calculs. Il faut tenir compte des conditions (6), ce qui donne lieu à des résidus v''_x, v''_y, v''_z s'ajoutant aux v'_x, v'_y, v'_z. D'autre part les neuf inconnues seront surcorrigées en ce sens qu'aux neuf accroissements da, db, dc s'en ajouteront d'autres que nous désignerons par (1), (2), (3) ... (9).

Les équations (6) peuvent être développées en fonction de ces nouvelles inconnues ([1] p. 271) :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_1(1) + A_2(2) + A_3(3) + \ldots = w_1 \\ &B_1(1) + B_2(2) + B_3(3) + \ldots = w_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_1(1) + F_2(2) + F_3(3) + \ldots = w_6 \end{aligned}\right.$$

où certains coefficients sont nuls.

On forme ensuite les coefficients dits transitoires (Übertragungskoeffizienten) ([1] p. 272) :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &(A_1) = A_1 Q_{11} + A_2 Q_{12} + A_3 Q_{13} + \ldots \\ &(A_2) = A_1 Q_{21} + A_2 Q_{22} + A_3 Q_{23} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(B_1) = B_1 Q_{11} + B_2 Q_{12} + B_3 Q_{13} + \ldots \\ &(B_2) = B_1 Q_{21} + B_2 Q_{22} + B_3 Q_{23} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ces coefficients Q_{hj} ($h \leq 9$, $j \leq 9$) sont déduits des équations aux poids dont les éléments sont fournis par les équations (8) ; seuls les coefficients quadratiques ($h = j$) sont différents de zéro si les conditions (4) sont réalisées. Finalement on a :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) = (A_1)k_1 + (B_1)k_2 + (C_1)k_3 + \ldots \\ (2) = (A_2)k_1 + (B_2)k_2 + (C_2)k_3 + \ldots \\ (3) = (A_3)k_1 + (B_3)k_2 + (C_3)k_3 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

les coefficients k, au nombre de six, étant déduits du système

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} [A(A)]k_1 + [A(B)]k_2 + [A(C)]k_3 + \ldots = w_1 \\ [B(A)]k_1 + [B(B)]k_2 + [B(C)]k_3 + \ldots = w_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Si les conditions (4) sont remplies on a donc :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{11} = Q_{44} = Q_{77} = 1 : [xx] \\ Q_{22} = Q_{55} = Q_{88} = 1 : [yy] \\ Q_{33} = Q_{66} = Q_{99} = 1 : [zz] \end{array} \right. \quad Q_{hj} = 0 \quad h \neq j$$

la simplification est manifeste. Il y a encore d'autres variantes.

Méthode des mailles (affinités)

Les praticiens ne s'accommodent pas toujours de la transformation d'Helmert qui laisse subsister de petites discordances. Considérons tout d'abord le cas où $n = 4$; les vingt-quatre coordonnées (xyz) et $(x'y'z')$ devraient définir un tétraèdre unique au lieu de deux (T et T'). Il y a quatre discordances à trois composantes chacune et un problème fondamental est le suivant : *Déterminer en un point quelconque les trois composantes* $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$ *connaissant les douze composantes* $(x_i - x')$, $(y_i - y')$, $(z_i - z_i')$ *où* $i = 1, 2, 3, 4$. Ce calcul est assimilable à une moyenne pondérée. Auparavant rappelons les propriétés essentielles de l'affinité : elle donne lieu au calcul de 12 paramètres au lieu de 7 dans la transformation d'Helmert ; les éléments de volume sont amplifiés dans une proportion qui dépend des paramètres et non des coordonnées ; enfin le plan à l'infini se correspond à lui-même. Analytiquement on a :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = a + d_1x + g_3y + g_2z \\ y' = b + h_3x + d_2y + g_1z \\ z' = c + h_2x + h_1y + d_3z \end{array} \right.$$

Posons, comme pour la transformation d'Helmert :

$$[x] = [y] = [z] = 0 \qquad [x'] = [y'] = [z'] = 0$$

L'origine des coordonnées et les centres de gravité de T et T' coïncident ; les paramètres a, b, c, sont éliminés dans cette hypothèse mais en général on a : $(x' - x) = = dx = a + (d_1 - 1)x + g_3y + g_2z$.

$$(15) \quad \left| \begin{array}{ccccc} dx_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ dx_2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ dx_3 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ dx_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ dx & 1 & x & y & z \end{array} \right| = 0$$

où les quatres paramètres sont éliminés. Les mineurs des éléments de la première colonne sont, en valeur absolue, proportionnels aux volumes de cinq tétraèdres, le cinquième étant la somme des autres. Le rapport entre ces volumes n'est pas altéré par la transformation. Il en résulte que :

$$(16) \quad dx = \frac{[pdx]}{[p]} \quad \text{où } [pdx] = p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3 + + p_4dx_4$$

Les poids p étant proportionnels aux volumes de quatre tétraèdres ayant leur sommet commun au point considéré. On peut faire un calcul graphique.

Au centre de gravité du tétraèdre T on a :

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

et en chaque sommet, *successivement :*

$$p_1 = [p],\ p_2 = p_3 = p_4 = 0$$
$$p_2 = [p],\ p_1 = p_3 = p_4 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le calcul pour dy et dz est analogue :

$$dy = \frac{[pdy]}{[p]}, \quad dz = \frac{[pdz]}{[p]}$$

Dans le plan ce mode de calcul est d'un usage courant (mailles triangulaires). Rappelons encore deux propriétés de l'affinité : dans les équations (14), si l'on fait abstraction des paramètres a, b, c, on obtient (voir [4])

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x' - x = (r_2z - r_3y) + (\delta_1x + s_3y + s_2z) & \text{où } 1 + \delta_1 = d_1 \\ y' - y = (r_3x - r_1z) + (s_3x + \delta_2y + s_1z) & \text{où } 1 + \delta_2 = d_2 \\ z' - z = (r_1y - r_2x) + (s_2x + s_1y + \delta_3z) & \text{où } 1 + \delta_3 = d_3 \end{array} \right.$$

et

$$2s_1 = h_1 + g_1 \quad 2s_2 = h_2 + g_2 \quad 2s_3 = h_3 + g_3$$
$$2r_1 = h_1 - g_1 \quad 2r_2 = g_2 - h_2 \quad 2r_3 = h_3 - g_3$$

Les binômes entre parenthèses définissent une rotation (composantes r_1, r_2, r_3) et les trinômes une déformation pure ou irrotationnelle ; de plus en chaque point, il y a trois directions dites atropiques, pour lesquelles $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$ et dont la détermination dépend d'une équation de 3[e] degré.

En pratique les difficultés commencent lorsque $n > 4$ car une maille unique ne suffit plus. Déjà dans le plan, si $n = 4$, on peut constituer deux mailles triangulaires dont le côté commun est l'une ou l'autre des diagonales du quadrilatère. Certains praticiens ont alors songé à lever cette ambiguïté en ayant recours à la transformation plus générale bien connue, à mailles quadrangulaires :

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + 1} \qquad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{ax + by + 1}$$

mais ils y ont le plus souvent renoncé. Dans l'ensemble ce vaste problème reste posé, actuel, et le sera longtemps encore sans doute. C'est pourquoi il a paru opportun d'y consacrer quelques lignes dans le *Bulletin Technique*.

LITTÉRATURE

[1] Koll, O. : *Methode der kleinsten Quadrate.* (Springer, Berlin.)

[2] Kuny, W. : *Festpunktlose räumliche Triangulation.* (Wittwer, Stuttgart.)

[3] Ansermet, A. : *Le calcul des déformations en géodésie.*

[4] Ansermet, A. : *Quelques aspects de la transformation affine appliquée aux mensurations.* (Revue des mensurations no 4, 1949 ; no 9, 1954.)

[5] Merkel, H. : *Zur maschenweisen Abbildung.* (Vermessungs Nachrichten, 1934.)