

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin technique de la Suisse romande
<b>Band:</b>	80 (1954)
<b>Heft:</b>	20
<b>Artikel:</b>	Quelques applications récentes de la méthode purement optique à l'étude des plaques fléchies
<b>Autor:</b>	Favre, Henry / Schumann, Walter
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-60724">https://doi.org/10.5169/seals-60724</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraisant tous les quinze jours

**Abonnements:**

Suisse: 1 an, 24 francs

Étranger: 28 francs

Pour sociétaires:

Suisse: 1 an, 20 francs

Étranger: 25 francs

Prix du numéro: Fr. 1.40  
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande »

N<sup>o</sup> II. 57 78, à Lausanne.

**Expédition**

Imprimerie « La Concorde »  
Terreaux 31 — Lausanne.

**Rédaction**

et éditions de la S. A. du  
Bulletin technique (tirés à  
part), Case Chauderon 475

**Administration générale**  
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; † E. Lateltin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. † L. Archinard, ingénieur; Cl. Grosgrurin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration  
de la Société anonyme du Bulletin technique: A. Stucky, ingénieur, président;  
M. Bridel; G. Epitaux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

**Tarif des annonces**

1/1 page	Fr. 264.—
1/2 »	» 134.40
1/4 »	» 67.20
1/8 »	» 33.60

**annonces Suisses S. A.**  
(ASSA)



Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26  
Lausanne et succursales

**SOMMAIRE :** *Quelques applications récentes de la méthode purement optique à l'étude des plaques fléchies*, par HENRY FAVRE, Dr h. c., professeur à l'E.P.F., et WALTER SCHUMANN, math. dipl., assistant à l'E.P.F. — Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale: G.E.P. - 51<sup>e</sup> Assemblée générale à Genève, du 11 au 13 septembre 1954. — BIBLIOGRAPHIE. — COMMUNIQUÉ: *Constructions de protection antiaérienne*. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES.

## QUELQUES APPLICATIONS RÉCENTES DE LA MÉTHODE PUREMENT OPTIQUE À L'ÉTUDE DES PLAQUES FLÉCHIES<sup>1</sup>

par

HENRY FAVRE  
Dr h. c., professeur à l'E.P.F.

et

WALTER SCHUMANN  
math. dipl., assistant à l'E.P.F.

Le Laboratoire de Photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich a mis au point, il y a quelques années, une méthode purement optique permettant de déterminer les moments dans les plaques minces fléchies. Nous nous proposons, dans cette communication, tout d'abord de rappeler sommairement les principes de cette méthode, puis de décrire trois de ses plus récentes applications.

### § 1. Principes de la méthode purement optique pour la détermination des moments dans les plaques minces fléchies<sup>2</sup>

Soit une plaque mince fléchie, c'est-à-dire supportant des forces perpendiculaires à ses faces (fig. 1). Supposons-la tout d'abord faite d'une matière *homogène, isotrope et transparente*. Choisissons les axes rectangulaires  $x, y, z$  indiqués dans la figure. Les tensions nor-

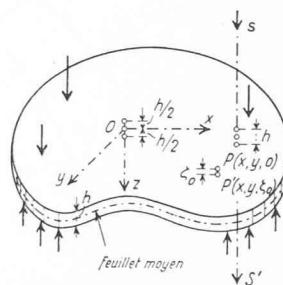


Fig. 1.

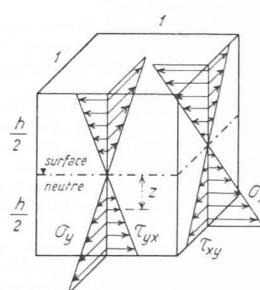


Fig. 2.

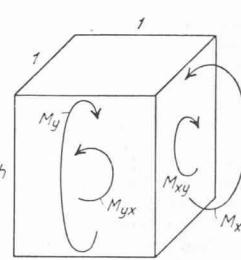


Fig. 3.

<sup>1</sup> Communication présentée au Colloque international de Photoélasticité et de Photoplasticité, Bruxelles, 29-31 juillet 1954.

<sup>2</sup> Voir [1], [2], [3], [4]. D'autres méthodes optiques permettent également de déterminer les moments dans les plaques minces fléchies. Le lecteur consultera à ce sujet avec intérêt les mémoires [5] à [14].

Les chiffres entre crochets se rapportent à la bibliographie placée à la fin de ce mémoire.

males  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et tangentielle  $\tau_{xy}$ , qui existent dans cette plaque, sont réparties dans l'épaisseur  $h$  conformément à la figure 2<sup>3</sup>. Elles sont équivalentes aux moments de flexion  $M_x$ ,  $M_y$  et de torsion  $M_{xy} = M_{yx}$  relatifs à l'unité de longueur, définis dans la figure 3.

Un rayon polarisé  $SS'$  qui traverse orthogonalement cette plaque retrouve, à la sortie, sa constitution primitive, car les modifications qu'il subit dans la première moitié de l'épaisseur sont exactement compensées par celles qu'il subit dans la seconde. En examinant entre deux *nicols croisés* une telle plaque, on n'observera donc aucun phénomène particulier de biréfringence accidentelle : le rayon sera éteint par le *nicol analyseur*<sup>4</sup>.

Par contre, si l'on utilise une *plaqué formée de deux couches adhérentes, de matières différentes* (fig. 4), la répartition des tensions intérieures sera celle de la figure 5, pourvu que les nombres de Poisson  $\nu$  des deux matières soient sensiblement les mêmes<sup>5</sup>. Un rayon polarisé subira alors, en traversant la première partie de l'épaisseur, comprise entre la face incidente et la surface neutre, des modifications qui ne seront, en général, pas compensées par celles qu'il subira dans la seconde partie.

On démontre aisément<sup>6</sup> qu'à la sortie de la plaque on aura, en définitive, deux rayons polarisés rectilignement, de même support, mais vibrant respectivement dans les directions 1, 2 des *moments de flexion principaux*  $M_1$ ,  $M_2$ <sup>7</sup>.

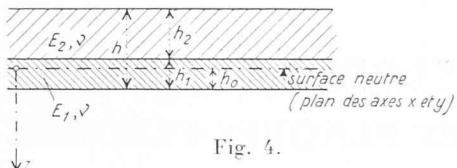


Fig. 4.

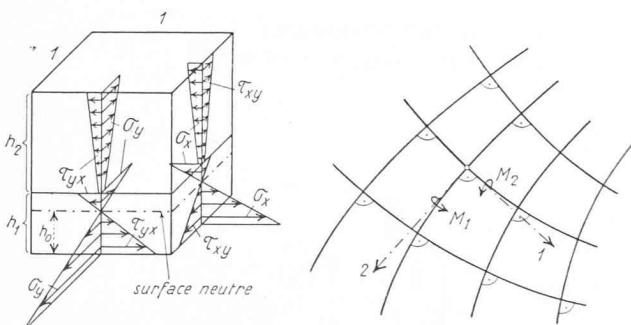


Fig. 5.

Fig. 6.

<sup>3</sup> Il existe, en outre, des tensions tangentielles  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  réparties paraboliquement dans l'épaisseur de la plaque, mais qui sont, en général, petites par rapport à  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ . Ces tensions peuvent être négligées, sauf au voisinage des points où agissent des forces concentrées. Il en est de même des tensions normales  $\sigma_z$ .

<sup>4</sup> Sauf au voisinage des points d'application des forces concentrées, où les tensions  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  ne varient plus linéairement dans l'épaisseur de la plaque ;  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  n'y sont d'ailleurs plus négligeables.

<sup>5</sup> Cette condition ne joue d'ailleurs qu'un rôle tout à fait secondaire, car les tensions intérieures dépendent très peu du nombre de Poisson. Dans les applications, elle sera toujours remplie avec suffisamment d'exactitude pour permettre d'utiliser la méthode que nous exposons. La théorie de la plaque formée de deux couches de matières différentes a été établie par B. Gilg (voir [3], p. 14 et suiv.).

<sup>6</sup> Voir [1] et surtout [3].

<sup>7</sup> En tout point d'une plaque fléchie existent, en général, deux directions orthogonales 1, 2 pour lesquelles les moments de torsion sont nuls. Ce sont les *directions principales* en ce point. Les moments de flexion correspondants  $M_1$ ,  $M_2$  sont les *moments de flexion principaux*.

A l'aide d'un *nicol analyseur*, il sera donc facile de déterminer ces directions en un nombre quelconque de points. On en déduira ensuite les *trajectoires des moments principaux* (fig. 6).

Les deux rayons émergents accusent une *différence de marche*  $\delta_3$ . D'autre part, si l'on fait croître simultanément les forces agissant sur la plaque, de zéro à leurs valeurs finales, chacun des rayons subit une *variation absolue de marche* que nous désignerons par  $\delta_1$ , pour le premier rayon, et  $\delta_2$ , pour le second. La différence de ces variations,  $\delta_1 - \delta_2$ , est égale à  $\delta_3$ .

Les grandeurs  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_3$  sont liées aux moments principaux  $M_1$ ,  $M_2$  par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = AM_1 + BM_2, \\ \delta_2 = BM_1 + AM_2, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_3 = C(M_1 - M_2), \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = C(M_1 - M_2), \end{array} \right. \quad (3)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  désignent des constantes dépendant des matières constituant les deux couches de la plaque, des épaisseurs de ces couches et de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayon incident<sup>8</sup>.

La méthode purement optique consiste à mesurer :

<sup>10</sup> la différence de marche  $\delta_3$  à l'aide d'un *compensateur*<sup>9</sup>, placé entre la plaque et un *nicol analyseur* ;

<sup>20</sup> les variations absolues de marche  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , en utilisant un *interféromètre à quatre lames de Mach-Zehnder* (fig. 7).

Ayant mesuré  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , et connaissant les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ <sup>10</sup>, l'application de la méthode des moindres carrés de Gauss au système (1), (2), (3) permet de calculer les valeurs les plus probables des moments  $M_1$ ,  $M_2$ , ainsi que les erreurs moyennes  $\mu_{M_1}$ ,  $\mu_{M_2}$  des résultats obtenus<sup>11</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = R_{11}\delta_1 + R_{21}\delta_2 + R_{31}\delta_3, \\ M_2 = R_{12}\delta_1 + R_{22}\delta_2 + R_{32}\delta_3, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{M_1} = \pm \theta_1(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3), \\ \mu_{M_2} = \pm \theta_2(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3). \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{M_1} = \pm \theta_1(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3), \\ \mu_{M_2} = \pm \theta_2(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3). \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{M_1} = \pm \theta_1(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3), \\ \mu_{M_2} = \pm \theta_2(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3). \end{array} \right. \quad (7)$$

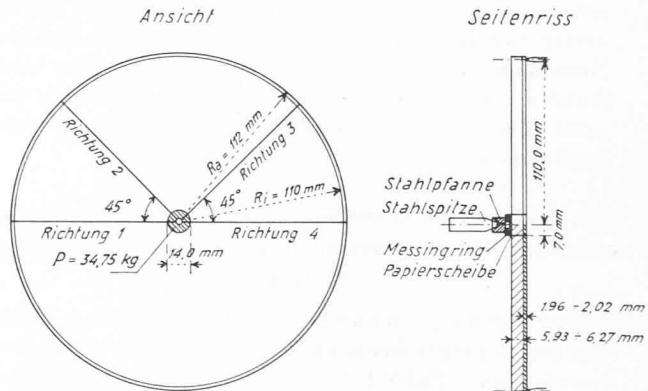


Fig. 8.

<sup>8</sup> Entre  $A$ ,  $B$ ,  $C$  existe la relation  $A - B = C$ .

<sup>9</sup> Nous utilisons un *compensateur de Bravais*.

<sup>10</sup> Pour déterminer ces constantes, on utilise une éprouvette sollicitée à la flexion pure.

<sup>11</sup> Les coefficients  $R_{11}$ ,  $R_{21}$ , ...,  $\theta_2$  dépendent de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et des « poids » attribués aux mesures de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  (voir par ex. [3], p. 27).

La méthode purement optique procède ainsi *point par point*. Les rayons lumineux utilisés ont un diamètre de 0,5 mm seulement. Cette même méthode est appliquée depuis longtemps à Zurich, et dans d'autres laboratoires, à l'étude des états de tension bidimensionnels.

Nous ne décrirons pas ici les appareils utilisés ; nous renvoyons le lecteur aux publications déjà citées, ou à d'autres communications du Laboratoire.

Tous les modèles de plaques utilisés dans les recherches que nous allons décrire étaient constitués par deux couches, collées entre elles, une de *verre*, d'environ 2 mm d'épaisseur, et une d'*allite*, d'environ 6,3 mm<sup>12</sup>. L'adhérence de ces deux parties était obtenue en utilisant une colle de résine artificielle. L'épaisseur de la colle était de l'ordre du vingtième de millimètre. Pour les valeurs exactes des épaisseurs des couches de chaque modèle, ainsi que les valeurs des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , nous renvoyons également le lecteur aux publications citées.

## § 2. Etude de la répartition des moments dans diverses plaques circulaires, posées le long du contour ou reposant en des points isolés<sup>13</sup>

Cette étude a servi à mettre définitivement au point la méthode. Elle a également permis de traiter des cas où les moments peuvent difficilement être calculés, les séries qui les expriment convergeant trop lentement pour les applications numériques.

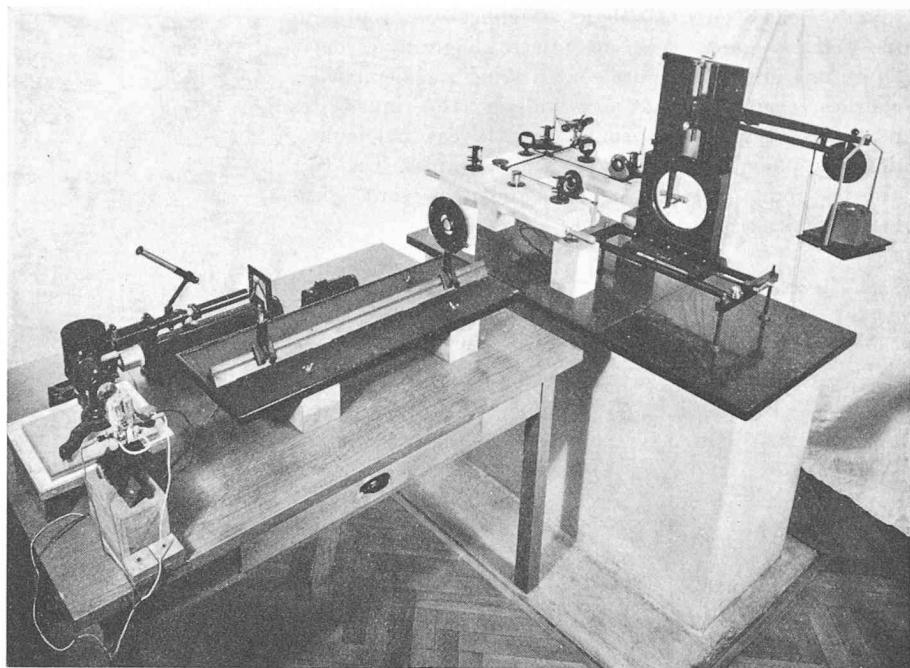


Fig. 7. — Vue de l'installation pour la détermination des variations absolues de marche  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ .

a) *Plaque circulaire, posée le long du contour et sous l'action d'une force  $P$ , perpendiculaire aux faces, appliquée au centre.*

Les dimensions du modèle et les caractéristiques de la force  $P$  sont indiquées dans la figure 8. Cette force était répartie sur une petite surface circulaire<sup>14</sup>. Les moments principaux  $M_1 = M_r$ ,  $M_2 = M_t$  ont été mesurés par la méthode purement optique le long des

<sup>12</sup> La lame de *verre* était découpée dans une glace de bonne qualité. L'*Allite CR 39* que nous avons utilisée est une résine artificielle de très bonne qualité, livrée en lames à faces planes, parallèles et polies par l'*Homalite Company*, à Wilmington (Delaware, U.S.A.).

<sup>13</sup> Voir [3].

<sup>14</sup> Ce fut également le cas de toutes les forces  $P$  dont nous parlerons plus loin. Les diamètres de ces surfaces sont précisés dans certaines des figures.

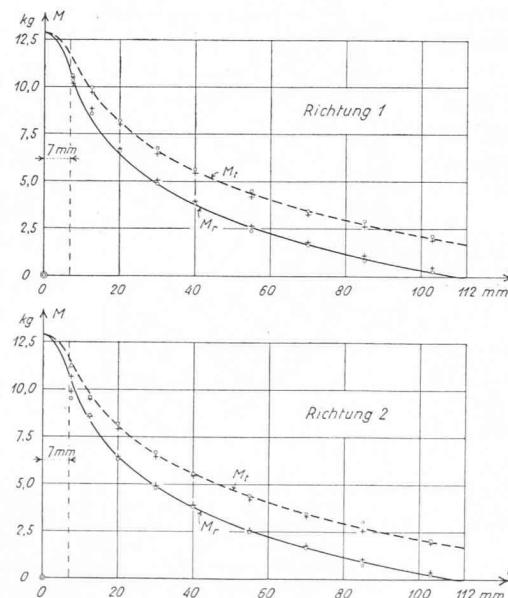
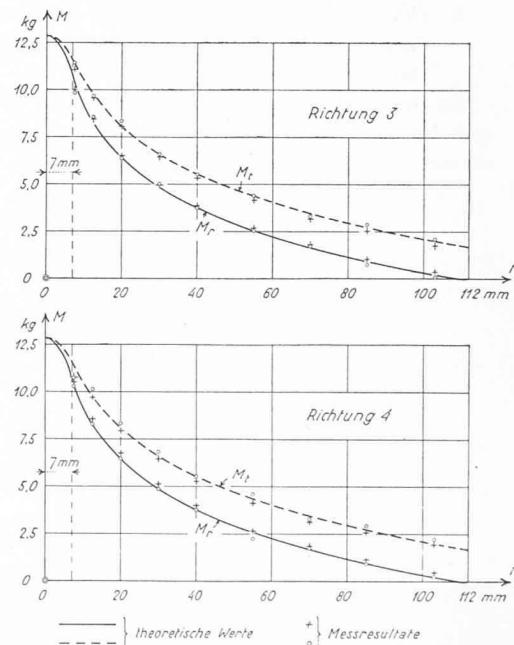


Fig. 9.  
Valeurs des moments principaux  $M_r$ ,  $M_t$  le long des rayons 1, 2, 3, 4 de la plaque circulaire fléchie de la figure 8. Les points isolés ont été obtenus par la méthode purement optique, les courbes représentent les valeurs théoriques.



rayons 1, 2, 3, 4. Les valeurs obtenues sont représentées par les points isolés des quatre diagrammes de la figure 9. Dans cette figure sont dessinées également les courbes correspondant aux valeurs théoriques des moments. Ces valeurs sont, dans le cas particulier, données par des formules connues simples. On voit que les points obtenus expérimentalement sont sensiblement situés sur les courbes théoriques.

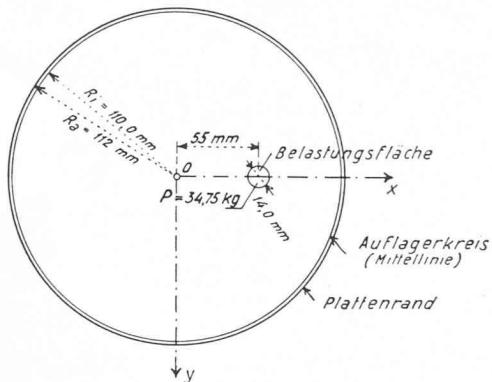


Fig. 10.

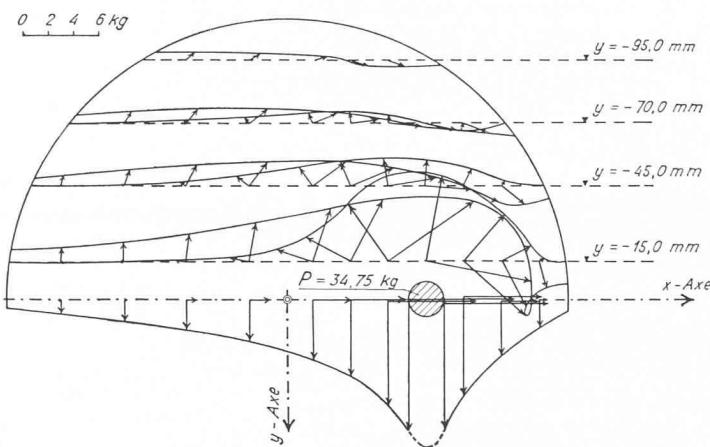


Fig. 12. — Répartition des moments principaux dans la plaque de la figure 10.

b) *Plaque circulaire, posée le long du contour et sous l'action d'une force excentrique P, perpendiculaire aux faces.*

La figure 10 précise les dimensions du modèle, ainsi que les caractéristiques de la force  $P$ . La figure 11 donne, en haut, les directions des moments principaux

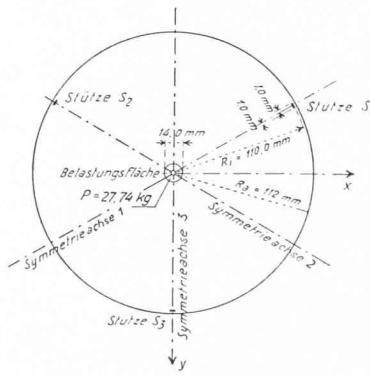


Fig. 13.

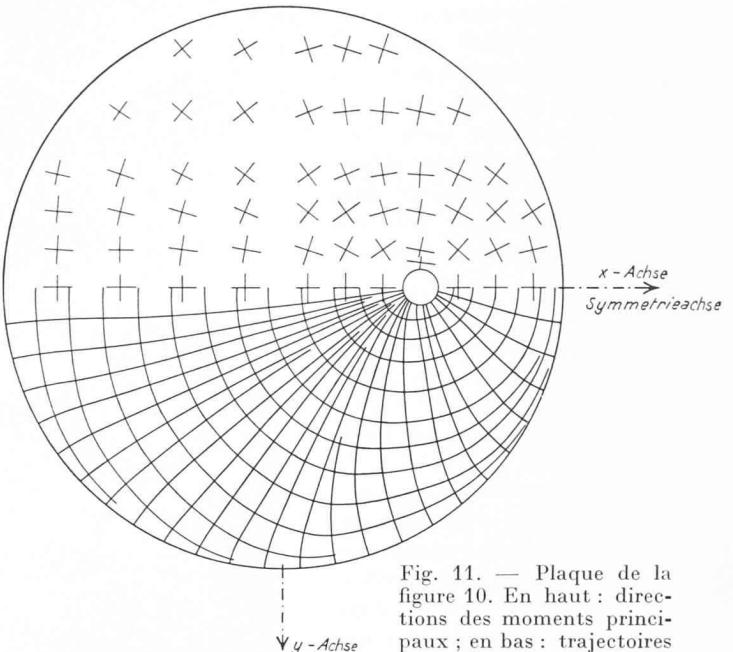


Fig. 11. — Plaque de la figure 10. En haut : directions des moments principaux ; en bas : trajectoires des moments.

aux points où ont été faites les mesures ; en bas, les trajectoires des moments, dessinées en se basant sur ces directions. Les grandeurs et les directions des moments principaux sont représentées par les flèches de la figure 12<sup>15</sup>. On remarquera la rapide augmentation des moments, lorsqu'on s'approche de la petite surface d'application de la force  $P$ <sup>16</sup>.

<sup>15</sup> Les flèches utilisées dans les figures 12, 19, 20 à 24 ont des longueurs proportionnelles aux moments  $M_1$  ou  $M_2$ . Leurs directions et leurs sens sont ceux des tensions principales  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  aux points de la face inférieure de la plaque.

<sup>16</sup> Si cette surface était nulle, les moments au point d'application seraient théoriquement infiniment grands.

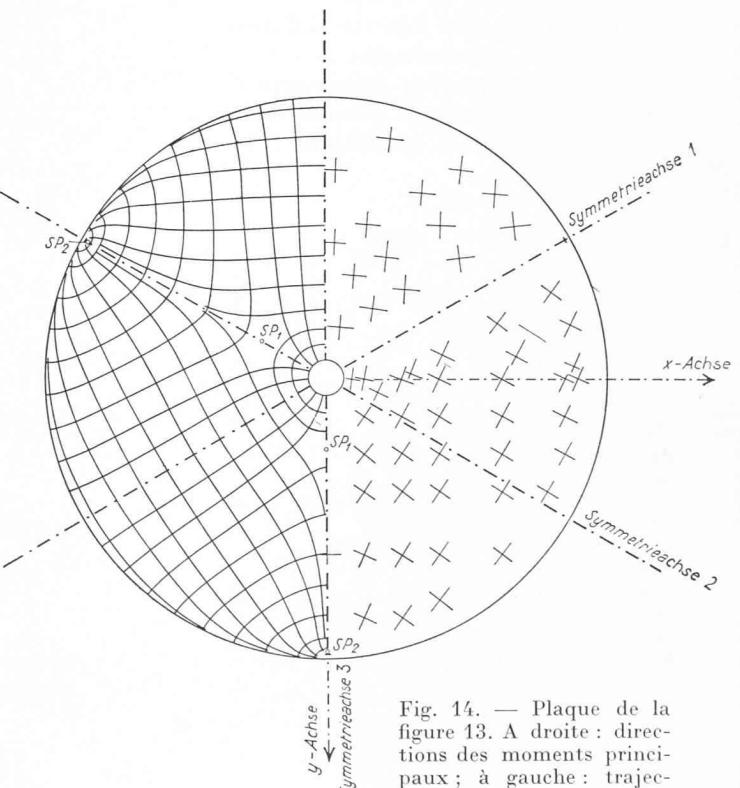
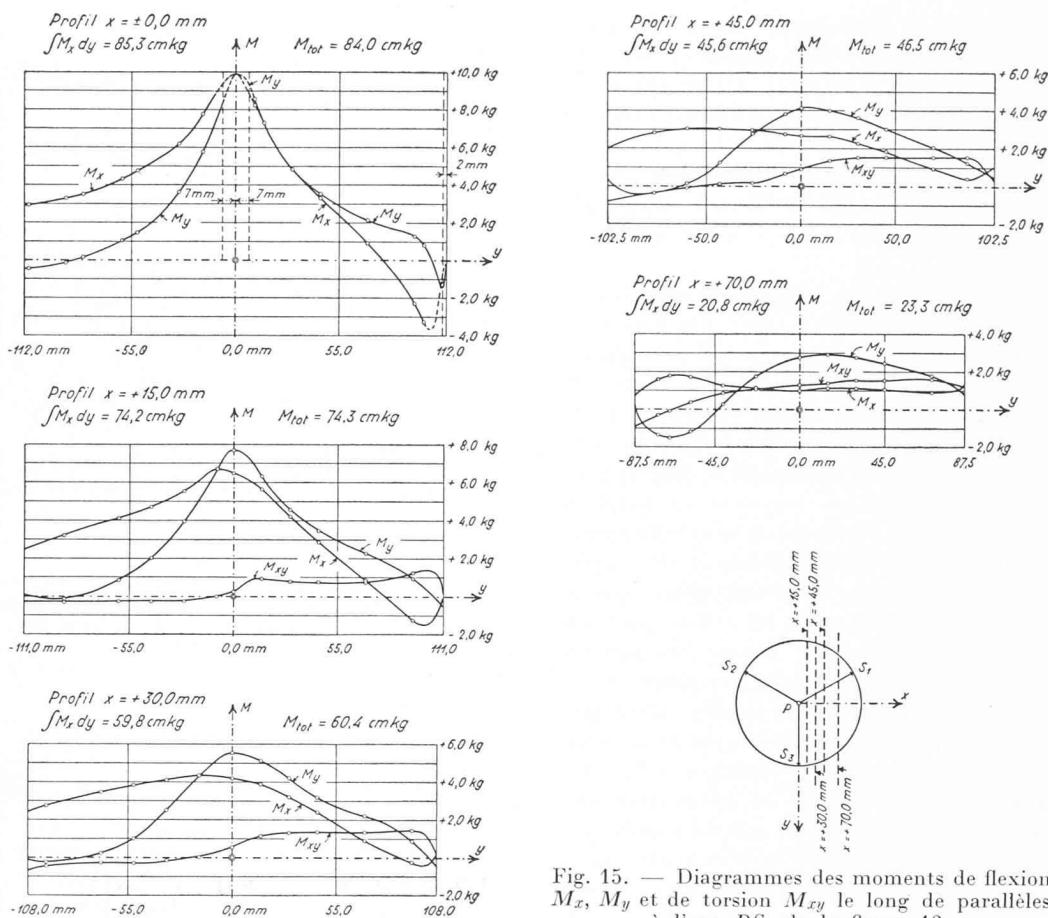


Fig. 14. — Plaque de la figure 13. A droite : directions des moments principaux ; à gauche : trajectoires des moments.



c) Plaque circulaire reposant en trois points et sous l'action d'une force  $P$ , perpendiculaire aux faces, appliquée au centre.

Les dimensions du modèle, la position des points d'appui  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et les caractéristiques de la force  $P$  sont indiquées dans la figure 13. Les points  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  étaient équidistants et sensiblement situés sur le contour de la plaque.

La partie droite de la figure 14 montre les directions des moments principaux données par les mesures ; la partie gauche de cette figure représente les trajectoires des moments. On remarquera la présence de trois points singuliers,  $SP_2$ , coïncidant avec les appuis, et de trois autres points singuliers,  $SP_1$ , situés sur les rayons définis par ces appuis.

Les diagrammes de la figure 15 représentent les valeurs des moments de flexion  $M_x$ ,  $M_y$  et de torsion  $M_{xy}$  le long de parallèles à l'axe  $PS_3$  ou  $y$ . Ces moments ont été obtenus par un calcul élémentaire, en se basant sur les directions et les grandeurs des moments principaux  $M_1$ ,  $M_2$  données par la méthode purement optique. Les chiffres placés au-dessus de chaque diagramme permettent de comparer les valeurs des intégrales  $\int M_x dy$ , déterminées en planimétrant les aires définies par les courbes  $M_x$ , aux valeurs  $M_{tot}$  obtenues directement en multipliant la grandeur  $\frac{P}{3}$  de la réaction de l'appui  $S_1$ , par la dis-

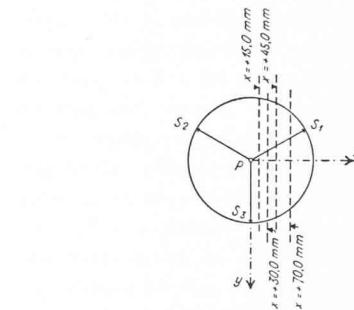


Fig. 15. — Diagrammes des moments de flexion  $M_x$ ,  $M_y$  et de torsion  $M_{xy}$  le long de parallèles à l'axe  $PS_3$  de la figure 13.

tance de cet appui au profil  $x$  considéré. La comparaison des valeurs planimétrées et de celles obtenues directement est satisfaisante.

### § 3. Détermination systématique des moments dans quatre modèles de plaques obliques, appuyées le long de deux côtés opposés et chargées au centre<sup>17</sup>

Le but principal de ces expériences a été de reconnaître l'influence de l'obliquité d'une plaque limitée par un losange, sur la répartition des moments de flexion. Quatre modèles différents ont été successivement examinés, correspondant chacun à une valeur déterminée de l'angle  $\varphi$  de deux côtés adjacents (fig. 16). La

<sup>17</sup> Voir [4].

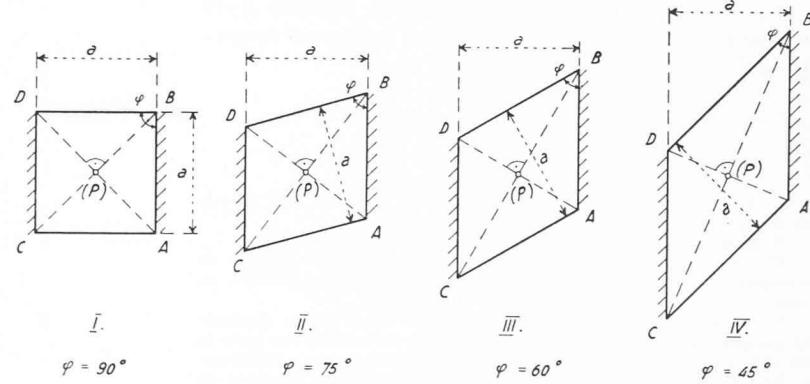


Fig. 16. — Formes des quatre plaques obliques étudiées.  $AB$  et  $CD$  côtés appuyés,  $AC$  et  $BD$  côtés libres.

dimension  $a$ , qui était la même pour tous les modèles, était égale à 164 mm. La première plaque (I) était un carré ( $\varphi = 90^\circ$ ). Les trois autres (II, III et IV) accusaient des obliquités de plus en plus accentuées, l'angle  $\varphi$  ayant respectivement les valeurs  $75^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $45^\circ$ . Lors des essais, chaque plaque était simplement appuyée le long des deux côtés opposés  $AB$  et  $CD$ ; elle supportait une force  $P$ , perpendiculaire à ses faces et appliquée au centre.

Nous ne reproduirons ici que les résultats relatifs aux deux cas extrêmes  $\varphi = 90^\circ$  et  $\varphi = 45^\circ$ <sup>18</sup>. Les figures 17 et 18 montrent les trajectoires des moments principaux. Les figures 19 et 20 représentent, à l'aide de flèches<sup>19</sup>, les directions et les grandeurs de ces moments. Dans ces deux dernières figures, toutes les longueurs sont indiquées en fonction de la dimension  $a$  (fig. 16), et tous les moments par unité de longueur, en fonction de la grandeur de la force  $P$ . *Présentés sous cette forme, les résultats obtenus peuvent immédiatement être appliqués à une plaque quelconque, de même forme que le modèle, faite par exemple d'une matière homogène, au centre de laquelle agit une force  $P$  donnée.* On sait en effet que les moments de flexion, dans une plaque reposant sur des appuis indéformables, ne dépendent pas du module d'élasticité, et relativement peu du nombre de Poisson  $\nu$  des matières qui la constituent<sup>20</sup>.

La comparaison des figures 17 et 18 montre que *l'influence de l'obliquité de la plaque sur les trajectoires des moments est très faible au voisinage du centre, mais augmente considérablement lorsqu'on s'éloigne de ce point et s'approche du contour.* En comparant les figures 19 et 20, on arrive à une conclusion analogue pour les grandeurs des moments principaux. Toutes ces conclusions sont confirmées par les résultats donnés par les plaques  $\varphi = 75^\circ$  et  $\varphi = 60^\circ$ . Au centre, en particulier, où les moments passent par des valeurs extrêmes, on a trouvé, pour les quatre modèles<sup>21</sup>:

$$\begin{aligned}\varphi = 90^\circ &: M_1 = 0,38 P, \quad M_2 = 0,29 P; \\ \varphi = 75^\circ &: M_1 = 0,37 P, \quad M_2 = 0,295 P; \\ \varphi = 60^\circ &: M_1 = 0,375 P, \quad M_2 = 0,295 P; \\ \varphi = 45^\circ &: M_1 = 0,375 P, \quad M_2 = 0,305 P.\end{aligned}$$

Les grandeurs des moments  $M_1$  et  $M_2$ , comme d'ailleurs leurs directions, sont donc, au centre, pratiquement indépendants de l'angle  $\varphi$ .

Ajoutons que les angles des plaques étudiées n'ont eu aucune tendance à se soulever et à quitter les appuis, lorsqu'on appliqua la force  $P$  au centre.

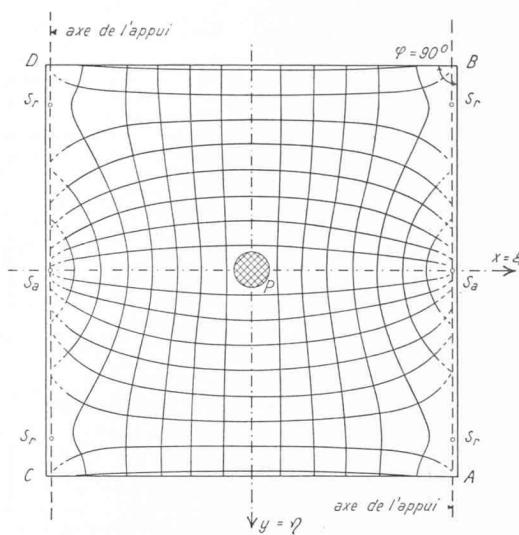


Fig. 17. — Plaque  $\varphi = 90^\circ$ .  
Trajectoires des moments principaux.

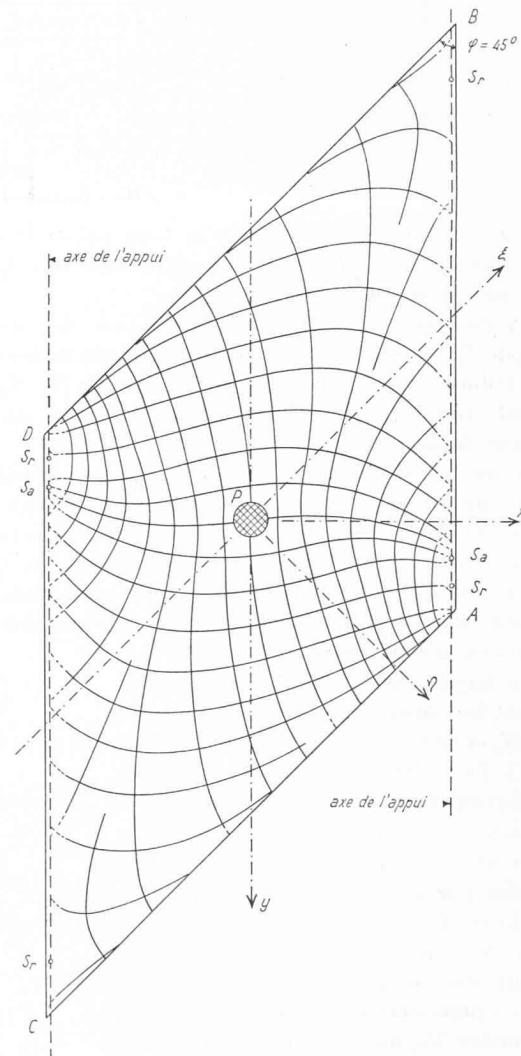


Fig. 18. — Plaque  $\varphi = 45^\circ$ .  
Trajectoires des moments principaux.

<sup>18</sup> Les résultats détaillés, relatifs aux quatre modèles, sont donnés dans [4].

<sup>19</sup> Pour la signification de ces flèches, voir la note <sup>15</sup>.

<sup>20</sup> Cette propriété, qu'on établit facilement pour les plaques de matières homogènes, est encore applicable aux plaques formées de deux couches (voir [3], p. 20 et suiv.).

<sup>21</sup> Ces valeurs sont le résultat d'extrapolations, car la méthode ne permet pas de faire des mesures dans la petite surface sur laquelle est répartie la force  $P$ . Ces extrapolations ont été faites en considérant la flexion de la plaque, au voisinage du centre, comme résultant de la superposition de l'état de flexion d'une plaque circulaire sur laquelle agirait la même force répartie  $P$ , et d'un état de flexion uniforme  $M_x = \text{const.}$ ,  $M_y = M_{xy} = 0$ .

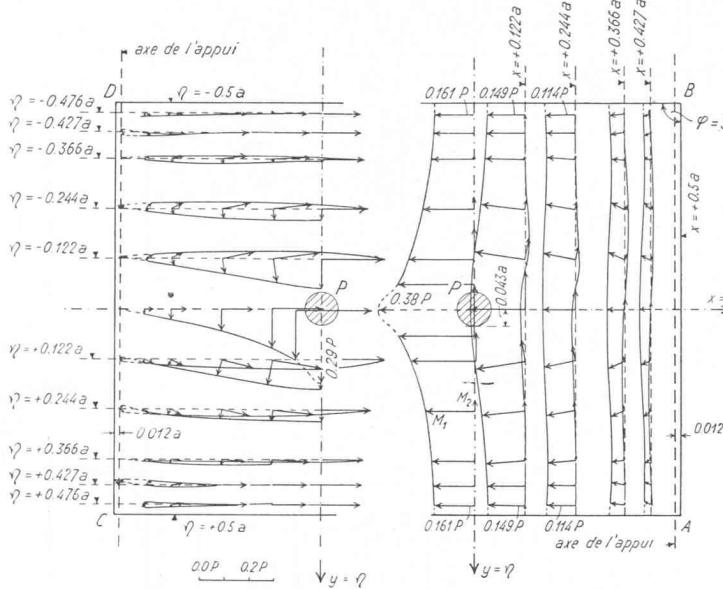


Fig. 19. — Plaque  $\varphi = 90^\circ$ .  
Diagrammes des moments principaux.

**§ 4. Etude expérimentale de l'ordre de grandeur des moments engendrés, dans une plaque carrée ayant deux côtés parallèles encastrés et les deux autres côtés libres, par divers systèmes de forces appliquées dans une zone limitée, voisine du centre**

Cette étude a été entreprise pour examiner dans quelles conditions le *principe de Saint-Venant* est applicable aux plaques fléchies. En particulier, son but a été de soumettre au contrôle de l'expérience des résultats théoriques obtenus récemment à ce sujet par l'un des deux auteurs<sup>22</sup>. Elle a consisté à mesurer la répartition des moments engendrés, dans une plaque carrée de 160 mm de côté, par divers systèmes de forces, perpendiculaires aux faces, appliquées dans une zone limitée, voisine du centre. Deux côtés parallèles de la plaque étaient encastrés, les deux autres étaient libres.

Les figures 21 à 24 donnent les résultats de ces expériences pour quelques-uns des états de charge étudiés. La figure 21 précise, à l'aide de flèches, les valeurs des moments, dans le cas d'une seule force  $P$ , appliquée au centre. La figure 22 se rapporte au cas de deux forces  $P$  égales, mais de sens contraires, constituant un couple, appliquées au voisinage du centre. Ici, la résultante générale est nulle, mais le couple résultant est différent de zéro. Enfin, les figures 23 et 24 concernent deux états de charge où non seulement la résultante générale est nulle, mais où le couple résultant l'est également. Dans le premier état, il s'agit d'une force  $P$  et de deux forces  $\frac{P}{2}$  parallèles, mais de sens contraire à celui de  $P$ , constituant un système en équilibre ; dans le second état, quatre forces  $\frac{P}{2}$  égales sont appliquées sur la plaque, deux dans chaque sens, les lignes d'action étant choisies de façon que les quatre forces s'équilibrent.

On peut démontrer par la théorie que, si l'on néglige l'influence des limites, les moments sont de l'ordre :

1, dans le cas de la figure 21,

$\frac{\epsilon}{r}$ , dans le cas de la figure 22,

$\frac{\epsilon^2}{r^2}$ , dans le cas des figures 23 et 24.

où  $\epsilon$  désigne une dimension caractéristique de la zone où sont appliquées les forces, et  $r$ , la distance d'un point de cette zone, le centre par exemple, au point considéré. La présence des limites à distance finie entraîne des termes correctifs qui sont respectivement, dans les trois cas cités, de l'ordre 1,  $\frac{\epsilon}{a}$  et  $\frac{\epsilon^2}{a^2}$ ,  $a$  étant une dimension caractéristique de la plaque, par exemple la demi-longueur des côtés, si elle est carrée. Ces termes correctifs ne changent en général pas l'ordre de grandeur des moments.

Ces propriétés sont confirmées par les diagrammes des figures citées. On remarque en effet que, dans le cas de la figure 21, les moments ont — à l'exception du petit domaine circulaire où est appliquée la force  $P$  — des grandeurs finies. Par contre, on constate que

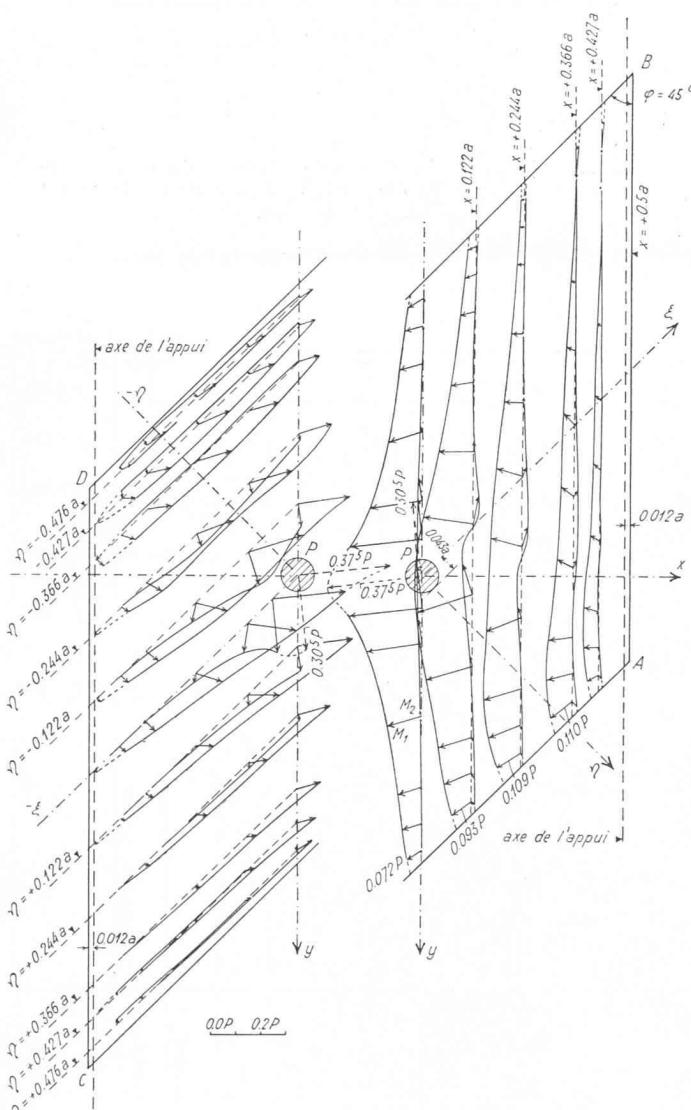


Fig. 20. — Plaque  $\varphi = 45^\circ$ .  
Diagrammes des moments principaux.

<sup>22</sup> Voir [15].

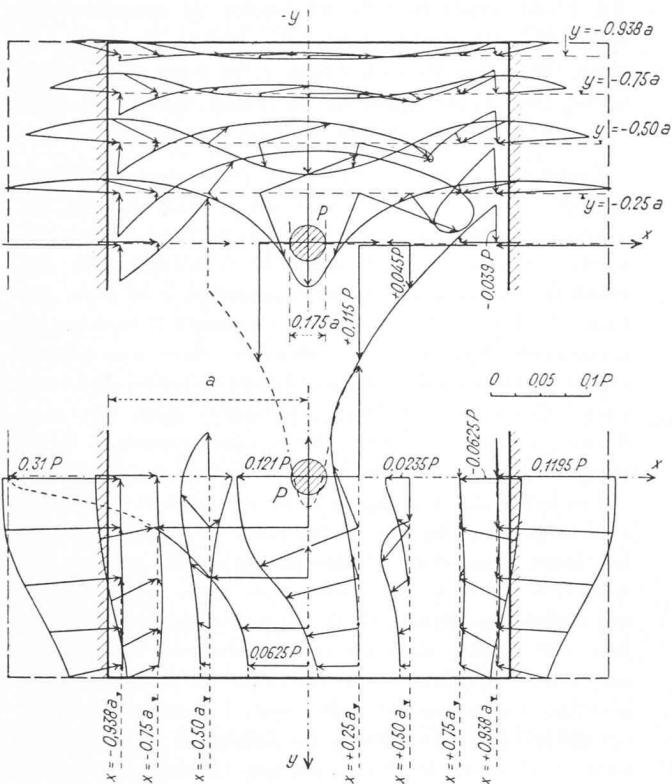


Fig. 21. — Cas où la résultante générale du système de forces appliquées est différente de zéro.

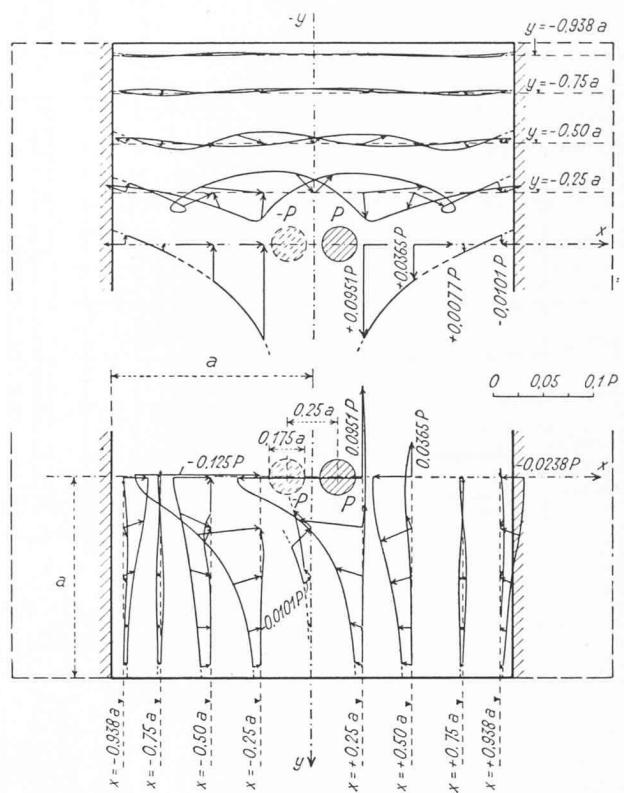


Fig. 22. — Cas où la résultante générale du système de forces appliquées est nulle, mais où le couple résultant est différent de zéro.

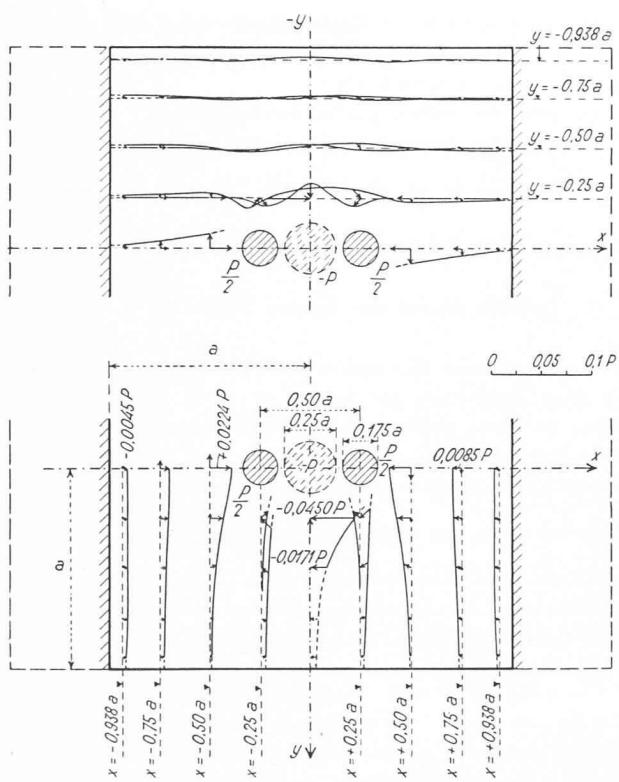


Fig. 23. — Cas où la résultante générale et le couple résultant du système de forces appliquées sont nuls.

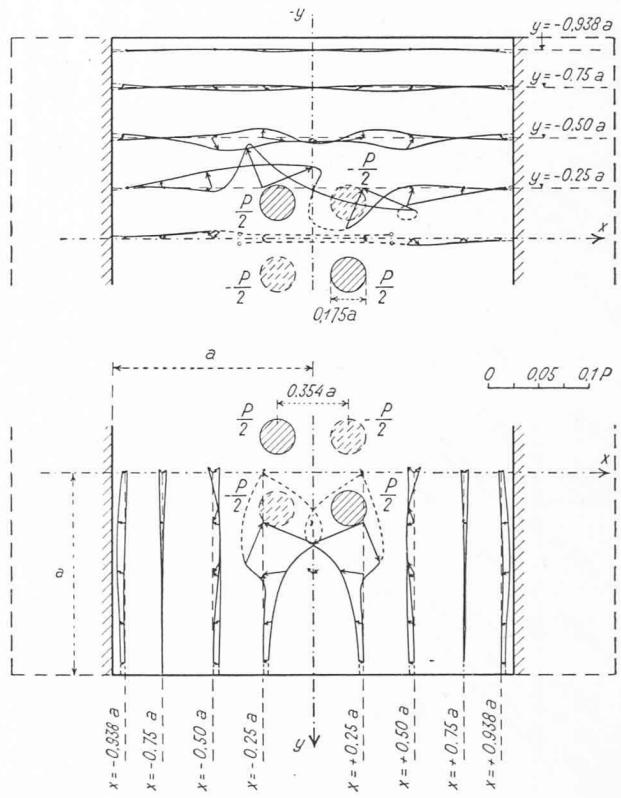


Fig. 24. — Cas où la résultante générale et le couple résultant du système de forces appliquées sont nuls.

les moments sont plus petits — on peut vérifier qu'ils sont de l'ordre  $\frac{\epsilon}{r}$  — dans le cas de la figure 22, et qu'ils sont d'un ordre inférieur — c'est-à-dire  $\frac{\epsilon^2}{r^2}$  — dans celui des figures 23 et 24. Les termes correctifs ne changent ici pas ces ordres de grandeur.

On voit ainsi que si un *système de forces en équilibre* est appliqué dans un petit domaine d'une plaque fléchie (fig. 23 et 24), il engendre en général des moments qui décroissent très rapidement — ils sont de l'ordre  $\frac{\epsilon^2}{r^2}$  — lorsqu'on s'éloigne de ce domaine. Par contre, les moments décroissent moins rapidement — ils sont de l'ordre  $\frac{\epsilon}{r}$  — si la résultante générale du système est nulle sans que le couple résultant le soit.

C'est dans cette propriété que consiste le principe de Saint-Venant pour les plaques fléchies<sup>23</sup>.

Zurich, le 14 juin 1954.

<sup>23</sup> Le compte rendu détaillé de toutes ces études — théoriques et expérimentales — sur le principe de Saint-Venant sera publié par W. Schumann dans les Publications du Laboratoire de Photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. FAVRE et B. GILG : *Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies*. Schweizerische Bauzeitung, 13 et 20 mai 1950.
- [2] H. FAVRE : *La méthode purement optique appliquée aux états bidimensionnels et aux plaques fléchies*. Actes du Colloque international de Mécanique, Poitiers 1950, tome V, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'Air, n° 263, Paris, 1952.
- [3] B. GILG : *Experimentelle und theoretsche Untersuchungen an dünnen Platten*, Publication n° 5 du Laboratoire de Photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale. Editions Leemann, Zurich, 1952.
- [4] H. FAVRE et W. SCHUMANN : *Etude expérimentale des moments dans une plaque oblique fléchie en fonction de l'angle formé par les côtés*. Bulletin de la Société française des mécaniciens, n° 9, 1953.
- [5] P. DANTU : *Méthode nouvelle pour la détermination expérimentale des flexions dans une plaque plane*. Annales des Ponts et Chaussées, n° 1 de janvier 1940.
- [6] P. DANTU : *Etude expérimentale des plaques par une méthode optique*. Annales des Ponts et Chaussées, n° 3 et 4, juin et août 1952.
- [7] J. N. GOODIER and G. LEE : *An extension of the photo-elastic Method of stress Measurement to Plates in transverse bending*. J. appl. Mech. 1941, Vol. 8, A-27.
- [8] D. DRUCKER : *The photoelastic Analysis of transverse bending of Plates in the standard transmission Polariscopic*. J. appl. Mech. 1942, Vol. 9, A-161.
- [9] H. G. POERTNER : *Photoelastic Analysis of the Bending Stresses in thin Plates*. Diss. of the Washington University, St. Louis, 1943.
- [10] R. KUHN : *Experimentelle Untersuchung elastischer Platten mit Hilfe der Spannungsoptik*. Diss. T. H. München, 1948.
- [11] F. K. LIGTENBERG : *Over een methode, om door een eenvoudig experiment de momenten in stijve platen te bepalen*. De Ingenieur, N° 9, 1952.
- [12] A. KUSKE : *Spannungsoptische Untersuchung von Platten nach dem Zweischichtverfahren*. Z. VDI, Bd. 94, 1952, N° 22.
- [13] A. KUSKE : *Die Auswertung von ebenen spannungsoptischen Versuchen, Scheiben und Platten nach dem Zweischichtverfahren*. Forschung 18. Bd., Heft 4, 1952.
- [14] H. SCHWIEGER : *Ein Auswerteverfahren bei der spannungsoptischen Untersuchung elastischer Platten*. Bauplanung und Bautechnik, 8. Jahrg. Heft 4, April 1954.
- [15] W. SCHUMANN : *Sur différentes formes du principe de B. de Saint-Venant*. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 238, 1954, p. 998-999.

#### ASSOCIATION DES ANCIENS ÉLÈVES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE

##### G. E. P. — 51<sup>e</sup> Assemblée générale à Genève du 11 au 13 septembre 1954

Continuant la tradition de ses réunions bisannuelles successivement dans les carrefours du pays, la G.E.P. a convoqué cette fois-ci ses membres à Genève, où elle ne s'était plus réunie depuis 1925. Trois cents d'entre eux, accompagnés d'une centaine de dames, avaient répondu à cet appel. Ils ne l'auront sans doute pas regretté. Un comité d'accueil, aussi dévoué que diligent, avait fort bien préparé les choses sous la présidence de M. Georges Dériaz, de la permanence de la Section genevoise de la G.E.P.

Le programme avait prévu — comme il se doit — le travail avant le délassement, tout au moins pour les membres du grand Comité qui se réunit à l'Hôtel du Rhône, le samedi dès 17 heures, sous la présidence du Dr Hermann Fietz, architecte, pour liquider les affaires administratives de l'Association.

Et c'est le samedi soir, dès 21 heures, que se réunissent, en ce même Hôtel du Rhône, les membres venus

de tant de points divers pour y passer la Soirée « récréative et amicale » que devait animer une revue à la verve endiablée, due à l'imagination de Ruy Blag, inspirée et présentée par notre facétieux et trilingue collègue Pierre Bourcart, sous le nom de

##### POLY...SSONNERIES

Une troupe aussi gaie qu'amusante (dans laquelle ne figuraient, à vrai dire, qu'un nombre assez limité de poly...techniciens) mit en évidence les trouvailles des robots, des hyperspécialistes et des synthéticiens, sans oublier les surprises des hydrauliciens et... la pile atomique.

Un bal suivit jusqu'à 1 h. du matin, heure qui ne parut tardive, naturellement, qu'aux âges avancés et à ceux dont la technique a peu à peu grignoté toute la bonne humeur...

Il fallait, pour les hommes sages, réserver quelques heures réparatrices en vue du lendemain.

Dimanche 12 septembre, à 9 h. 15 : Assemblée générale à l'Aula de l'Université. Le président Fietz, bien en