

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 79 (1953)  
**Heft:** 7: Foire suisse de Bâle, 11-21 avril 1953

**Artikel:** Calcul simplifié des corps creux de révolution soumis à des déformations conservant cette symétrie  
**Autor:** Paschoud, Jacques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59747>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

**Abonnements :**  
Suisse : 1 an, 24 francs  
Etranger : 28 francs  
Pour sociétaires :  
Suisse : 1 an, 20 francs  
Etranger : 25 francs  
Prix du numéro : Fr. 1.40  
Abonnements et n°s isolés  
par versement au cpte de  
ch. postaux Bulletin techni-  
que de la Suisse romande  
N° II. 8775, à Lausanne.  
**Rédaction**  
et éditions de la S. A. du  
Bulletin technique (tirés à  
part), Case Chauderon 475  
**Administration**  
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président : R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. Epitoux, architecte, à Lausanne ; Secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg : MM. P. Joye, professeur ; † E. Lateltin, architecte — Vaud : MM. F. Chenaux, ingénieur ; H. Matti, ingénieur ; E. d'Okolski, architecte ; Ch. Thévenaz, architecte — Genève : MM. L. Archinard, ingénieur ; Cl. Grosgrin, architecte ; E. Martin, architecte ; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel : MM. J. Béguin, architecte ; R. Guye, ingénieur — Valais : MM. J. Dubuis, ingénieur ; D. Burgener, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration  
de la Société anonyme du Bulletin technique : A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitoux, architecte ; R. Neeser, ingénieur.

## Tarif des annonces

1/1 page	Fr. 264.—
1/2 »	» 134.40
1/4 »	» 67.20
1/8 »	» 33.60

Annonces Suisses S. A.  
(ASSA)



5 Rue Centrale. Tél. 22 33 26  
Lausanne et succursales

**SOMMAIRE :** *Calcul simplifié des corps creux de révolution soumis à des déformations conservant cette symétrie*, par JACQUES PASCHOUD, ingénieur-conseil, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne, Chef de la section des métaux du Laboratoire d'essai des matériaux. — **LES CONGRÈS :** *III<sup>me</sup> Congrès de l'Union internationale des architectes*. — **BIBLIOGRAPHIE.** — **SERVICE DE PLACEMENT.** — **DOCUMENTATION GÉNÉRALE.** — **DOCUMENTATION DU BATIMENT.** — **NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES :** *Foire suisse d'échantillons de Bâle*.

## CALCUL SIMPLIFIÉ DES CORPS CREUX DE RÉVOLUTION SOU MIS A DES DÉFORMATIONS CONSERVANT CETTE SYMÉTRIE

par JACQUES PASCHOUD, ingénieur-conseil, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne  
Chef de la section des métaux du Laboratoire d'essai des matériaux

### TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction.
2. Une théorie simplifiée et l'équation différentielle qui en résulte.
3. Les hyperstatiques aux extrémités d'un corps creux très court.
4. Recherche de solutions approximatives amorties à l'équation différentielle simplifiée.
5. Calcul approximatif des hyperstatiques à l'origine.
6. Notations et résumé des formules.
7. Exemple : calcul d'un fond en anse de panier.
8. Comparaisons avec des mesures et conclusions.  
Bibliographie.

### 1. Introduction

Le calcul des corps creux de révolution, d'épaisseur variable ou constante, soumis à des déformations conservant leur symétrie, n'est pas encore, il faut bien le constater, à la portée des non-spécialistes<sup>1</sup>. Et c'est un fait déplorable car enfin, si en génie civil l'importance de l'ouvrage justifie généralement des frais

<sup>1</sup> En termes spécialisés, on parle du problème de « la flexion circulaire des enveloppes de révolution ». Même les théories classiques plus ou moins simplifiées (Geckeler, Flügge, etc.) ne sont encore abordables qu'au spécialiste.

d'études assez considérables, il est bien des cas, en mécanique et en chaudronnerie, où la réalisation ne permet pas de financer une recherche aussi complexe ; pourtant, ici aussi, les conséquences d'un accident peuvent être également graves. Enfin, quel constructeur ne désirerait pas pouvoir se faire par lui-même une idée des conséquences du choix de telles ou telles dimensions et formes, au moyen de formules simples à appliquer, sans d'ailleurs pour cela prétendre s'affranchir du contrôle final plus précis du spécialiste ? De telles formules rendraient également les plus grands services aux organisateurs d'essais tensométriques, la prévision des valeurs et de l'emplacement des tensions maxima leur étant particulièrement nécessaire.

Cette note cherche à répondre à ce désir, à combler cette lacune. Son seul but est, par des calculs simples et courants, de rendre prévisibles les tensions dans des régions présumées dangereuses de tels corps creux.

Ce calcul simplifié ne se propose nullement de remplacer l'étude approfondie ; il est à celle-ci ce qu'un projet est à une étude définitive.

Mentionnons que le lecteur, soucieux uniquement d'applications, peut se contenter de prendre connais-

sance du résumé figurant au paragraphe 6. L'exemple numérique traité en fin d'article est encore susceptible de faciliter les premiers calculs.

## 2. Une théorie simplifiée et l'équation différentielle qui en résulte

Les lignes qui suivent exposeront une théorie qui, par quelques simplifications essentielles et en ne faisant appel qu'à des notions très courantes, permet d'obtenir rapidement une équation différentielle assez simple pour le but poursuivi.

Pour faire saisir les conséquences des simplifications consenties, il eût été nécessaire de développer la théorie rigoureuse permettant seule d'écrire les termes qui seront négligés. Nous y avons renoncé, conscients que cette théorie, longue et ardue, sortirait certainement des préoccupations de la plupart des lecteurs de cet article. Mais que le lecteur ne soit pas dupe de la brièveté imposée à quelques affirmations : l'équation différentielle simplifiée résulte également de la théorie rigoureuse, moyennant l'abandon justifié de certains termes d'importance ici secondaire.

Un corps creux de révolution sera défini par sa coupe méridienne tracée en figure 1. Cette figure résume également les notations utilisées qui seront rappelées au paragraphe 6.

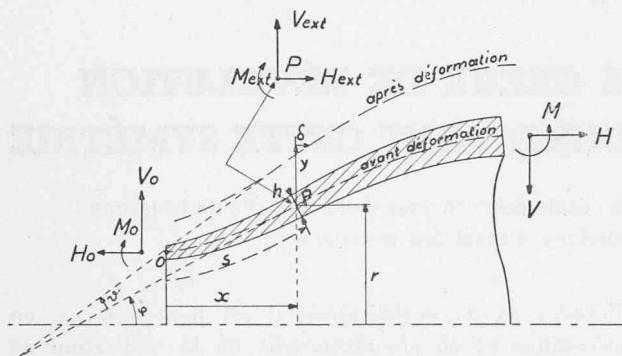


Fig. 1. — Coupe méridienne du corps creux. Notations et sens positifs.

Sous l'action des forces et moments extérieurs ou appliqués dans les deux sections terminales, une bande, comprise entre deux plans méridiens (passant par l'axe) faisant entre eux l'angle élémentaire  $d\psi$  et qui serait détachée de ce corps, serait fléchie comme une poutre de même forme si la rigidité circulaire ne s'opposait à ses déformations. C'est l'objet des alinéas suivants de calculer les forces latérales développées par les déformations d'une telle bande.

### A. Déformations d'un anneau circulaire

Considérons un anneau circulaire détaché du corps par deux sections planes normales à l'axe, à distance axiale élémentaire  $dx = ds \cdot \cos \varphi$  l'une de l'autre (fig. 2). Supposons cet anneau déformé sous l'effet :

- d'une extension radiale  $y$  uniforme, les sections méridiennes indéformées se déplaçant radialement ;

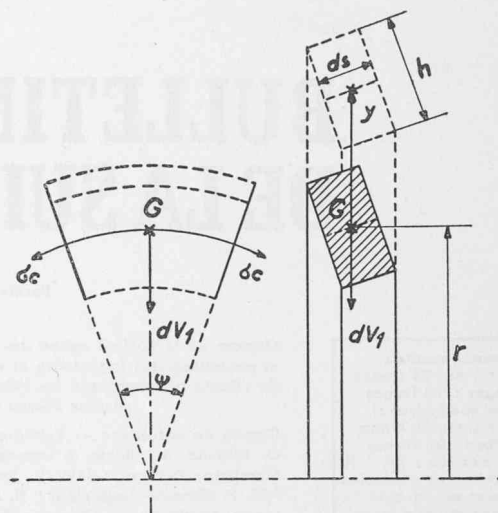


Fig. 2. — Extension radiale de l'anneau élémentaire.

- d'une rotation  $\theta$  méridienne uniforme de ses sections méridiennes indéformées autour de leurs centres de gravité.

Calculons les efforts circulaires s'opposant à ces déformations.

- L'extension radiale  $y$ , c'est-à-dire le déplacement radial  $y$  des sections méridiennes indéformées de l'anneau, provoque un allongement circulaire spécifique :

$$\epsilon_c = \frac{y}{r}.$$

La première simplification est introduite ici en considérant que la contraction latérale peut se faire librement dans les plans méridiens normaux à la direction circulaire.

L'allongement  $\epsilon_c$  doit ainsi provenir de tensions circulaires  $\sigma_c \cong E \cdot \frac{y}{r}$  <sup>1</sup>.

Les tensions  $\sigma_c$ , agissant sur un élément angulaire d'anneau d'angle élémentaire  $d\psi$ , ont une résultante radiale centripète

$$(1) \quad dV_1 \cong E \frac{y}{r} S \cdot d\psi = E \frac{y}{r} h \cdot d\psi \cdot ds.$$

$E$  module d'élasticité en sollicitation monoaxiale ;  
 $S$  aire de la section méridienne de l'élément ;  
 $h$  épaisseur de l'élément.

- La rotation méridienne uniforme  $\theta$ , des sections méridiennes indéformées de l'anneau autour de leurs centres de gravité, a pour conséquence des extensions variables  $\epsilon'_c$  des diverses fibres circulaires de l'anneau définies par les abscisses  $\xi$  (fig. 3) :

$$\epsilon'_c = \frac{\xi \cdot \theta}{r}.$$

Une deuxième simplification permet d'écrire une expression simple des tensions circulaires  $\sigma'_c$  correspondantes : la déformation, moyenne de  $\epsilon'_c$ , étant nulle, posons maintenant que la rigidité latérale dans le sens

<sup>1</sup> Le signe  $\cong$  rappelle que l'expression n'est qu'approximative, par suite des simplifications introduites.

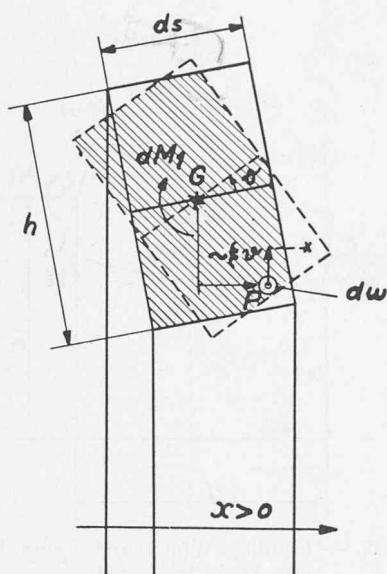


Fig. 3. — Déformation par rotation méridienne des sections de l'anneau élémentaire.

longitudinal s'oppose absolument à la contraction latérale. Ainsi :

$$\sigma_c \cong \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{\xi \cdot \theta}{r}.$$

Ces tensions, agissant sur le même élément angulaire  $d\psi$  d'anneau, n'ont aucune résultante méridienne, mais créent un couple méridien de moment :

$$(2) \quad dM_1 \cong \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\theta}{r} \cdot d\psi \cdot I_r = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{\theta}{r} h^3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\psi \cdot ds.$$

$I_r$  moment d'inertie de la section méridienne de l'élément d'anneau, par rapport à l'axe radial passant par son centre de gravité ;

$\nu$  coefficient de Poisson.

#### B. Déformation d'une bande longitudinale

Pour définir simplement les lois élastiques de la déformation d'une bande longitudinale, détachée du corps creux entre deux plans méridiens faisant entre eux l'angle élémentaire  $d\psi$ , nous introduisons :

une troisième simplification concernant l'effet de la rigidité circulaire du corps, en posant que cette rigidité circulaire empêche entièrement la contraction latérale qui, si la bande était libre, serait l'effet secondaire des déformations longitudinales.

La loi fondamentale de la flexion  $M = EJ \frac{d\theta}{ds}$  devient ainsi :

$$(3) \quad M \cong \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d\theta}{ds} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot rh^3 \cos \varphi \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot d\psi.$$

$M$  moment intérieur longitudinal agissant dans un plan méridien sur les sections circulaires de la bande, positif s'il provoque un allongement des fibres intérieures ;

$J$  moment d'inertie usuel à la flexion.

Quatrième simplification : En négligeant l'allongement de la fibre moyenne longitudinale, la relation entre les déformations  $y$  et  $\theta$  s'écrit simplement :

$$(4) \quad \theta \cong \frac{dy}{dx}.$$

#### C. Equilibre d'un élément de la bande

De l'équilibre classique du premier ordre d'un élément de longueur axiale  $dx = ds \cdot \cos \varphi$  de la bande, résulte en particulier la loi bien connue :

$$T = \frac{dM}{ds} = \cos \varphi \cdot \frac{dM}{dx}.$$

L'effort tranchant  $T$  étant lié aux forces  $V$  et  $H$  par la relation

$$T = V \cos \varphi + H \sin \varphi$$

il vient :

$$(5) \quad V = \frac{dM}{dx} - H \cdot \tan \varphi.$$

$V$  composante radiale des forces intérieures agissant sur la section circulaire de la bande, positive si elle tend à faire tourner cette section dans le sens des  $\varphi$  décroissants ;

$H$  composante axiale correspondant à  $V$ , positive si elle cause une traction axiale.

L'équilibre des moments du second ordre de ce même élément conduit à considérer le deuxième terme du développement de la variation des moments :

$$\Delta M = dM + \frac{1}{2} d^2 M + \dots$$

et les forces qui, par leurs variations agissant au centre de gravité de l'élément, donnent des moments du second ordre. La figure 4 indique uniquement les éléments nécessaires à exprimer cet équilibre des moments pris par rapport au point  $B$ . Notons, pour la compréhension de cette figure, que  $M_{\text{stat}}$  est, au point considéré, le moment de toutes les forces extérieures données, agissant sur la bande longitudinale d'angle  $d\psi$  entre l'origine et ce point, augmenté du moment des forces intérieures à l'origine  $H_0, V_0, M_0$ .

Au point  $B$ , l'équilibre des moments du second ordre s'exprime, en multipliant par  $2/dx^2$ , par la relation

$$(6) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{dV_1}{dx} - \frac{d^2 M_1}{dx^2} = - \frac{d^2 M_{\text{stat}}}{dx^2}.$$

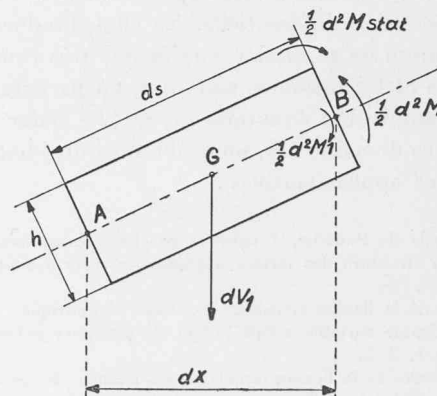


Fig. 4. — Equilibre des moments du second ordre.

## D. Equation différentielle simplifiée

En introduisant les relations (1), (2), (3) et (4) dans l'équation (6), il vient avec  $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dx}$

$$(rh^3 \cos \varphi \cdot y'')'' - \left( \frac{h^3 \sin^2 \varphi}{r \cos \varphi} y' \right)' + 12(1 - \nu^2) \frac{h}{r \cos \varphi} \cdot y \cong \frac{12(1 - \nu^2)}{E \cdot d\psi} \cdot M''_{\text{stat}}.$$

Développons et adoptons, pour  $d\psi$  arbitraire, la valeur  $2\pi$  (ce qui revient à totaliser les forces et moments sur la circonférence entière), l'équation différentielle simplifiée s'écrit enfin :

$$I \quad y^{IV} + 2 \frac{(rh^3 \cos \varphi)'}{rh^3 \cos \varphi} \cdot y''' + \left[ \frac{(rh^3 \cos \varphi)''}{rh^3 \cos \varphi} - \left( \frac{\text{tg} \varphi}{r} \right)^2 \right] \cdot y'' - \frac{\left[ rh^3 \cos \varphi \left( \frac{\text{tg} \varphi}{r} \right)^2 \right]'}{rh^3 \cos \varphi} \cdot y' + \frac{12(1 - \nu^2)}{(rh \cos \varphi)^2} \cdot y \cong \frac{6(1 - \nu^2)}{E \cdot \pi} \cdot \frac{M''_{\text{stat}}}{rh^3 \cos \varphi}.$$

## E. Validité de l'équation différentielle simplifiée

Les simplifications faites écartent des termes dus à la contraction latérale, donc facteur du coefficient de Poisson  $\nu$  (voisin de 0,3 pour l'acier).

Des développements rigoureux, sortant du cadre de cet exposé, montreraient que tous ces termes sont également facteurs de  $\sin \varphi$ <sup>1</sup>. Ainsi l'équation différentielle simplifiée sera d'autant plus exacte que le corps creux se rapprochera davantage d'un tube cylindrique à épaisseur variable, cas pour lequel l'équation devient rigoureuse<sup>2</sup>. Par contre l'équation ne traduirait que très approximativement les lois des plaques de révolution à épaisseur variable ( $\sin \varphi = 1$ )<sup>3</sup>.

Les limites d'application, auxquelles conduira au paragraphe 5 la recherche de solutions approximatives à cette équation simplifiée, rendent son emploi très suffisant pour le but recherché.

## 3. Les hyperstatiques aux extrémités d'un corps creux très court

Le cas du corps creux très court permet de s'affranchir de l'équation différentielle. En effet, l'influence de la déformation de sa section méridienne très courte est négligeable et les raisonnements qui, au paragraphe 2, avaient conduit aux équations (1) et (2), peuvent être étendus à ce domaine fini, pour obtenir immédiatement les relations approximatives :

<sup>1</sup> Une étude de l'auteur, à paraître prochainement, donnera en particulier la structure des termes négligés par suite des simplifications adoptées.

<sup>2</sup> L'étude de la flexion circulaire des tubes cylindriques de révolution à épaisseur variable a fait l'objet de plusieurs publications : bibliographie 1, 2, 3.

<sup>3</sup> Pour l'étude de la flexion circulaire des plaques de révolution à épaisseur variable, le lecteur peut se reporter à la publication : bibliographie 4.

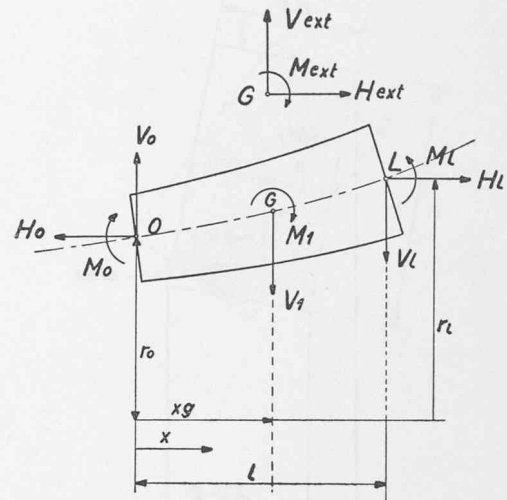


Fig. 5. — Equilibre d'une bande isolée du corps creux très court.

( $d\psi$  est pris égal à  $2\pi$  par convention.)

$$V_1 \cong 2\pi \cdot E \cdot \frac{y_g}{r_g} \cdot S$$

$$M_1 \cong 2\pi \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\theta_g}{r_g} \cdot I_r.$$

$V_1$  et  $M_1$  sont (fig. 5) les forces et moments (totalisés sur la circonférence entière) qu'oppose la rigidité circulaire aux déformations du corps, définies par :

- a) l'extension radiale moyenne égale au déplacement radial  $y_g$  du centre de gravité de la section méridienne ;
  - b) la rotation  $\theta_g$  de cette section méridienne dans son plan autour du centre de gravité.
- $S$  aire de la section méridienne totale du corps creux très court ;  
 $I_r$  moment d'inertie de cette section méridienne par rapport à l'axe radial passant par son centre de gravité ;  
 $r_g$  rayon de la fibre circulaire passant par ce centre de gravité.

En exprimant, selon la figure 5, l'équilibre de la bande longitudinale d'angle  $d\psi$  du corps creux très court sous l'effet des forces originaires  $H_0, V_0, M_0$ , des forces terminales  $H_l, V_l, M_l$  et des forces radiales  $V_1$  et  $M_1$ , il vient :

$$II \quad \begin{cases} 2\pi \cdot E \cdot \frac{S}{r_g} \cdot y_g \cong V_0 - V_l + V_{\text{ext}} \\ 2\pi \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{I_r}{r_g} \cdot \theta_g \cong -M_0 + M_l - M_{\text{ext}} - \\ - V_0 \cdot x_g - V_l(l - x_g) - H_0(r_g - r_0) - H_l(r_l - r_g) \end{cases}$$

puis évidemment :

$$\begin{cases} y_0 \cong y_g - x_g \cdot \theta_g & \theta_0 \cong \theta_l \cong \theta_g \\ y_l \cong y_g + (l - x_g) \cdot \theta_g \end{cases}$$

- $l$  longueur axiale du corps creux très court ;
- $x_g$  abscisse du centre de gravité de la section méridienne rapportée à la section origine ;



$M_{\text{ext}}$  et  $V_{\text{ext}}$  sont le moment au centre de gravité et la force radiale dus aux forces appliquées sur le corps, totalisés sur la circonférence entière.

Ces relations donnent les expressions liant forces et déformations.

#### 4. Recherche de solutions approximatives amorties à l'équation différentielle simplifiée

Considérons seulement maintenant les corps creux dont la forme et la longueur font présumer l'amortissement longitudinal des déformations provoquées à l'origine, ce qui sera le cas dans les limites d'application prévues à la fin du paragraphe 5.

Mettons l'équation différentielle I sous la forme abrégée :

$$y^{IV} + \alpha y''' + \beta y'' + \gamma y' + \epsilon y \cong \mu$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\epsilon$  et  $\mu$  étant les fonctions de  $x$  que l'on reconnaît facilement par comparaison avec l'écriture développée.

Pour chercher des valeurs approchées des hyperstatiques à l'origine adoptée, nous déterminons une solution approximative de cette équation en cherchant à satisfaire à l'équation différentielle écrite avec des valeurs constantes des coefficients, valeurs égales à celles que ces coefficients prennent à l'origine<sup>1</sup>.

La solution cherchée sera donc la somme d'une solution particulière de l'équation à coefficients constants avec second membre également constant et différent de zéro, et de la solution générale de l'équation homogène ( $\mu = 0$ ) à coefficients constants.

##### A. Solution particulière de l'équation avec second membre et coefficients constants

En considérant donc  $\epsilon$  et  $\mu$  comme constants, la solution particulière la plus simple est :

$$y_1 \cong \frac{\mu}{\epsilon}$$

##### B. Solution générale de l'équation avec second membre et coefficients constants

L'équation caractéristique s'écrit :

$$u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \epsilon = 0.$$

Au lieu de chercher la racine de cette équation caractéristique, déterminons un polynôme  $u^2 + au + b$  qui divise exactement son premier membre.

Une fois déterminés les coefficients  $a$  et  $b$  de ce polynôme, la solution approximative cherchée sera de la forme :

$$y \cong \frac{\mu}{\epsilon} + e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left[ \zeta_0 \cos\left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \cdot x\right) + \eta_0 \sin\left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \cdot x\right) \right]$$

avec :

$$\zeta_0 = y_0 - \frac{\mu}{\epsilon}$$

$$\eta_0 = \frac{\theta_0 + \zeta_0 \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}$$

#### 5. Calcul approximatif des hyperstatiques à l'origine

Introduisons cette solution dans les équations (3) et (5) en tenant compte de la relation (4). Il vient à l'origine considérée (indice zéro) :

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{6(1-v^2)}{E \cdot \pi} \cdot M_0 \cong -(rh^3 \cos \varphi)_0 \cdot \left[ a\theta_0 + b \left( y_0 - \frac{\mu}{\epsilon} \right) \right] \\ \frac{6(1-v^2)}{E \cdot \pi} \cdot V_0 \cong (rh^3 \cos \varphi)_0 \cdot \left[ (a^2 - b)\theta_0 + ab \left( y_0 - \frac{\mu}{\epsilon} \right) \right] - \\ - (rh^3 \cos \varphi)_0' \cdot \left[ a\theta_0 + b \left( y_0 - \frac{\mu}{\epsilon} \right) \right] - H_0 \cdot \text{tg } \varphi_0 \end{cases}$$

$H_0$  est statiquement déterminé.

$V_0$  et  $M_0$  sont les hyperstatiques cherchées.

Ces forces sont totalisées sur la circonférence entière.

##### Détermination des coefficients $a$ et $b$ du polynôme

Des calculs sans difficulté mais fort longs montrent que  $a$  et  $b$  peuvent être déterminés par les relations

$$K = \frac{a}{\alpha} = \frac{\sqrt[4]{4\epsilon}}{\alpha} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{1}{4K(K-1)} + \left[ \frac{K - \frac{1}{2}}{K(K-1)} \frac{\gamma/\alpha}{\sqrt[4]{4\epsilon}} \right]^2} + \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\epsilon}{a^2} \cdot \frac{2 - \alpha/a}{(1 - \alpha/a)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta}{a^2(1 - \alpha/a)} + \frac{\gamma}{a^3(1 - \alpha/a)^2}}$$

L'expression de  $a$  pourrait se calculer par approximations successives. Mais des développements, qui par suite de leur complexité ne seront également pas reportés ici, prouvent que, moyennant une erreur relative maximum de l'ordre de 10 % sur  $M_0$  et  $V_0$ , calculés selon les relations (7), la première approximation de  $a$  peut être prise pour valeur définitive et certains termes de  $b$  peuvent être négligés, dans un domaine de valeurs des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\epsilon$  que nous définirons maintenant après changement de notations.

Remplaçant  $a$  et  $b$  par  $q$  et  $t$  au moyen des relations

$$q = \frac{\sqrt[4]{\epsilon}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad t = \frac{b}{\sqrt{\epsilon}} - 1,$$

les premières approximations ainsi adoptées s'écrivent

$$(8) \quad \begin{cases} q^2 \cong 1 + \frac{(\alpha/2)^2 - \beta}{2\sqrt{\epsilon}} \\ t \cong \frac{\alpha/2}{\sqrt{2} \sqrt[4]{\epsilon} \cdot q} \\ \text{Posant encore} \\ v = t \cdot \frac{\gamma}{2\sqrt{\epsilon} \cdot \alpha/2} \end{cases}$$

le domaine de validité, dans lequel les hyperstatiques  $M_0$  et  $V_0$  seront déterminées avec une erreur relative

<sup>1</sup> Observons que ce procédé d'approximation est d'autant meilleur que l'ordre différentiel de l'équation est plus élevé. Si on ne se heurtait pas à des complications inextricables, il serait donc judicieux de dériver encore plusieurs fois l'équation différentielle à coefficients variables avant d'appliquer le procédé.

maximum de l'ordre de 10 %, est défini par les inéquations

$$|t| \leq 0,2 \quad \text{et} \quad |\nu| \leq 0,01.$$

En introduisant les expressions des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\epsilon$  et  $\mu$  en fonction des données (voir l'expression complète I de l'équation différentielle) dans les relations (8), nous trouvons enfin les expressions définitives qui, au moyen des égalités (7) permettent de déterminer les hyperstatiques cherchées  $M_0$  et  $V_0$ . Le tout s'exprime, moyennant quelques transformations supplémentaires, par les relations III du paragraphe suivant.

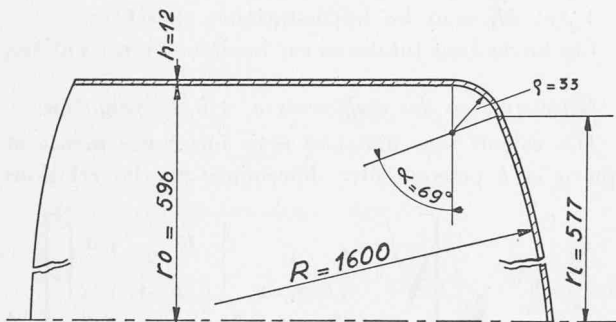


Fig. 6. — Coupe méridienne schématique du fond en anse de panier calculé.

## 6. Notations et résumé des formules

Consulter également les figures 1 et 5.

- o indice de la section origine ;
- l indice de la section terminale du corps creux très court ;
- g indice du centre de gravité de la section méridienne du corps creux très court ;
- h épaisseur prise perpendiculairement à la fibre moyenne ;
- l longueur axiale du corps creux très court ;
- p pression constante, positive si elle agit intérieurement ;
- r rayon de la fibre moyenne méridienne compté normalement à l'axe de révolution ;
- x abscisse axiale rapportée à la section origine ;
- $\varphi$  angle que fait avec l'axe la tangente à la fibre moyenne méridienne, positif si  $dr/dx$  est lui-même positif ;
- y déformation radiale, positive dans le sens des r croissants ;
- $\theta$  rotation de la fibre moyenne méridienne, positive dans le sens des  $\varphi$  croissants ;

$\bar{y} = \frac{E\pi}{6(1-\nu^2)} \cdot y$	déformation radiale réduite ;
$\bar{\theta} = \frac{E\pi}{6(1-\nu^2)} \cdot \theta$	rotation réduite ;

- M moment intérieur longitudinal agissant sur les sections circulaires, totalisé sur la circonférence entière et positif s'il provoque un allongement des fibres longitudinales intérieures ;
- $M_{\text{ext}}$  moment dû aux forces extérieures appliquées : a) sur toute la longueur du corps creux très court, ou b) entre le point considéré et l'origine du corps creux « long », positif dans le sens des  $\varphi$  décroissants, totalisé comme M ;
- $M_{\text{stat}} = M_{\text{ext}} + M_0 + V_0 \cdot x + H_0 \cdot (r - r_0)$ , pour le corps creux « long » uniquement ;
- N force normale longitudinale intérieure totalisée sur la circonférence entière et positive si elle provoque une traction ;

- V composante radiale des forces intérieures agissant sur les sections circulaires, positive si elle tend à faire tourner ces sections dans le sens des  $\varphi$  décroissants, totalisée comme M ;
- $V_{\text{ext}}$  composante radiale des forces extérieures appliquée sur toute la longueur du corps creux très court, positive dans le sens des r croissants, totalisée comme M ;
- H composante axiale des forces intérieures agissant sur les sections circulaires, positive si elle cause une traction axiale, totalisée comme M ;
- E module d'élasticité en sollicitation monoaxiale ;
- $\nu$  coefficient de Poisson (inverse du coefficient de contraction latérale) ;
- S aire de la section méridienne totale du corps creux très court ;
- $I_r$  moment d'inertie de la section méridienne totale du corps creux très court par rapport à l'axe radial passant par son centre de gravité ;
- q, t,  $\nu$  ; A, B, C ; A', B', C' notations abrégées ;
- ( )'  $d( )/dx$ .

## Résumé des formules

### A. Corps creux très court (fig. 5)

Les équations approximatives suivantes lient les forces et les déformations dans les sections origine et terminale circulaires :

$$\text{II} \left\{ \begin{aligned} \bar{y}_g &\cong \frac{r_g}{12(1-\nu^2) \cdot S} \cdot [V_0 - V_l + V_{\text{ext}}] \\ \bar{\theta}_g &\cong \frac{r_g}{12 \cdot I_r} \left[ -M_0 + M_l - M_{\text{ext}} - V_0 \cdot x_g - \right. \\ &\quad \left. - V_l(l-x_g) - H_0(r_g-r_0) - H_l(r_l-r_g) \right] \\ &\text{puis} \\ \bar{y}_0 &\cong \bar{y}_g - x_g \cdot \bar{\theta}_g \quad \bar{\theta}_0 \cong \bar{\theta}_l \cong \bar{\theta}_g \\ \bar{y}_l &\cong \bar{y}_g + (l-x_g) \cdot \bar{\theta}_g. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de H sont statiquement déterminées.

### B. Corps creux « long » (avec amortissement des déformations) (fig. 1)

Posant :

les valeurs de r, et ses dérivées, h et  $\varphi$  étant prises à l'origine

$$\text{III}_1 \left\{ \begin{aligned} q^2 &= 1 + \frac{rh \cos \varphi}{\sqrt{48(1-\nu^2)}} \cdot \left[ \left( \frac{\text{tg} \varphi}{r} \right)^2 - (\log rh^3 \cos \varphi)' \right] = \\ &= 1 + \frac{rh \cos \varphi}{\sqrt{48(1-\nu^2)}} \cdot \left[ 2 \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{r''}{r} - 2(r'r'' \cos^2 \varphi)^2 + \right. \\ &\quad \left. (r''^2 + r'r''') \cos^2 \varphi + 3 \left( \frac{h'}{h} \right)^2 - 3 \frac{h''}{h} \right] \\ t &= \frac{\sqrt{rh \cos \varphi}}{\sqrt[4]{48(1-\nu^2)} \cdot q} \cdot (\log rh^3 \cos \varphi)' = \\ &= \frac{\sqrt{rh \cos \varphi}}{\sqrt[4]{48(1-\nu^2)} \cdot q} \cdot \left[ \frac{r'}{r} - r'r'' \cos^2 \varphi + 3 \frac{h'}{h} \right] \\ \nu &= \frac{rh \cos \varphi}{\sqrt{48(1-\nu^2)}} \cdot \left( \frac{\text{tg} \varphi}{r} \right)^2 \cdot \left[ 1 + 2 \frac{\left( \log \frac{\text{tg} \varphi}{r} \right)'}{(\log rh^3 \cos \varphi)'} \right] \cdot t = \\ &= \frac{rh \cos \varphi}{\sqrt{48(1-\nu^2)}} \cdot \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \cdot \left[ 1 + 2 \frac{\frac{r''}{r} - \frac{r'}{r'r'' \cos^2 \varphi}}{\frac{r'}{r} - r'r'' \cos^2 \varphi + 3 \frac{h'}{h}} \right] \cdot t \end{aligned} \right.$$

Rappel :  $r' = \text{tg} \varphi$ .

Lorsque  $|t| \leq 0,2$  et  $|\nu| \leq 0,01$ ,

les hyperstatiques  $M_0$  et  $V_0$  peuvent être calculées, avec une erreur relative maximum de l'ordre de 10 %, par les expressions (*exactes si  $t = \nu = 0$* )

$$\text{III}_2 \quad \begin{cases} M_0 = A\bar{y}_0 + B\bar{\theta}_0 + C \cdot M''_{\text{stat}0} \\ V_0 = A'\bar{y}_0 + B'\bar{\theta}_0 + C' \cdot M''_{\text{stat}0} - H_0 \cdot \text{tg} \varphi_0 \\ \text{où, les valeurs de } r, h \text{ et } \varphi \text{ étant prises à l'origine,} \\ A \cong -\sqrt{12(1-\nu^2)} \cdot h^2 \cdot (1+t) \\ A' \cong -\sqrt[4]{48(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{1}{rh \cos \varphi}} \cdot q \cdot A \\ B \cong -\sqrt[4]{48(1-\nu^2)} \cdot h^2 \cdot \sqrt{rh \cos \varphi} \cdot q \cdot (1+t) \\ B' \cong -(2q^2 - 1) \cdot A \\ C \cong \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot rh \cos \varphi \cdot (1+t) \\ C' \cong \frac{A'}{A} \cdot C \end{cases}$$

$H$  est statiquement déterminé, et la force normale

$$N = H \cdot \cos \varphi - V \cdot \sin \varphi.$$

Enfin, si les forces appliquées « extérieures » se limitent à une pression constante  $p$  (positive si elle agit intérieurement) :

$$H = \pi \cdot r^2 \cdot p$$

$$\text{et} \quad M''_{\text{stat}0} = \pi \cdot p \cdot \left( 2 \frac{r_0}{\cos^2 \varphi_0} + r_0^2 r_0'' \right).$$

## 7. Exemple : calcul d'un fond en anse de panier

### A. Généralités

Déterminons, par la méthode proposée, les forces et moments intérieurs maxima dans un fond en anse de panier terminant un réservoir cylindrique soumis à la pression intérieure (fig. 6).

On peut prévoir que l'élément de tore provoque, par suite de sa rigidité considérable, des moments fléchissants élevés le long des deux cercles de raccordement avec le cylindre et la sphère, et que ces moments s'amortissent rapidement respectivement dans le cylindre et dans la sphère.

Dans ces conditions, le calcul simplifié peut être entrepris pour déterminer ces moments ; il le sera sur la base suivante :

a) le tore sera considéré comme un élément très court auquel les équations II du paragraphe 6 sont applicables ;

b) les relations III du même paragraphe 6 permettent le calcul dans le cylindre et la sphère, puisque les limites  $y$  seront observées :

$$|t| \leq 0,2 \quad \text{et} \quad |\nu| \leq 0,01.$$

Les données numériques résultent de la figure 6, représentant une coupe méridienne du fond.

Tous les calculs sont faits pour une pression intérieure  $p$  de 1 kg/cm<sup>2</sup>.

Les unités choisies sont exclusivement le kg et le cm.

### B. Les hyperstatiques du tore

Des calculs élémentaires, soit graphiques soit numériques, donnent

$$\begin{aligned} l &= 3,64 \text{ cm} & M_{\text{ext}} &\cong 0 \\ x_g &= 2,09 \text{ cm} & V_{\text{ext}} &= 1\,140 \text{ kg} \\ r_g &= 59,3 \text{ cm} & H_0 &= 11\,390 \text{ kg} \\ S &= 5,64 \text{ cm}^2 & H_l &= 10\,490 \text{ kg} \\ I_r &= 6,43 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Introduisant ces valeurs dans les équations II du paragraphe 6 :

$$(9) \quad \begin{cases} \bar{y}_g \cong +0,963 V_0 - 0,963 V_l + 1100 \\ \bar{\theta}_g \cong \bar{\theta}_0 \cong \bar{\theta}_l \cong -0,768 M_0 + 0,768 M_l - \\ \quad - 1,602 V_0 - 1,194 V_l + 20\,640 \\ \text{d'où :} \\ \bar{y}_0 \cong +1,602 M_0 - 1,602 M_l + 4,30 V_0 + \\ \quad + 1,528 V_l - 42\,000 \\ \bar{y}_l \cong -1,194 M_0 + 1,194 M_l - 1,528 V_0 - \\ \quad - 2,820 V_l + 33\,200. \end{cases}$$

### C. Les hyperstatiques du cylindre

L'origine du cylindre est l'origine du tore. Les données relevées sur la figure 6 sont les suivantes :

$$\begin{aligned} r &= r_0 = 60,2 \text{ cm} & H_0 &= 11\,390 \text{ kg} \\ h &= 1,2 \text{ cm} \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

d'où successivement, par les équations III du paragraphe 6 :

$q = 1, t = \nu = 0$  (les équations seront donc rigoureuses)

$$\text{et} \quad \begin{aligned} A &= -4,76 & A' &= 1,441 \\ B &= -31,47 & B' &= 4,76 \\ C &= 23,85 & C' &= -7,23 \end{aligned}$$

Prenant  $V_0$  et  $\bar{\theta}_0$  positifs, dans le sens fixé par la figure 1, pour l'origine du tore, il nous faut changer les signes de  $V_0$  et  $\bar{\theta}_0$  pour l'origine du cylindre puisque la direction axiale positive du cylindre est opposée à celle du tore. Il vient donc :

$$(10) \quad \begin{cases} M_0 = -4,76 \bar{y}_0 + 31,47 \bar{\theta}_0 + 9030 \\ V_0 = -1,441 \bar{y}_0 + 4,76 \bar{\theta}_0 + 2735 \end{cases}$$

### D. Les hyperstatiques de la sphère

L'origine de la sphère est l'extrémité du tore ; nous conservons l'indice  $l$  pour ce point commun. Il convient donc, pour la sphère, de remplacer les indices  $o$  par les indices  $l$  dans les équations III du paragraphe 6. Les données relevées sur la figure 6 sont les suivantes :



$$\begin{aligned} r_l &= 57,7 \text{ cm} & h &= 1,2 \text{ cm} \\ r_l' &= -2,592 & h' &= h'' = 0 \\ r_l'' &= -0,1337 \text{ 1/cm} & \cos \varphi_l &= 0,360 \\ r_l''' &= -0,01800 \text{ 1/cm}^2 & \sin \varphi_l &= -0,933 \end{aligned}$$

Les équations III du paragraphe 6 donnent successivement :

$$\begin{aligned} q &= 1,020 & H_l &= 10\,490 \text{ kg} \\ t &= -0,1709 \text{ donc } |t| \leq 0,2 & M_{\text{stat}_l} &= 1400 \text{ kg.cm} \\ \nu &= 0,001491 \text{ donc } |\nu| \leq 0,01 \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} A &\cong -3,942 & A' &\cong 2,072 \\ B &\cong -15,64 & B' &\cong 4,27 \\ C &\cong 6,25 & C' &\cong -3,285 \end{aligned}$$

d'où :

$$(11) \quad \begin{cases} M_l \cong -3,94 \bar{y}_l - 15,64 \bar{\theta}_l + 8\,740 \\ V_l \cong 2,072 \bar{y}_l + 4,27 \bar{\theta}_l + 22\,550 \end{cases}$$

#### E. Calcul numérique des hyperstatiques

Introduisant les relations (9) dans les égalités (10) et (11), les quatre équations obtenues, linéaires à quatre inconnues, résolues selon les méthodes élémentaires courantes, donnent enfin :

pour  $p = 1 \text{ kg/cm}^2$

$$\begin{aligned} M_0 &= 21\,600 \text{ kg.cm} & \text{comme : } H_0 &= 11\,400 \text{ kg} \\ V_0 &= 7\,260 \text{ kg} & H_l &= 10\,500 \text{ kg} \\ M_l &= 29\,200 \text{ kg.cm} & \text{il vient : } N_0 &= 11\,400 \text{ kg} \\ V_l &= 12\,600 \text{ kg} & N_l &= 15\,500 \text{ kg} \end{aligned}$$

#### F. Calcul des tensions longitudinales

L'expression des tensions longitudinales est bien évidemment :

$$\sigma_{\text{extérieure}}^{\text{extérieure}} = -3 \frac{M}{\pi r h^2} + \frac{1}{2} \frac{N}{\pi r h} \quad \left( \begin{array}{l} \text{traction comptée} \\ \text{positivement} \end{array} \right)$$

Au raccordement cylindre-tore :

$$\sigma_{\text{int}}^{\text{ext}} = -235 + 25 = -210 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{pour } p=1 \text{ kg/cm}^2$$

Au raccordement tore-sphère :

$$\sigma_{\text{int}}^{\text{ext}} = -335 + 35 = -300 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{pour } p=1 \text{ kg/cm}^2.$$

<sup>1</sup> Mesures effectuées par E. Hoehn pour l'Association suisse des propriétaires de chaudières : bibliographie 5.

#### 8. Comparaisons avec des mesures et conclusions

Des mesures effectuées sur un tel fond<sup>1</sup> montrent qu'en effet les tensions varient très rapidement au voisinage du tore, passant, des deux côtés, de valeurs positives (il s'agit des tensions extérieures) à des valeurs négatives très fortes pour atteindre un extré- mum aux environs immédiats du raccordement tore-sphère. La plus forte tension longitudinale extérieure mesurée dans cette région est de l'ordre de 200 kg/cm<sup>2</sup> pour  $p = 1 \text{ kg/cm}^2$ .

Remarquons de plus que les mesures ne sont pas ponctuelles. Donnant des valeurs moyennes sur des régions trop étendues, elles indiqueront des valeurs plus faibles que les extréma réellement atteints, et d'autant plus que la variation des tensions est rapide.

Cette remarque nous permet de conclure que les valeurs calculées des tensions, par les formules proposées au paragraphe 6, traduisent de façon très satisfaisante l'ordre de grandeur des valeurs maxima réellement atteintes, que seule permet d'estimer une critique approfondie des résultats de mesures. Les différences constatées donnent une légère marge de sécurité.

Observons encore l'intérêt qu'il y aurait, pour un métal suffisamment ductile, à dépasser la limite d'élasticité lors des essais d'un tel fond. Les tensions permanentes ainsi créées soulageraient sensiblement les régions qui sont le siège de ces flexions considérables. Une telle décision doit toutefois être exclusivement réservée au spécialiste qui prendra en considération non seulement la ductibilité mais également la sensibilité au vieillissement du métal et toutes autres circonstances éventuelles.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. A. DUMAS : Sur le régime des déformations et des contraintes d'une enveloppe cylindrique de révolution, d'épaisseur variable, sollicitée par des efforts circulaires. « Bulletin technique de la Suisse romande » n° 15/16, du 28 juillet 1945.
2. J. PASCHOUD : Recherche de l'élasticité d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur variable. « Bulletin technique de la Suisse romande », n° 15/16 du 28 juillet 1945.
3. J. PASCHOUD : Calcul des tubes cylindriques de révolution d'épaisseur variable sollicités à la flexion circulaire. « Bulletin technique de la Suisse romande » n° 2, du 27 janvier 1951, et Publication n° 14 de l'E. P. U. L.
4. J. PASCHOUD : Le calcul numérique de la flexion circulaire des plaques de révolution d'épaisseur variable. « Schweizer Archiv » n° 10, vol. 17, octobre 1951.
5. E. HOEHN : Über die Festigkeit der gewölbten Böden und der Zylinderschale. Im Auftrag des S. V. D. B.

Cette bibliographie rappelle seulement les études offrant des éléments directs de comparaison avec le texte.