

Extension de la méthode des lignes d'influence au calcul des systèmes articulés de l'espace

Autor(en): **Roubakine, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **79 (1953)**

Heft 11-12

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-59783>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

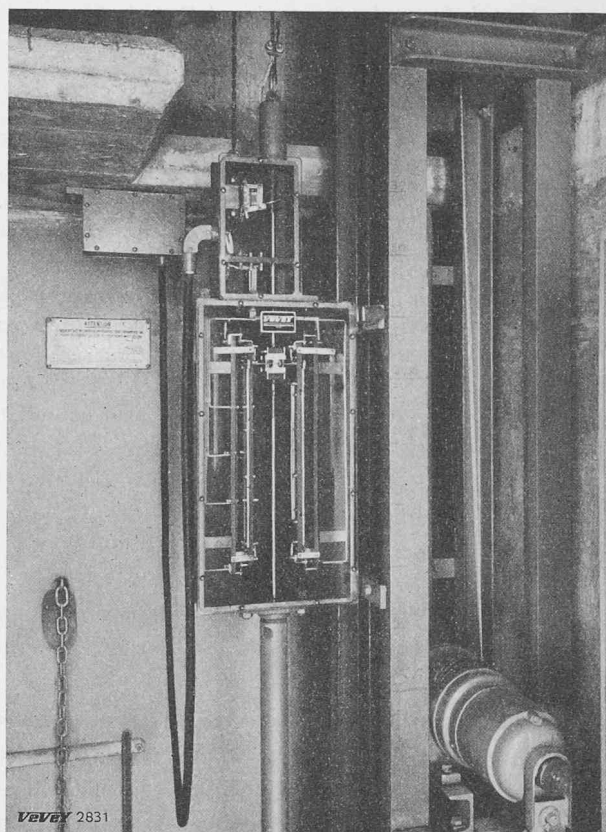
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La fermeture de la vanne est réalisée par deux autres contacts analogues à ceux d'ouverture. Quant à la marche de la vanne par intermittence, elle est obtenue par des relais à temps.

Avec le réglage sans asservissement, la hauteur du niveau est absolument indépendante du degré d'ouverture de la vanne. N'étant plus asservi à l'organe régulateur, un seul appareil peut commander facilement plusieurs vannes, l'une après l'autre ou simultanément. Au barrage de Lavey, qui comprend trois vannes doubles, le même appareil commande les six vantaux selon dix-huit programmes différents qui peuvent être choisis au gré de l'exploitant, figure 6.

Le régulateur automatique que nous venons de décrire agit par voie électrique et les ordres qu'il donne peuvent de ce fait être très facilement transmis à distance. Il peut régler non seulement en agissant sur des vannes mais aussi sur des turbines ou sur tout organe susceptible d'avoir une influence sur le niveau à régler, par exemple sur des corps de chauffe alimentés par un groupe hydro-électrique.

Fig. 6. — Régulateur automatique du niveau d'eau du barrage de Lavey.



EXTENSION DE LA MÉTHODE DES LIGNES D'INFLUENCE AU CALCUL DES SYSTÈMES ARTICULÉS DE L'ESPACE

par G. ROUBAKINE, ingénieur E. P. U. L., Lausanne

Le calcul des systèmes articulés gauches a fait, au début de ce siècle, des progrès remarquables grâce aux travaux de B. Mayor, professeur à l'Université et à l'École polytechnique de Lausanne. Jusque-là, les chercheurs avaient piétiné, se heurtant, sinon à des impossibilités, du moins à des calculs d'une lourdeur et d'une complication souvent prohibitives.

Le grand mérite de Mayor fut de comprendre que ces obstacles provenaient essentiellement du manque d'un mode de représentation adéquat des systèmes et des forces de l'espace, et de proposer une représentation nouvelle, d'une élégance admirable, qui allait aplanir les difficultés antérieures et ouvrir des perspectives inattendues.

En effet, la méthode habituelle de représentation par projections orthogonales sur deux plans de référence, suffisante tant qu'il s'agit d'éléments purement géométriques, ne l'est plus dès que l'on fait intervenir des forces. On s'en rend compte par exemple, en considérant le cas des systèmes articulés gauches dont le calcul se ramène à celui de l'équilibre de forces concourantes : les trois équations d'équilibre dans l'espace ne sont pas

équivalentes à l'ensemble des deux groupes de deux équations, relatives à l'équilibre des deux projections sur les deux plans de référence.

La représentation mayorienne permet d'établir entre les forces de l'espace et celles du plan une correspondance telle qu'aux trois conditions d'équilibre d'un point de l'espace sont liées d'une manière univoque et réciproque les trois conditions d'équilibre d'un corps rigide plan. Elle possède en outre le grand avantage de conserver le caractère dualistique de la droite, lieu de points ou intersection de plans. Il devient alors possible d'étendre aux systèmes articulés gauches toutes les méthodes analytiques et graphiques de la statique plane.

Il n'est pas dans notre propos d'exposer ici tous les aspects du mode de représentation de Mayor, qui est basé sur la théorie des complexes linéaires. Nous nous contenterons de rappeler ses formules fondamentales, ce qui nous permettra d'étendre aux systèmes gauches la méthode des lignes d'influence, si importante dans la pratique.

1. Rappel du mode de représentation de Mayor

Antiprojection d'un vecteur

Ce mode de représentation fait correspondre à un vecteur libre \vec{V} de l'espace (c'est-à-dire, à un vecteur donné en intensité et direction, mais non en position), un vecteur glissant \vec{V}' du plan de l'épure (c'est-à-dire, un vecteur dont l'intensité, le sens et la ligne d'action sont donnés).

Soient X, Y, Z , les composantes de \vec{V} par rapport à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ et X', Y', N' , les trois coordonnées du vecteur V' dans le plan Oxy , choisi comme plan de l'épure. X' et Y' sont ses projections sur les axes Ox et Oy et N' , son moment par rapport à l'origine O .

Les formules de correspondance de Mayor, entre ces deux vecteurs, sont les suivantes :

$$(1) \quad X' = -X, \quad Y' = -Y \quad \text{et} \quad N' = aZ$$

où a est une constante quelconque ayant la dimension d'une longueur. On a donné au vecteur \vec{V}' le nom d'antiprojection du vecteur \vec{V} (fig. 1).

Il résulte immédiatement de cette définition, que la projection \vec{V}_1 d'un vecteur sur le plan de l'épure, et son antiprojection \vec{V}' forment un couple ; si nous désignons par θ l'angle que fait le vecteur \vec{V} avec le plan de l'épure, la distance δ de \vec{V}' à l'origine O est :

$$(2) \quad \delta = \frac{N'}{V'} = \frac{aZ}{V_1} = \frac{aZ}{V \cos \theta} = \frac{aV \sin \theta}{V \cos \theta} = a \operatorname{tg} \theta.$$

L'intensité de l'antiprojection, égale à celle de la projection, est :

$$(2') \quad V' = V \cos \theta = \frac{V}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}.$$

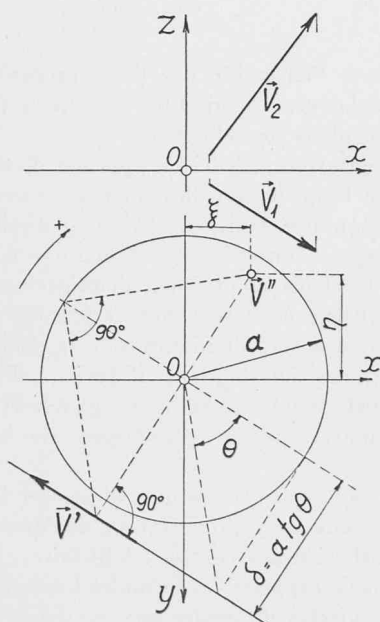


Fig. 1. — Antiprojection et image d'un vecteur.

L'antiprojection d'un vecteur horizontal passe par l'origine. Celle d'un vecteur vertical est à l'infini mais elle est aussi infiniment petite et peut donc être représentée par un couple de moment $aZ = aV$.

Connaissant l'antiprojection \vec{V}' d'un vecteur libre de l'espace, on peut calculer ses trois composantes XYZ et son intensité V par les formules :

$$(3) \quad X = -X', \quad Y = -Y', \quad Z = \frac{N'}{a} = \frac{V'\delta}{a},$$

$$V = V' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = V' \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{a^2}}.$$

Image d'un vecteur

Il est utile, dans de nombreuses applications, de faire correspondre au vecteur \vec{V} (XYZ), en plus de son antiprojection \vec{V}' , un autre vecteur \vec{V}'' , défini par les coordonnées suivantes :

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{Moment par rapport à l'axe } Ox : L'' = -aX \\ \text{Moment par rapport à l'axe } Oy : M'' = -aY \\ \text{Composante selon l'axe } Oz : Z'' = Z \end{array}$$

Nous donnerons à \vec{V}'' le nom d'« image » du vecteur \vec{V} .

Il résulte de cette définition que l'image \vec{V}'' d'un vecteur \vec{V} est un vecteur vertical, dont l'intensité est égale à la composante Z de \vec{V} et dont la trace sur le plan de l'épure (que l'on peut aussi considérer comme son point d'application) a pour coordonnées :

$$\xi = a \frac{Y}{Z}, \quad \eta = -a \frac{X}{Z}.$$

Il existe une relation entre l'antiprojection \vec{V}' et l'image \vec{V}'' d'un même vecteur \vec{V} : celle-ci s'applique à l'antipôle de la ligne d'action de \vec{V}' par rapport à la circonférence de rayon a , que l'on appelle « circonférence directrice » (fig. 1).

Connaissant l'image \vec{V}'' d'un vecteur, il est facile de calculer les trois composantes X, Y et Z de celui-ci : \vec{V}'' étant donné par son intensité Z'' et les coordonnées ξ et η de son point d'application, on a :

$$(5) \quad X = -\frac{\eta}{a} Z'', \quad Y = \frac{\xi}{a} Z'', \quad Z = Z''.$$

Antiprojection d'un système articulé de l'espace

La représentation mayorienne d'un système articulé S de l'espace fait correspondre à celui-ci un système articulé S' du plan, défini comme suit :

A chaque barre \vec{l}_{ik} de S correspond une barre \vec{l}'_{ik} de S' , qui est l'antiprojection du vecteur \vec{l}_{ik} et à laquelle on attribue un module convenable que nous préciserons plus loin¹.

¹ Le module d'une barre caractérise ses propriétés physiques : c'est l'expression $\mu = \frac{l}{E\omega}$ où l est la longueur de la barre, ω sa section, E le coefficient d'élasticité du matériau.

Les antiprojections des barres issues d'un même nœud ne sont en général pas concourantes et nous sommes en présence d'autant de points i' — arbitraires sur la ligne d'action de chaque vecteur \vec{l}'_{ik} — qu'il y a de barres issues du nœud i . Il est alors naturel de faire correspondre au nœud i une plaque infiniment mince, indéformable, mobile dans le plan de l'épure et à laquelle on attachera par des articulations les origines i' de toutes les barres $i'k'$ (fig. 2). Cette plaque sera l'« antiprojection » du nœud i .

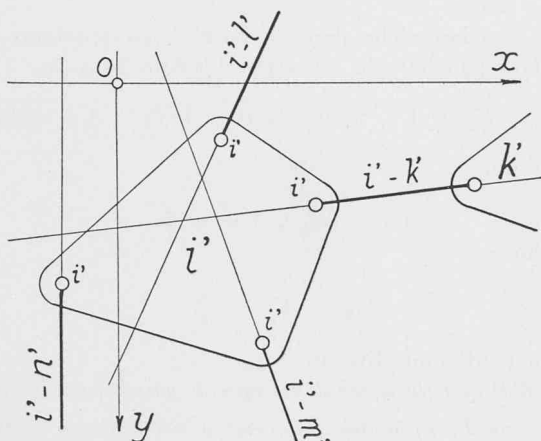


Fig. 2. — Antiprojection d'un nœud d'un système gauche.

Pour simplifier les épures, on préfère donner à l'antiprojection de chaque barre une longueur arbitraire, en faisant rentrer la longueur de cette antiprojection dans le module μ'_{ik} qu'on lui assigne pour le calcul des déformations. Le module de la barre ik étant :

$$\mu = \frac{l_{ik}}{E \omega_{ik}}$$

celui de son antiprojection sera :

$$\mu' = \frac{\mu}{\cos^2 \theta}$$

Chaque système S possède donc une infinité d'antiprojections S' . Mais Mayor a montré que l'une quelconque d'entre elles représente parfaitement le système donné du point de vue de la Statique : le calcul d'un système quelconque S' entraîne immédiatement celui du système S .

En effet, appliquons à chaque plaque de S' une force, antiprojection de celle qui agit sur le nœud correspondant de S ; il naît alors dans chaque barre $i'k'$ de S' une tension T'_{ik} et chaque plaque n' subit un déplacement élastique infiniment petit, dans le plan de l'épure — déplacement que l'on peut assimiler à une rotation et représenter par un vecteur δ''_n , perpendiculaire au plan de l'épure, de sens convenable, et appliqué au centre de rotation de la plaque.

Les relations, démontrées par Mayor, entre les tensions et les déformations du système S' , d'une part, et les éléments correspondants du système S , d'autre part, sont les suivantes :

1. Les vecteurs \vec{T}'_{ik} représentatifs des efforts intérieurs dans les barres de S' sont les antiprojections des vecteurs correspondants T_{ik} de S .
2. Les vecteurs δ''_n représentatifs des rotations des plaques de S' sont les images des vecteurs δ_n représentant les déplacements dans l'espace des nœuds de S .

Le calcul du système S' ne représente en général pas de difficultés. Toutes les méthodes de la statique plane peuvent être utilisées : graphiques (Cremona) ou analytiques (conditions d'équilibre de chaque plaque). Les déformations peuvent être calculées par des extensions de la méthode de Williot ou des antimasses.

Ce calcul est immédiat si le système donné est simple. S'il est polyédrique, la méthode de l'échange des barres permet de ramener son calcul à celui d'un ou de plusieurs systèmes simples. De même, le calcul d'un système hyperstatique peut être abordé par les méthodes classiques.

Mais c'est la méthode cinématique qui se révèle la plus avantageuse pour le calcul des antiprojections de systèmes gauches : elle va nous permettre d'aboutir à une généralisation de la notion de ligne d'influence, de calculer de la manière la plus simple les déformations de tout système gauche et, par conséquent, d'aborder aisément le calcul des systèmes hyperstatiques.

2. « Champ d'influence » de l'effort dans une barre d'un système gauche

Proposons-nous de calculer l'effort T_{ik} produit dans la barre ik d'un système articulé gauche simple par une force quelconque F_n appliquée à un nœud quelconque n .

Construisons un système S' , supprimons la barre $i'k'$ et remplaçons son action par deux forces égales et opposées, appliquées aux points d'attache de la barre supprimée, et équivalentes à l'effort inconnu T'_{ik} produit dans cette barre par l'antiprojection F'_n de F_n , appliquée à la plaque n' (fig. 3).

Imposons ensuite à la distance séparant les points d'attache de la barre supprimée une augmentation $\Delta l'_{ik}$, très petite, que nous prendrons comme unité des déformations. Toutes les plaques de la chaîne cinématique à liaison complète obtenue par la suppression de la barre $i'k'$ subissent de ce fait de petits déplacements assimilables à des rotations.

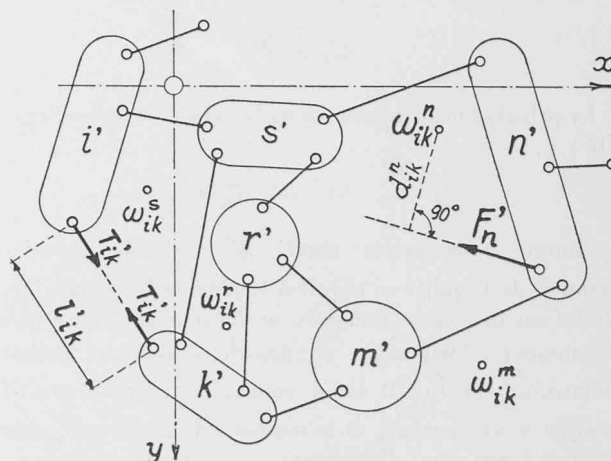


Fig. 3. — Application du principe des travaux virtuels.

La détermination de ces dernières est du domaine de la géométrie élémentaire, chapitre des déplacements instantanés de figures planes. Elle est basée sur les deux propriétés suivantes :

1. Une plaque 4 est reliée par trois barres 1-4, 2-4 et 3-4 aux trois points 1, 2 et 3 (fig. 4). Les points 2 et 3 restent fixes et les longueurs des barres 2-4 et 3-4 invariables. Le point 1 subit un petit déplacement $\vec{\delta}_1$, et la barre 1-4 une variation de longueur Δl_{1-4} considérée comme positive s'il s'agit d'un allongement.

La rotation de la plaque 4, que nous avons à déterminer, s'effectue autour du point d'intersection ω_{4-1} des droites 2-4 et 3-4. Son intensité résulte de l'équation :

$$(6) \quad \omega_{4-1} d_{4-1} = \Delta l_{1-4} + \delta_1 \cos \alpha_1$$

qui exprime que le déplacement du point A projeté sur la direction de la barre 1-4 se compose de l'allongement de cette dernière et de la projection du déplacement du point 1 sur cette même direction. Le vecteur $\vec{\omega}_{4-1}$ est dirigé dans le sens positif si la rotation s'effectue dans le sens positif également.

2. Lorsque deux plaques *i* et *k* reliées par une barre indéformable subissent respectivement les rotations représentées par les vecteurs $\vec{\omega}_i$ et $\vec{\omega}_k$, ces deux derniers sont liés par la relation (fig. 5) :

$$(7) \quad \omega_i d_i = \omega_k d_k$$

où les distances d_i et d_k sont à considérer comme étant de même signe si les vecteurs $\vec{\omega}_i$ et $\vec{\omega}_k$ se trouvent du même côté de l'axe de la barre *i'k'*, et inversement.

Cette relation exprime que les projections sur cet axe des déplacements respectifs des points A_i et A_k sont égales, la barre étant indéformable.

Le système donné étant supposé simple, les deux formules (6) et (7) permettent de déterminer, de proche en proche, tous les vecteurs $\vec{\omega}_{ik}$, en position, intensité et sens.

En particulier, la plaque *n'* subit une rotation représentée par le vecteur $\vec{\omega}_{ik}^n$ et le point d'application de la force F'_n subit un déplacement, dont la projection sur la direction de cette force est égale au moment statique du vecteur $\vec{\omega}_{ik}^n$ par rapport à la ligne d'action de F'_n (fig. 3).

Sa valeur est donc le produit :

$$\omega_{ik}^n d_{ik}^n.$$

Le principe des travaux virtuels permet d'écrire l'égalité :

$$T'_{ik} \Delta l'_{ik} = \omega_{ik}^n d_{ik}^n F'_n.$$

Comme nous avons choisi $\Delta l'_{ik} = 1$, le premier membre de l'égalité se réduit à la tension inconnue T'_{ik} . Quant au deuxième membre, ce n'est autre chose que le moment relatif $\vec{\omega}_{ik}^n \cdot \vec{F}'_n$ des deux vecteurs orthogonaux $\vec{\omega}_{ik}^n$ et \vec{F}'_n . Il est à considérer comme positif lorsque le vecteur $\vec{\omega}_{ik}^n$ et le moment de la force \vec{F}'_n par rapport à son point d'application sont de même signe — et comme négatif dans le cas contraire.

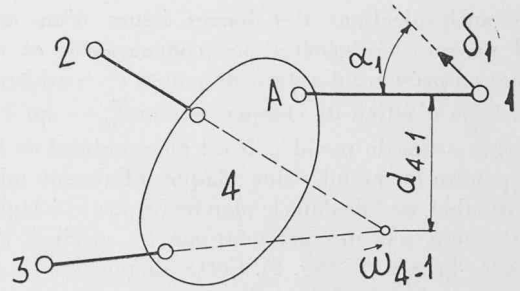


Fig. 4.

La tension réelle dans la barre correspondante du système gauche sera, en vertu des équations (3) :

$$T_{ik} = T'_{ik} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta_{ik}} = \vec{F}'_n \cdot (\vec{\omega}_{ik}^n \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta_{ik}}).$$

Posons :

$$(8) \quad \vec{v}_{ik}^n = \vec{\omega}_{ik}^n \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta_{ik}}.$$

Alors :

$$(9) \quad T_{ik} = \vec{F}'_n \cdot \vec{v}_{ik}^n$$

On peut donc dire que :

l'effort dans la barre ik du système gauche, produit par une force \vec{F}'_n appliquée au nœud n, est égale au moment relatif du vecteur \vec{v}_{ik}^n et de l'antiprojection \vec{F}'_n de \vec{F}'_n .

A chaque nœud du système *S* correspond un vecteur \vec{v}_{ik} (fig. 6). L'ensemble de ces vecteurs est un champ discontinu dont la connaissance entraîne le calcul immédiat de l'effort produit dans la barre *ik* par une force quelconque appliquée à un nœud quelconque. Ce champ des vecteurs \vec{v}_{ik} est donc bien une généralisation de la notion de ligne d'influence d'une tension. On peut l'appeler « champ d'influence » de l'effort dans la barre *ik* ¹.

Il y aura autant de champs d'influence que le système donné possède de barres — barres réelles ou barres fictives de liaison.

Un cas particulier important est celui où la force donnée est verticale et descendante. Cette force est représentée dans le plan de l'épure par un couple de moment — *aF*.

L'effort dans la barre *ik* est alors donné par l'expression :

$$T_{ik} = -a F_n v_{ik}^n.$$

¹ Ce champ d'influence est identique (à un facteur constant près) à l'« Einflussplan » de W. Prager (thèse, Berlin, 1926) qu'il a établi par une tout autre voie.

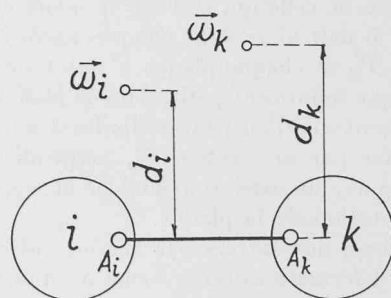


Fig. 5.

Si toutes les forces agissant sur les nœuds du système sont verticales, la tension dans la barre ik se réduit à une somme algébrique :

$$(10) \quad T_{ik} = -a \sum_1^n F_n v_{ik}^n.$$

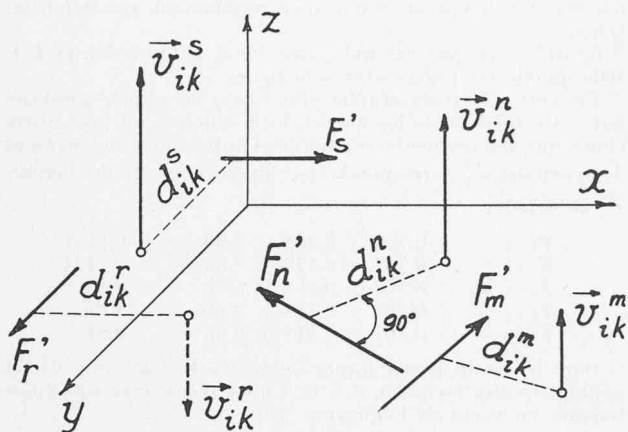


Fig. 6. — Champ d'influence des efforts dans la barre ik d'un système gauche.

3. Déformation d'un système articulé de l'espace

Le calcul du déplacement $\vec{\delta}_m$, dans l'espace, d'un nœud quelconque d'un système S sollicité par un groupe de forces extérieures résulte simplement de la connaissance des champs d'influence des efforts dans toutes les barres de ce système.

Supposons en effet que nous ayons déterminé au préalable les efforts T_{ik} dans toutes les barres de S . Considérons une antiprojection de S et calculons la rotation de la plaque m' dans l'hypothèse que toutes les barres de ce système sont indéformables à l'exception de l'une d'entre elles, $i'k'$ par exemple. Cette barre subit une variation de longueur :

$$T'_{ik} \mu'_{ik}$$

et la plaque m' une rotation représentée par le vecteur

$$(11) \quad \vec{\delta}_{m,ik}'' = \vec{\omega}_{ik}^m T'_{ik} \mu'_{ik}$$

puisque le vecteur $\vec{\omega}_{ik}^m$ représente la rotation de cette plaque lorsque la variation de la longueur $i'k'$ est égale à l'unité.

Mais :

$$\text{en vertu de (8): } \vec{\omega}_{ik}^m = \vec{v}_{ik}^m \cos \theta,$$

$$\text{en vertu de (2'): } T'_{ik} = T_{ik} \cos \theta$$

$$\text{et par définition: } \mu'_{ik} = \frac{\mu_{ik}}{\cos^2 \theta}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression (11), on constate que le vecteur $\vec{\delta}_{m,ik}''$ est donné par l'expression suivante, où ne figurent que des éléments relatifs au système de l'espace :

$$(12) \quad \vec{\delta}_{m,ik}'' = \vec{v}_{ik}^m T_{ik} \mu_{ik}.$$

Si maintenant nous tenons compte des déformations de toutes les barres de S' le vecteur représentatif de la rotation de m' sera

$$(13) \quad \vec{\delta}_m'' = \sum_{(ik)} \vec{v}_{ik}^m T_{ik} \mu_{ik}$$

où le signe $\sum_{(ik)}$ représente une somme géométrique de tous les vecteurs considérés.

Or, nous savons que $\vec{\delta}_m''$ est l'image du vecteur $\vec{\delta}_m$ cherché et le problème se trouve ainsi résolu.

Il est évident, d'autre part, que la notion de champ d'influence sera d'un emploi très avantageux chaque fois qu'il s'agira de ramener le calcul d'un système donné à celui d'un système principal dans plusieurs modes de charge. Ce sera le cas pour les systèmes polyédriques (par l'échange des barres) et des systèmes hyperstatiques.

Notons pour terminer que le mode de représentation de Mayor peut s'appliquer avec avantage au calcul des efforts secondaires dans un système articulé, ainsi qu'à celui des systèmes gauches non articulés : cadres rigides gauches, charpentes monolithiques de l'espace. S'il n'est pas possible de définir une antiprojection de tels systèmes, la transformation mayorienne n'en reste pas moins précieuse pour l'étude de leurs conditions d'équilibre et le calcul des efforts.

4. Exemple

Afin de préciser un peu les considérations qui précèdent, nous appliquerons les résultats obtenus à l'exemple suivant :

Proposons-nous d'établir les champs d'influence des efforts dans les barres d'une coupole Schwedler du type le plus simple représentée à la figure 7.

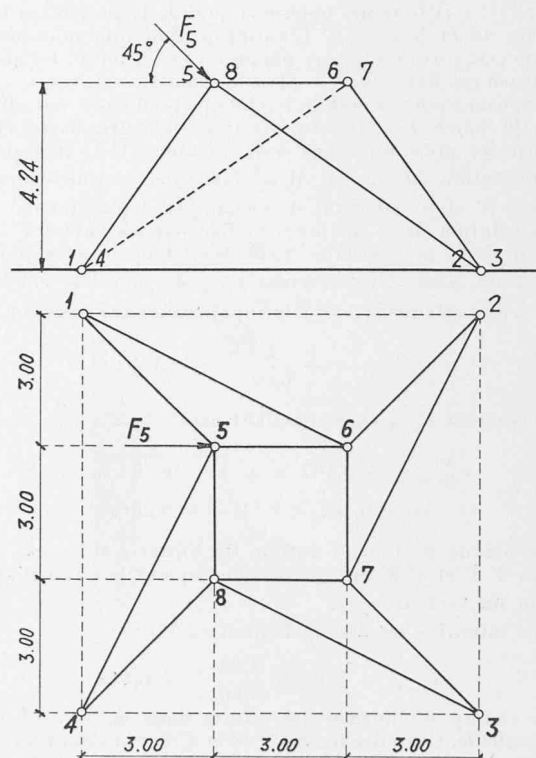


Fig. 7. — Coupole Schwedler.

Nous choisissons $a = 4$ m et commençons par dessiner une antiprojection du système donné (fig. 8).

Les barres 5-6, 6-7, 7-8 et 8-5 étant horizontales, leurs antiprojections passent par l'origine. Les barres 1-5, 2-6, 3-7 et 4-8 sont inclinées à 45° , leurs antiprojections sont tangentes à la circonférence directrice, car

$$\delta = a \operatorname{tg} \theta = a.$$

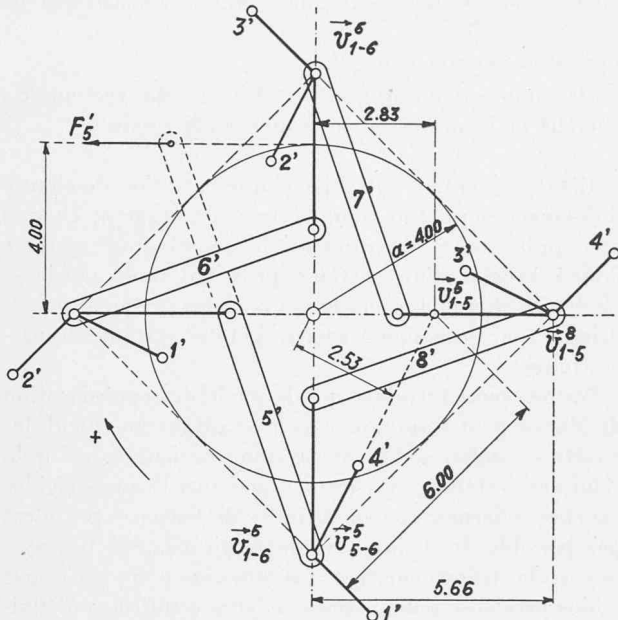


Fig. 8. — Antiprojection de la coupole Schwedler.

Pour les barres 1-6, 2-7, 3-8 et 4-5, dont la projection horizontale mesure 6,70 m, on a, en vertu de l'équation (2) :

$$\delta = 4,00 \frac{4,24}{6,70} = 2,53 \text{ m.}$$

Ces antiprojections tracées, il suffit de choisir les points d'attache des barres de S' de manière que le sens d'une barre $i'-k'$ soit toujours opposé à celui de la projection horizontale de la barre $i-k$. L'antiprojection que nous avons choisie comporte les quatre plaques 5', 6', 7' et 8', les autres nœuds étant fixes dans le plan horizontal.

Proposons-nous d'établir le champ d'influence des efforts dans la barre 1-5. L'antiprojection de cette barre étant supprimée, nous imposons à la distance 1'-5' une petite augmentation $\Delta l'_{1-5} = 1$. Il est facile de voir que seules les plaques 5' et 8' subissent de ce fait un déplacement.

La rotation de la plaque 5', reliée par les barres 4'-5' et 5'-6' à deux points fixes, s'effectue, dans le sens positif, autour du point d'intersection v_{1-5}^5 des axes de ces deux barres. Son intensité résulte de l'application de l'équation (6) :

$$w_{1-5}^5 = + \frac{1}{6,00} = + 0,167.$$

Le vecteur v_{1-5}^5 correspondant sera :

$$v_{1-5}^5 = + 0,167 \times \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_{1-5}} = + 0,167 \times 1,41 = + 0,236.$$

La plaque 8' tourne autour de l'intersection des deux barres 3'-8' et 4'-8' qui est par conséquent le point d'application du vecteur v_{1-5}^8 .

Son intensité résulte de l'équation (7) :

$$v_{1-5}^8 = + 0,236 \frac{2,83}{5,66} = + 0,118.$$

Le champ d'influence des efforts dans la barre 1-5 est ainsi calculé. Celui des barres 5'-6' et 1'-6' s'obtient tout aussi facilement : le champ relatif à la barre 5-6 est constitué par un seul vecteur v_{5-6}^5 d'intensité $+ 0,177$ et le champ relatif

à la barre 1-6 par deux vecteurs v_{1-6}^6 et v_{1-6}^5 d'intensité $+ 0,156$ et $- 0,156$. Les points d'application de tous ses vecteurs sont indiqués sur la figure 8.

Par suite de la symétrie centrale du système donné, ces trois champs d'influence permettent d'établir immédiatement ceux de toutes les autres barres. L'ensemble des champs d'influence des efforts dans toutes les barres de la coupole est représenté à la figure 9.

Nous pouvons maintenant calculer la coupole dans tous les cas de charge et déterminer rapidement ses déformations.

Considérons, par exemple, une force oblique F_5 de 1 t, telle qu'elle est représentée à la figure 7.

En vertu de règle établie plus haut, les efforts produits par cette force dans les barres de la coupole ne sont autre chose que les moments relatifs de l'antiprojection de F_5 et des vecteurs v_{ik}^5 correspondants. Nous avons donc, comme $F_5' = 0,707$ t. :

$$\begin{aligned} T_{1-5} &= - 0,707 \times 0,236 \times 4,00 = - 0,67 \text{ t} \\ T_{5-6} &= - 0,707 \times 0,177 \times 9,66 = - 1,21 \text{ t} \\ T_{4-5} &= - 0,707 \times 0,156 \times 4,00 = - 0,44 \text{ t} \\ T_{1-6} &= + 0,707 \times 0,156 \times 9,66 = + 1,06 \text{ t} \\ T_{2-6} &= - 0,707 \times 0,118 \times 9,66 = - 0,81 \text{ t} \end{aligned}$$

Dans le cas de quatre forces verticales descendantes de 1 t appliquées aux nœuds 5, 6, 7 et 8 nous trouverons immédiatement, en vertu de l'équation (10) :

$$\begin{aligned} T_{1-5} &= - 1' \times 4,00 \times (0,236 + 0,118) = - 1,42 \text{ t} \\ T_{4-5} &= - 1' \times 4,00 \times (0,156 - 0,156) = 0 \\ T_{5-6} &= - 1' \times 4,00 \times 0,177 = - 0,71 \text{ t} \end{aligned}$$

Calculons maintenant la déformation de la coupole sous l'action de la force F_5 .

Nœud 5

Le calcul des expressions $\vec{v}_{ik}^5 T_{ik} \mu_{ik} = \delta_{5, ik}''$ de l'équation (13) est résumé dans le tableau ci-dessous, et les vecteurs $E \delta_{5, ik}''$ sont représentés sur la figure 10.

Barres $i-k$	l_{ik} cm	Ω_{ik} cm ²	$E \cdot \mu_{ik}$	v_{ik}^5	T_{ik}	$E \cdot \delta_{5, ik}''$
1-5	600	30	20	+ 0,236	- 0,67	- 3,16
5-6	300	20	15	+ 0,177	- 1,21	- 3,21
4-5	794	15	53	+ 0,156	- 0,44	- 3,64
1-6	794	15	53	- 0,156	+ 1,06	- 8,76
2-6	600	30	20	+ 0,118	- 0,81	- 1,91

$$\Sigma = - 20,68.$$

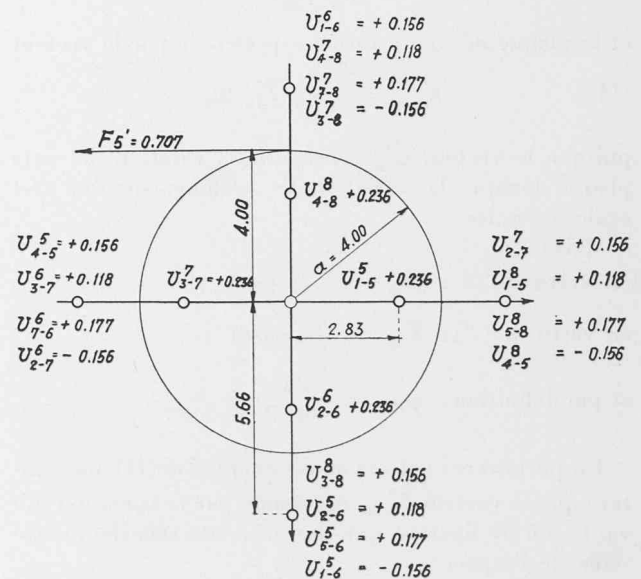


Fig. 9. — Champs d'influence des efforts dans toutes les barres de la coupole.

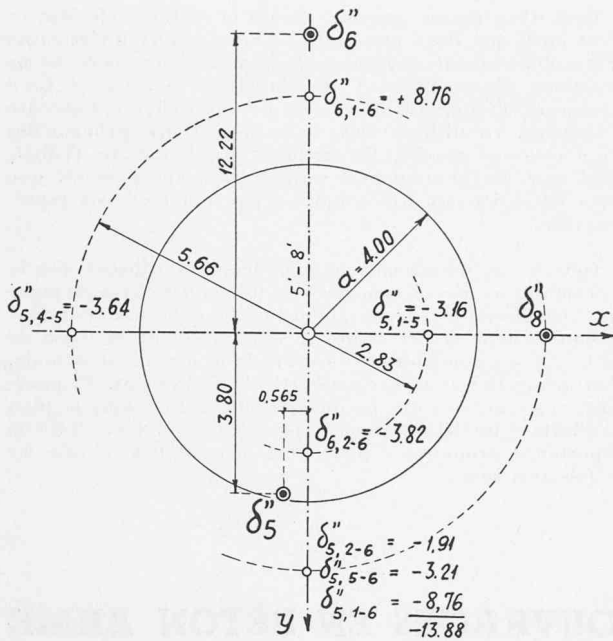


Fig. 10. — Déplacement des nœuds 5, 6 et 8.

Le vecteur $\vec{\delta}_5''$, somme géométrique des vecteurs $\vec{\delta}_{5,ik}''$, a pour intensité $-\frac{20,68}{E}$ cm et comme coordonnées du point d'application (fig. 10) :

$$\xi = \frac{-3,16 \times 2,83 + 3,64 \times 5,66}{-20,68} = -\frac{11,68}{20,68} = -0,565 \text{ m}$$

$$\eta = \frac{-13,88 \times 5,66}{-20,68} = +3,80 \text{ m.}$$

Les composantes du vecteur $\vec{\delta}_5$, représentant le déplacement du nœud 5 dans l'espace, sont, en vertu des équations (5), et pour $E = 2000 \text{ t/cm}^2$:

$$\delta_x = + \frac{3,80}{4,00} \cdot \frac{20,68}{E} = + 19,6 \frac{1}{E} = + 0,0098 \text{ cm}$$

$$\delta_y = + \frac{0,565}{4,00} \cdot \frac{20,68}{E} = + 2,93 \frac{1}{E} = + 0,0015 \text{ cm}$$

$$\delta_z = - \frac{20,68}{E} = - 0,0103 \text{ cm.}$$

Nœud 6

Le calcul du déplacement du nœud 6 est plus simple encore :

Barres $i - k$	μ_{ik}	ν_{ik}^6	T_{ik}	$E \cdot \delta_{6,ik}''$
1-6	53	+ 0,156	+ 1,06	+ 8,76
2-6	20	+ 0,236	- 0,81	- 3,82

$$\Sigma = + 4,94.$$

$$\xi = 0$$

$$\eta = \frac{-8,76 \times 5,66 - 3,82 \times 2,83}{+ 4,94} = -12,22 \text{ m}$$

d'où

$$\delta_x = + \frac{12,22}{4,00} \times \frac{4,94}{E} = + \frac{15,1}{E} = + 0,0075 \text{ cm}$$

$$\delta_y = 0$$

$$\delta_z = + \frac{4,94}{E} = + 0,0025 \text{ cm.}$$

Nœud 8

Le nœud 8 est relié au nœud 5 par la barre 5-8 qui ne subit pas d'efforts. Le vecteur $\vec{\delta}_8''$ est appliqué au même point que les vecteurs $\vec{\nu}_{1-5}^8$ et $\vec{\nu}_{4-5}^8$ et son moment par rapport à la droite 5'-8' est égal à celui du vecteur $\vec{\delta}_5''$.

On a donc immédiatement :

$$\delta_8'' = - \delta_5'' \frac{0,565}{5,66} = - 0,0997 \delta_5'' = + \frac{2,06}{E} \text{ cm}$$

d'où

$$\delta_x = 0$$

$$\delta_y = + \frac{5,66}{4,00} \cdot \frac{2,06}{E} = + 0,0015 \text{ cm}$$

$$\delta_z = \frac{2,06}{E} = + 0,0010 \text{ cm.}$$

Le nœud 7 ne subit pas de déplacement.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Mayor a exposé sa méthode de représentation et de calcul des systèmes de l'espace dans les articles et les ouvrages suivants :

1. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1902, 1903 et 1915.
2. *Bulletin technique de la Suisse romande*, 1903, 1904, 1905, 1908, 1909.
3. *Statique graphique des systèmes de l'espace*. Rouge et Gauthier-Villars, Lausanne et Paris, 1910.
4. *Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles*, 1914 et 1918.
5. *Introduction à la statique graphique des systèmes de l'espace*. Payot, Lausanne, 1926.

Les ingénieurs liront avec fruit l'excellente présentation de ce dernier ouvrage faite par M. Maurice Paschoud dans le *Bulletin technique* du 4 décembre 1926.

H. C. YUNG, dans sa thèse : *Calcul de la coupole du Reichstag, à Berlin, par la méthode dualistique de M. B. Mayor* (Payot, Lausanne, 1926), a déterminé les efforts dans les barres de cette coupole à l'aide d'une antiprojection de ce système.

La représentation mayorienne a été mentionnée par M. F. STÜSSI, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, dans son cours de Statique (*Baustatik*, I, Birkhäuser, Bâle, 1946, p. 49 à 51).

M. EL-SAYED EL-SHASLY, dans son étude des efforts secondaires dans les barres d'une coupole Schwedler (*Biegungsspannungen und Stabkräfte in Schwedlerkuppeln nach Theorie und Modellversuch*. Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik an der E. T. H., Leemann & Cie, Zurich, 1943) utilise la méthode dualistique de Mayor pour la détermination des efforts principaux. Si l'auteur avait utilisé cette même méthode pour le calcul des déformations, son travail en aurait été considérablement simplifié.

En Italie, les recherches de Mayor ont été présentées par O. LAZZERI (*Periodico di matematica*, janvier-février 1912), et aux Etats-Unis par F. H. CONSTANT (*Stresses in space structures*. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, vol. 60, 1934, p. 633-639). En France, MAURICE D'OCAGNE a consacré à la représentation mayorienne un chapitre du tome II de son cours de géométrie professé à l'Ecole polytechnique.

En Allemagne, R. VON MISES a proposé un mode de représentation qui ne diffère de celui de Mayor que par un changement de signe dans les formules de transformation (*Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme*. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Berlin, 1917, p. 209-232). Tous les auteurs allemands, qui ont donné d'ailleurs à la représentation mayorienne un développement remarquable, utilisent la variante de von Mises.

Citons en premier lieu :

W. PRAGER : *Beitrag zur Kinematik des Raumfachwerks* (thèse). Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Vol. 6, 1926, p. 341-355, où l'auteur, partant de la constatation que, dans la représentation mayorienne, le produit

intérieur de deux vecteurs de l'espace est proportionnel au moment relatif de l'antiprojection de l'un et de l'image de l'autre, définit la notion de « champ d'influence » (Einflussplan) et donne une méthode générale pour le calcul des déplacements des nœuds d'un système articulé gauche.

Citons ensuite toute une série d'articles de PRAGER, FEDERHOFER, BEYER, KRUPPA, SOTOFF, SAUER, DIETZ dans la *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, de 1924 à 1950, ainsi que l'ouvrage de K. FEDERHOFER : *Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems* (Springer, Wien, 1928) où l'auteur applique la représentation mayorienne à l'étude de la cinématique dans l'espace, de corps rigides.

Cette représentation figure également dans les dernières éditions (1939 et 1946) du traité de SCHLINK : *Technische Statik* (Springer, Berlin).

Enfin dans son article *Die Lösung des Sechsstabanschlusses mit der Methode der dualen Abbildung* (Ingénieur-Archiv, XVI, 1947-1948, p. 14 à 38), H. DIETZ applique la représentation de Mayor au calcul des réactions d'appui d'un corps rigide de l'espace.

Trop d'ingénieurs ignorent encore la méthode de Mayor. C'est ainsi que dans une étude, d'ailleurs fort intéressante (*Three-dimensional displacement diagrams for space frame structures*. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 13 juin 1950), W. W. EWELL s'efforce d'étendre à l'espace, en utilisant les deux projections orthogonales d'un système gauche, la méthode graphique de Williot, alors que Mayor a montré vingt-quatre ans plus tôt que cette extension est très simplifiée par son mode de représentation.

Tous les auteurs mentionnés ci-dessus n'utilisent que la représentation mayorienne des vecteurs et des éléments purement géométriques (droites, plans, points). Nous n'avons pas rencontré dans la littérature (à l'exception de la thèse de H. C. YUNG) une seule application de la notion, si féconde, d'antiprojection d'un système articulé de l'espace. Et pourtant, cette notion, qui permet de concrétiser dans le plan les efforts et les déformations des systèmes gauches, est d'une importance primordiale pour l'ingénieur appelé à calculer de tels systèmes.

ESSAIS SUR MODÈLES RÉDUITS D'OUVRAGES EN BÉTON ARMÉ

par A. VILLARD, ingénieur E. P. U. L., à Lausanne

Autrefois, les routes et les chemins de fer enjambaient les rivières par des ponts que l'on essayait de construire normaux aux cours d'eau, ceci afin de les raccourcir et de simplifier leur exécution.

On cherchait d'autre part à réaliser les ouvrages du génie civil de façon symétrique afin de mieux saisir leur comportement dans le calcul et dans la construction proprement dite.

Nombreux sont les exemples de constructions de tous les types conçus selon ces principes, dans notre Europe et dans le Nouveau-Monde.

Le développement rapide de la technique d'une manière générale, celui des chemins de fer et de l'automobile en particulier, ainsi que l'adaptation de moyens

toujours plus perfectionnés à nos nécessités modernes, conduisent de plus en plus le constructeur et l'architecte à s'affranchir de toute routine et à donner aux ouvrages de la construction civile et de l'architecture des formes quasi quelconques.

L'apparition du béton armé et du béton précontraint a apporté aux constructeurs des possibilités nouvelles pratiquement illimitées dans l'exécution des formes, ce qui implique comme conséquence des choses insaisissables, voire insolubles, dans le domaine du calcul.

De nombreux ouvrages biais, en particulier des ponts-routes et ponts de chemin de fer ont été réalisés pendant ces dernières décades au moyen de poutrelles métalliques enrobées de béton afin que leur calcul se

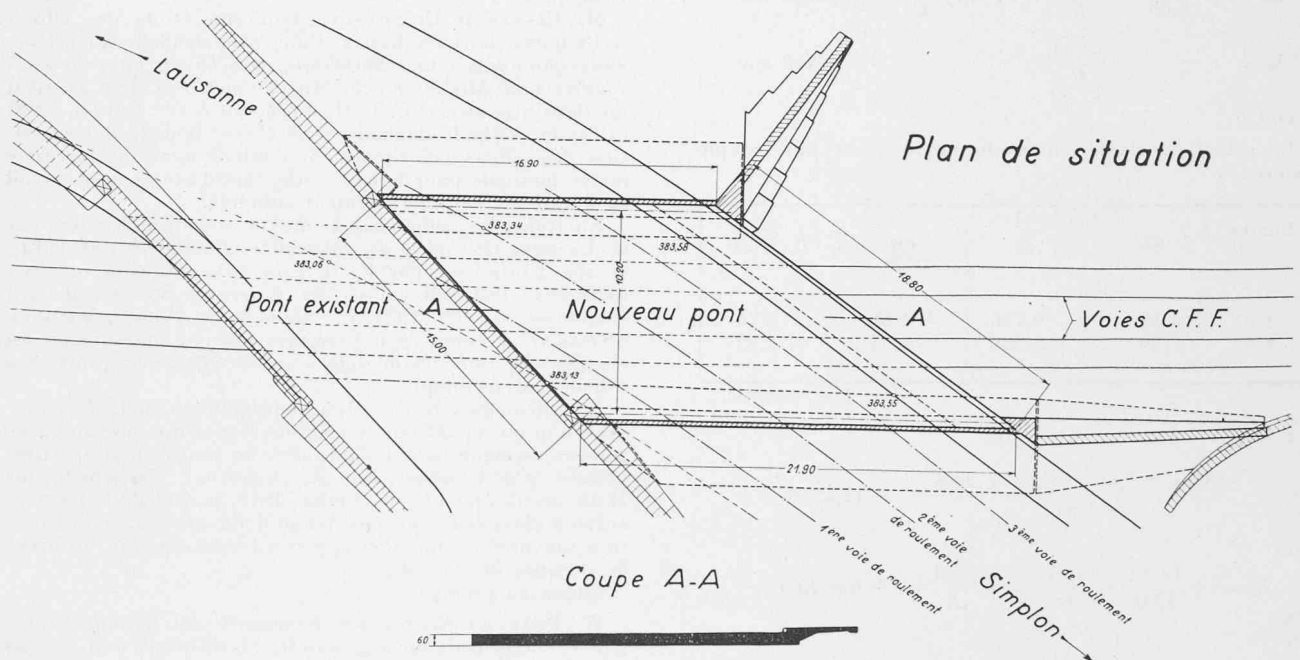


Fig. 1. — P. S. de Villeneuve. Plan général.