

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin technique de la Suisse romande
<b>Band:</b>	78 (1952)
<b>Heft:</b>	10
<b>Artikel:</b>	La méthode de Walther Ritz: son application à quelques problèmes élémentaires de résistance des matériaux
<b>Autor:</b>	Paschoud, Maurice
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-58994">https://doi.org/10.5169/seals-58994</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraisant tous les quinze jours

**Abonnements :**  
 Suisse : 1 an, 24 francs  
 Etranger : 28 francs  
 Pour sociétaires :  
 Suisse : 1 an, 20 francs  
 Etranger : 25 francs  
 Pour les abonnements s'adresser à :  
 Administration du « Bulletin technique de la Suisse romande » Librairie Rouge & Cie S. A., Lausanne  
 Compte de chèques postaux II. 5778, à Lausanne  
 Prix du numéro : Fr. 1.40

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Société vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne ; Secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg : MM. P. Joye, professeur ; E. Latelini, architecte — Vaud : MM. F. Chenaux, ingénieur ; E. d'Okolski, architecte ; A. Paris, ingénieur ; Ch. Thévenaz, architecte — Genève : MM. L. Archinard, ingénieur ; Cl. Groscurtin, architecte ; E. Martin, architecte ; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel : MM. J. Béguin, architecte ; G. Furter, ingénieur ; R. Guye, ingénieur — Valais : MM. J. Dubuis, ingénieur ; D. Burgener, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur. Caste postale Chauderon 476, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique : A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte ; R. Neeser, ingénieur.

## Tarif des annonces

Le millimètre (large. 47 mm) 24 cts  
 Réclames : 60 cts le mm (largeur 95 mm)

Rabais pour annonces répétées

Annonces Suisses S.A.



5 Rue Centrale. Tél. 223326 Lausanne et succursales

**SOMMAIRE :** La méthode de Walther Ritz : Son application à quelques problèmes élémentaires de résistance des matériaux (suite et fin), par MAURICE PASCHOUD. — Les conditions d'un bon éclairage, par Madame C. ROY-POCHON, ingénieur E.P.U.L. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : Extrait des procès-verbaux des séances du Comité central des 15 février et 15 mars 1952 ; Conférence des présidents du 15 mars 1952 ; Extrait du procès-verbal de l'Assemblée des délégués du 5 avril 1952. — NÉCROLOGIE : Roger Brutin, architecte S.I.A. — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT. — INFORMATIONS DIVERSES.

## LA MÉTHODE DE WALTHER RITZ

### Son application à quelques problèmes élémentaires de résistance des matériaux

par MAURICE PASCHOUD<sup>1</sup>

(Suite et fin)<sup>2</sup>

**III. Déformée de la poutre à deux appuis simples sollicitée par des forces transversales et par des forces agissant suivant son axe**

#### § 1. Représentation par une série trigonométrique

Appelons  $q(x)$  la charge transversale par unité de longueur et  $S$  les deux forces égales et directement opposées qui agissent suivant l'axe de la poutre en la comprimant (Fig. 8). L'équation différentielle de la déformée est

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + S \frac{d^2y}{dx^2} = q(x) \quad (1)$$

avec les conditions aux limites

$$y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = l.$$

Nous partons de l'expression

$$y(x) = a_1 X_1(x) + \dots + a_n X_n(x) \quad (2)$$

où  $X_i = \sin \frac{i\pi x}{l}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

On a

$$X''_i = -\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 X_i, \quad X'''_i = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 X_i, \quad \int_0^l X_m X_p dx = 0, \quad \int_0^l X_i dx = \frac{l}{2}.$$

<sup>1</sup> Professeur honoraire de l'Université de Lausanne.

<sup>2</sup> Voir *Bulletin technique* du 3 mai 1952, p. 125.

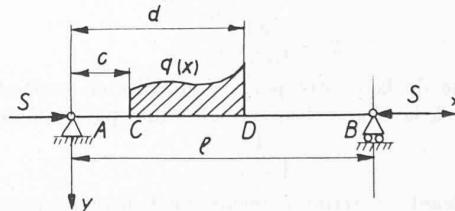


Fig. 8.

La  $n$ <sup>ième</sup> équation G s'écrit ici

$$\int_0^l X_n(x) \left[ EI \frac{d^4y}{dx^4} + S \frac{d^2y}{dx^2} - q(x) \right] dx = 0. \quad (3)$$

En y remplaçant  $\frac{d^2y}{dx^2}$  et  $\frac{d^4y}{dx^4}$  par leurs expressions tirées de (2), il vient

$$EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 n^4 a_n \frac{l}{2} - S \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 n^2 a_n \frac{l}{2} = \int_c^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

relation qui s'écrit, en posant  $\alpha = \frac{Sl^2}{EI\pi^2}$ ,

$$EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 a_n \frac{l}{2} n^2 [n^2 - \alpha] = \int_c^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (4)$$

Cette relation correspond à la relation (4) du chapitre II. Au 1<sup>er</sup> membre,  $n^4$  est remplacée par  $n^2(n^2 - \alpha)$ . Pour les divers modes de charge considérés, les valeurs du 2<sup>e</sup> membre sont les mêmes que celles calculées au paragraphe 2 du chapitre II.

**§ 2. La poutre est sollicitée par une charge uniformément répartie agissant sur toute sa longueur ainsi que par les forces axiales  $S$**

L'équation de la déformée est

$$y = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (5)$$

Si  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire si  $S$  est nulle, la relation (5) se réduit à la relation correspondante (8, II) du chapitre II.

En comparant la relation (5) à la relation (8, II), on voit que l'action de la compression axiale, comme on pouvait s'y attendre, est d'augmenter les déformations de la poutre.

L'équation (5) peut s'écrire

$$y = \left[ \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}}. \quad (6)$$

Le facteur dans le crochet donne la déformation qui se produirait si la charge transversale agissait seule. Le second facteur est un *facteur d'amplification* qui indique dans quelle mesure la déformation due à la charge transversale est augmentée par l'effort axial de compression.

Si  $\alpha$  croît de 0 à 1, ce facteur d'amplification croît de 1 à  $\infty$ . Quand  $\alpha$  tend vers 1, c'est-à-dire quand  $S$  se rapproche de la valeur  $\frac{EI\pi^2}{l^2}$ ,  $y$  devient très grand, même si la charge transversale est très petite. La valeur limite de  $S$ ,  $S = \frac{EI\pi^2}{l^2}$ , est la *charge critique*  $S_{crit}$ . On a  $\alpha = \frac{S}{S_{crit}}$ .

La série (5) converge rapidement, surtout quand  $\alpha$  est petit. On peut, pratiquement, s'en servir en ne conservant que son premier terme. On a alors

$$y = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha},$$

et la flèche de la poutre peut se calculer en multipliant la flèche due à la charge transversale seule par le facteur

$$\frac{1}{1 - \alpha}.$$

En dérivant (5) terme à terme, on trouve l'expression de la pente de la déformée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4ql^3}{EI\pi^4} \left[ \frac{\cos \frac{\pi x}{l}}{1^2(1^2 - \alpha)} + \frac{\cos \frac{3\pi x}{l}}{3^2(3^2 - \alpha)} + \dots \right].$$

Pour le moment fléchissant, il vient

$$M = \frac{4ql^2}{\pi^3} \left[ \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1(1^2 - \alpha)} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3(3^2 - \alpha)} + \dots \right]$$

dont le maximum est

$$\begin{aligned} M_{max} &= \frac{4ql^2}{\pi^3} \left[ \frac{1}{1(1^2 - \alpha)} - \frac{1}{3(3^2 - \alpha)} + \dots \right] = \\ &= \frac{q l^2}{8} \frac{1(1^2 - \alpha)}{\pi^3} - \frac{1}{32} \frac{1}{(3^2 - \alpha)} + \dots \end{aligned}$$

Le facteur  $\frac{q l^2}{8}$  représente le moment fléchissant maximum dû à la charge  $q(x)$  seule.

Le second facteur, facteur d'amplification, mesure l'influence de la force axiale sur le moment fléchissant maximum.

Les formules qui précèdent se généralisent immédiatement pour le cas où la charge uniformément répartie ne s'étendrait que sur une partie de la poutre.

**§ 3. La poutre, comprimée par les forces  $S$ ,**

a) porte une charge concentrée  $P$ ; l'équation de la déformée est alors, si  $c$  est l'abscisse du point d'application  $C$  de la force  $P$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2Pb^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \left[ \frac{2Pb^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2(n^2 - \alpha)} \quad (7) \end{aligned}$$

b) est sollicitée par un couple de moment  $M$ , appliqué au point  $C$ , d'abscisse  $c$ ; l'équation de la déformée est

$$\begin{aligned} y &= \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n(n^2 - \alpha)} \cos \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \left[ \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{\cos \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n(n^2 - \alpha)} \quad (8) \end{aligned}$$

On peut répéter, à propos de ces expressions (7) et (8) les mêmes remarques que pour la relation (6). La charge critique a toujours comme expression

$$S_{crit} = \frac{EI\pi^2}{l^2}.$$

**§ 4. Application.**

Calcul du moment d'encastrement d'une poutre encastree à un bout, appuyée à l'autre, sollicitée par une charge transversale  $q$  uniformément répartie et par les forces axiales  $S$  de compression (Fig. 9)

Sous l'action de la charge  $q$  et des forces  $S$ , la poutre à deux appuis simples obtenue en supprimant l'encastrement se déforme et la pente de sa déformée sur l'appui de droite a pour expression

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{4ql^3}{EI\pi^4} \left[ \frac{-1}{1^2(1^2 - \alpha)} - \frac{1}{3^2(3^2 - \alpha)} + \dots \right].$$

Sous l'action d'un couple de moment  $M$  appliqué sur son appui de droite et des forces  $S$ , la même poutre à deux appuis simples prend, sur cet appui de droite, une pente donnée par

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l}^{c=l} = \frac{2Ml}{EI\pi^2} \left[ \frac{1}{1^2 - \alpha} + \frac{1}{2^2 - \alpha} + \dots \right].$$

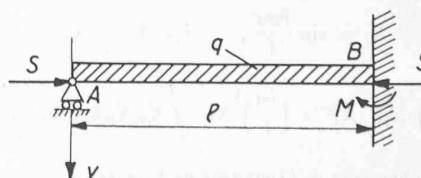


Fig. 9.

On doit avoir

$$\frac{4ql^3}{EI\pi^4} \left[ -\frac{1}{1^2(1^2-\alpha)} - \frac{1}{3^2(3^2-\alpha)} - \dots \right] + \frac{2Ml}{EI\pi^2} \left[ \frac{1}{1^2-\alpha} + \frac{1}{2^2-\alpha} + \dots \right] = 0,$$

d'où l'on tire

$$M = \frac{2ql^2}{\pi^2} \frac{\frac{1}{1^2(1^2-\alpha)} + \frac{1}{3^2(3^2-\alpha)} + \dots}{\frac{1}{1^2-\alpha} + \frac{1}{2^2-\alpha} + \dots}.$$

$$\text{Pour } \alpha = 0 \quad M_{\alpha=0} = \frac{2ql^2}{\pi^2} \cdot \frac{\frac{\pi^4}{96}}{\frac{1}{6}} = \frac{q l^2}{8}.$$

On peut écrire

$$M = \frac{ql^2}{8} \left[ \frac{\frac{1}{1^2(1^2-\alpha)} + \frac{1}{3^2(3^2-\alpha)} + \dots}{\frac{1}{1^2-\alpha} + \frac{1}{2^2-\alpha} + \dots} \right]. \quad (9)$$

Le moment d'encastrement  $M$  s'obtient ainsi en multipliant le moment d'encastrement qui serait dû à la charge  $q$  seule par un facteur d'amplification.

Si  $\alpha = \frac{Sl^2}{EI\pi^2} = 0$ , c'est-à-dire si  $S$  est nulle, ce facteur d'amplification est égal à 1. Si  $\alpha$  tend vers 1, ce facteur tend vers  $\frac{16}{\pi^2} = 1,621$ .

Son dénominateur a une infinité de zéros, dont le plus petit est un peu supérieur à 2. On en déduit la valeur de la charge critique.

La série qui se trouve au dénominateur du facteur d'amplification converge lentement. Pour faciliter le calcul numérique, on peut utiliser la remarque suivante.

Dès que  $n$  est un peu grand, pour  $n$  égal à  $m$  par exemple, le terme  $\frac{1}{n^2-\alpha}$  diffère peu du terme  $\frac{1}{n^2}$ .

A partir de cette valeur  $m$ , on aura

$$\sum_{m, m+1, \dots} \frac{1}{n^2-\alpha} \approx \sum_{m, m+1, \dots} \frac{1}{n^2}.$$

L'erreur commise étant inférieure à

$$\frac{\alpha}{m^2-\alpha} \sum_{m, m+1, \dots} \frac{1}{n^2}.$$

Comme on a

$$\sum_{1, 2, 3, \dots} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1,645,$$

on peut calculer une fois pour toutes les valeurs de

$$\sum_{m, m+1, \dots} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \left[ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(m-1)^2} \right]$$

pour diverses valeurs de  $m$ .

TIMOSHENKO, [3], p. 27, résout le même problème par la méthode classique. Il donne l'expression suivante du moment d'encastrement  $M$

$$M = \frac{ql^2}{8} \left[ \frac{4 \operatorname{tg} 2u (\operatorname{tg} u - u)}{u (\operatorname{tg} 2u - 2u)} \right], \quad u^2 = \frac{Sl^2}{4EI}.$$

$$\text{On en déduit} \quad \alpha = \frac{Sl^2}{EI\pi^2} = \frac{4u^2}{\pi^2}.$$

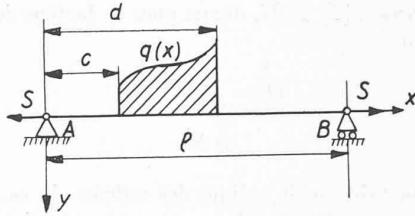


Fig. 10.

Dans [4], p. 1-19, il étudie une série de problèmes analogues au précédent et donne, en appendice, p. 478-485, des tables pour le calcul numérique des facteurs d'amplification. L'emploi des séries trigonométriques permet de résoudre ces problèmes, en se passant de ces tables.

### § 5. Poutre chargée transversalement et formant hauban (fig. 10)

Soit une poutre à deux appuis simples formant hauban et soumise à l'action simultanée des forces axiales de traction  $S$  et d'une charge transversale  $q(x)$  par unité de longueur. L'équation de sa déformée est

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} - S \frac{d^2y}{dx^2} = q(x),$$

avec les conditions aux limites

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = l.$$

En procédant comme au paragraphe 1, et en posant encore  $\alpha = \frac{Sl^2}{EI\pi^2}$ , on obtient la relation fondamentale

$$EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 a_n \frac{l}{2} n^2(n^2 + \alpha) = \int_c^d q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (10)$$

Le second membre de (10) est identique au second membre de (4). Son premier membre s'obtient en remplaçant  $-\alpha$  par  $+\alpha$  dans le premier membre de (4). De chacun des résultats obtenus dans le cas où les forces  $S$  sont des forces de compression, on déduit un résultat correspondant pour le cas où ces forces sont des tractions, en remplaçant  $-\alpha$  par  $+\alpha$ .

Etudions le cas où la charge transversale est uniformément répartie et agit sur toute la longueur de la poutre.

L'équation de la déformée de la poutre est

$$y = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n^3(n^2 + \alpha)} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

La flèche maximum, pour  $x = \frac{l}{2}$ , est donnée par

$$y_{max} = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \left[ \frac{1}{1^3(1^2 + \alpha)} - \frac{1}{3^3(3^2 + \alpha)} + \dots \right].$$

Si  $\alpha = 0$ ,

$$y_{max} = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \cdot \frac{5\pi^5}{1536} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

et l'on peut écrire

$$y_{max} = \frac{5ql^4}{384EI} \left[ \frac{1536}{5\pi^5} \left( \frac{1}{1^3(1^2 + \alpha)} - \frac{1}{3^3(3^2 + \alpha)} + \dots \right) \right].$$

Le premier facteur représente la flèche du hauban dans le cas où  $S$  est nulle. Dans le crochet se trouve un *facteur de réduction* dû à l'effet des forces de traction. Quand  $\alpha = 0$ , ce facteur de réduction est égal à 1. Il diminue quand  $\alpha$  croît ;  $\alpha$  peut ici être  $> 1$ .

TIMOSHENKO, [3], p. 37, donne pour ce facteur de réduction l'expression

$$\frac{\frac{1}{chu} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24} u^4},$$

et, dans un tableau, il indique les valeurs de ce facteur de réduction pour diverses valeurs de  $u$ . On a toujours les relations

$$u^2 = \frac{Sl^2}{4EI} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{4u^2}{\pi^2}.$$

Calculons encore le moment d'encastrement d'un *hauban encastré aux deux bouts*, tendu par les forces  $S$  et portant une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.

Pour la pente de la déformée d'une poutre à deux appuis simples tendue par les forces axiales  $S$  et portant une charge uniformément répartie sur toute sa longueur, on a l'expression

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4ql^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2(n^2+\alpha)} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Sur l'appui de gauche de cette poutre, la pente est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{4ql^3}{EI\pi^4} \left[ \frac{1}{1^2(1^2+\alpha)} + \frac{1}{3^2(3^2+\alpha)} + \dots \right].$$

D'autre part, si la poutre à deux appuis simples, tendue par les forces  $S$ , est sollicitée par un couple de moment  $M$ , appliqué au point  $C$  d'abscisse  $c$ , la pente de sa déformée est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Ml}{EI\pi^2} \left[ \frac{\cos \frac{\pi c}{l} \cos \frac{\pi x}{l}}{1^2+\alpha} + \frac{\cos \frac{2\pi c}{l} \cos \frac{2\pi x}{l}}{2^2+\alpha} + \dots \right],$$

et l'on a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2Ml}{EI\pi^2} \left[ \frac{1}{1^2+\alpha} + \frac{1}{2^2+\alpha} + \dots \right],$$

et

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{2Ml}{EI\pi^2} \left[ -\frac{1}{1^2+\alpha} + \frac{1}{2^2+\alpha} - \dots \right].$$

La poutre est encastrée à ses deux bouts. Si  $M_A$  est le moment d'encastrement à gauche et  $M_B$  le moment d'encastrement à droite, on aura, sur l'appui de gauche, la relation

$$\begin{aligned} & \frac{4ql^3}{EI\pi^4} \left[ \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{3^2(3^2+\alpha)} + \dots \right] + \\ & + \frac{2M_A l}{EI\pi^2} \left[ \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{2^2+\alpha} + \dots \right] + \\ & + \frac{2M_B l}{EI\pi^2} \left[ -\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{2^2+\alpha} - \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

Par raison de symétrie, si  $M_A = M$ ,  $M_B$  sera  $= -M$  et l'on tirera de la relation précédente l'expression

$$M = -\frac{ql^2}{\pi^2} \frac{\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{3^2(3^2+\alpha)} + \dots}{\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{2^2+\alpha} + \dots}.$$

Si  $\alpha = 0$

$$M_{\alpha=0} = -\frac{ql^2}{\pi^2} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots} = -\frac{ql^2}{\pi^2} \frac{\frac{\pi^4}{96}}{\frac{8}{12}} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Et l'on peut écrire

$$M = -\frac{ql^2}{12} \left[ \frac{\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{3^2(3^2+\alpha)} + \dots}{\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{2^2+\alpha} + \dots} \right].$$

Le facteur dans le crochet est le facteur de réduction. Pour ce facteur de réduction  $R$ , TIMOSHENKO donne l'expression

$$R = \frac{u - thu}{\frac{1}{3} u^2 thu}.$$

$$\text{On a toujours } u^2 = \frac{Sl^2}{4EI} = \frac{\pi^2\alpha}{4}.$$

#### IV. Déformée de la poutre à deux appuis simples reposant sur une fondation élastique

##### § 1. Représentation par une série trigonométrique

Soient  $l$  la longueur de la poutre et  $EI$  sa rigidité, supposée constante. L'équation à intégrer est ici

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + ky = q(x). \quad (1)$$

La constante  $k$  est le module de fondation ;  $ky$  est égale à la réaction de la poutre par unité de longueur.

Les conditions aux limites sont toujours

$$y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{pour } x = 0 \quad \text{et} \quad x = l,$$

et nous écrivons, ici encore

$$y_n(x) = a_1 X_1(x) + \dots + a_n X_n(x) \quad (2)$$

$$\text{où} \quad X_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Comme  $n^{\text{ème}}$  équation G, on a alors,  $q(x)$  étant la charge par unité de longueur

$$\int_0^l X_n(x) \left[ EI \frac{d^4y}{dx^4} + ky - q(x) \right] dx = 0 \quad (3)$$

$$\text{ou} \quad EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 a_n \frac{l}{2} \left[ n^4 + \frac{l^4 k}{EI\pi^4} \right] = \int_c^d q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$$\text{En posant} \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{4EI}},$$

cette équation devient

$$EI \frac{\pi^4}{2\beta^4} a_n \left[ n^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4 \right] = \int_c^d q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (4)$$

Cette relation (4) correspond aux relations fondamentales (4), II et (4), III.

##### § 2. Déformée de la poutre portant sur toute sa longueur une charge uniformément répartie $q$ par unité de longueur

Pour  $n$  impair, on a

$$a_n = \frac{\frac{2l^3}{EI\pi^4} \cdot \frac{2ql}{n\pi}}{n^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} = \frac{1}{n} \cdot \frac{16q}{k\pi} \frac{\left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4}{n^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4}.$$

Pour  $n$  pair,  $a_n$  est nul.

L'équation de la déformée est

$$y = \frac{q}{k} \cdot \frac{16}{\pi} \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4 \left[ \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} + \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} + \dots \right]. \quad (5)$$

Pour  $x = \frac{l}{2}$ , on a

$$y_{max} = \frac{q}{k} \cdot \frac{16}{\pi} \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4 \left[ \frac{1}{1^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} - \frac{1}{3^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} + \dots \right]. \quad (6)$$

Le moment fléchissant  $M$  est ici

$$M = \frac{4q(\beta l)^2}{\beta^2 \pi^3} \left[ \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} + \frac{3 \sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} + \dots \right].$$

Pour  $x = \frac{l}{2}$ , on a

$$M_{max} = \frac{4q(\beta l)^2}{\beta^2 \pi^3} \left[ \frac{1}{1^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} - \frac{3}{3^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4} + \dots \right]. \quad (7)$$

TIMOSHENKO, [3], p. 19, prend l'origine des coordonnées au milieu de la poutre et il trouve les relations suivantes :

$$y = \frac{q}{k} \left[ 1 - \frac{2 \sin \frac{\beta l}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x - \frac{2 \cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \right]. \quad (5 \text{ bis})$$

$$y_{max} = (y)_{x=0} = \frac{q}{k} \left[ 1 - \frac{2 \cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \right]. \quad (6 \text{ bis})$$

$$M_{max} = \frac{q}{\beta^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l}. \quad (7 \text{ bis})$$

Dans sa *Theory of Plates and Shells*, p. 30 et suivantes, il résout l'équation (1), mais en posant

$$\beta = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{k}{4EI}}.$$

Pour le calcul numérique, il introduit diverses fonctions dont les valeurs sont données par des tables.

Les expressions (5), (6) et (7) permettent de faire ces calculs numériques sans se servir de tables.

L'exemple suivant, donné [3] p. 17, montre comment il faut procéder pour trouver la déformée d'une poutre qui, au lieu de reposer sur une fondation élastique continue, repose sur un grand nombre d'appuis équidistants.

Soit (Fig. 11) une poutre horizontale  $AB$ , à deux appuis simples, de longueur  $l$  et de rigidité  $EI$ , sur laquelle reposent des poutres identiques, parallèles, horizontales et équidistantes  $b_1, b_2, \dots$  de longueur  $l_1$  et de rigidité  $EI_1$ . Ces poutres  $b_i$  portent chacune une charge  $p$  uniformément répartie, par unité de longueur.

Les poutres  $b_i$ , supposées à deux appuis simples, prennent sous l'action de la charge  $p$  une flèche dont l'expression (approchée) est

$$\frac{4pl_1^4}{EI_1\pi^5}.$$

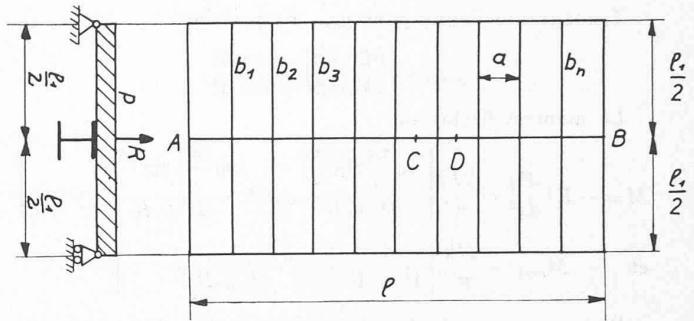


Fig. 11.

Sous l'effet de la réaction  $R$  de  $AB$ , les poutres  $b_i$ , toujours supposées appuyées aux deux bouts, prennent, vers le haut, une flèche dont l'expression (approchée) est

$$\frac{2Rl_1^3}{EI_1\pi^4}.$$

La flèche des poutres  $b_i$  due à la superposition des charges  $p$  et  $R$  est

$$y = \frac{4pl_1^4}{EI_1\pi^5} - \frac{2Rl_1^3}{EI_1\pi^4}.$$

Il en résulte

$$R = \frac{2l_1p}{\pi} - \frac{EI_1\pi^4}{2l_1^3} \cdot y.$$

Appelons  $a$  la distance (supposée petite par rapport à  $l$ ) des poutres  $b_i$  les unes aux autres. Remplaçons sur chaque tronçon  $CD$  de la poutre  $AB$  la charge concentrée  $R$  par une charge uniformément répartie

$$\frac{R}{a} = \frac{2l_1p}{\pi a} - \frac{EI_1\pi^4}{2l_1^3 a} \cdot y.$$

Cette charge variera d'un tronçon  $CD$  à l'autre et la poutre  $AB$  sera sollicitée par une charge en escalier.

On peut, sans erreur sensible, remplacer cette charge en escalier par une charge continue

$$q = ky \quad \text{où} \quad q = \frac{2pl_1}{\pi a} \quad \text{et} \quad k = \frac{EI_1\pi^4}{2l_1^3 a}. \quad (8)$$

L'équation différentielle de la déformée de  $AB$  sera

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + ky = q,$$

où  $q$  et  $k$  auront les valeurs (8).

### § 3. La poutre est sollicitée par une charge $P$ appliquée au point $C$ d'abscisse $c$

La relation (4) donne ici

$$EI \frac{\pi^4}{2l^3} a_n \left[ n^4 + 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4 \right] = P \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

En posant  $B = 4 \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)^4$ , on obtient pour la déformée l'équation

$$y = \frac{2P}{kl} \cdot B \left[ \frac{\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1^4 + B} + \frac{\sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^4 + B} + \dots \right]$$

et l'on a

$$y_{max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2P}{kl} \cdot B \left[ \frac{1}{1^4 + B} + \frac{1}{3^4 + B} + \dots \right].$$

TIMOSHENKO donne pour  $y_{max}$  l'expression

$$y_{max} = \frac{P\beta}{2k} \frac{\sin \beta l - \sin \beta l}{ch\beta l + \cos \beta l}.$$

Le moment fléchissant

$$M = -EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2Pl}{\pi^2} \left[ \frac{\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1^4 + B} + 2^2 \frac{\sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^4 + B} + \dots \right]$$

$$\text{et } M_{max} = \frac{2Pl}{\pi^2} \left[ \frac{1}{1^4 + B} + 3^2 \cdot \frac{1}{3^4 + B} + \dots \right].$$

Pour ce moment fléchissant maximum, TIMOSHENKO donne l'expression

$$M_{max} = \frac{P}{4\beta} \frac{sh\beta l + \sin \beta l}{ch\beta l + \cos \beta l}.$$

#### § 4. La poutre est fléchie par un couple de moment $M$ appliqué au point $C$ d'abscisse $c$

La relation (4) donne

$$EI \frac{\pi^4}{2l^3} a_n [n^4 + B] = \frac{n\pi c}{l} M \cos \frac{n\pi c}{l}$$

et l'on a pour la déformée l'équation

$$y = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \left[ \frac{\cos \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1^4 + B} + 2 \cdot \frac{\cos \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^4 + B} + \dots \right].$$

Si le couple est appliqué sur l'extrémité gauche de la poutre,

$$y_{c=0} = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \left[ \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^4 + B} + 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi x}{l}}{2^4 + B} + \dots \right].$$

Dans ce cas, la flèche au milieu de la poutre est donnée par

$$(y)_{c=0} = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \left[ \frac{1}{1^4 + B} - \frac{3}{3^4 + B} + \dots \right].$$

TIMOSHENKO trouve les expressions suivantes :

$$(y)_{c=0} = \frac{2M\beta^2}{k} \frac{ch\beta l \sin \beta x sh\beta(l-x) - \cos \beta l sh\beta x \sin \beta(l-x)}{ch^2\beta l - \cos^2 \beta l}$$

$$\text{et } (y)_{c=0} = \frac{2M\beta^2}{k} \frac{ch\beta l \sin \frac{\beta l}{2} sh \frac{\beta l}{2} - \cos \beta l sh \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{ch^2\beta l - \cos^2 \beta l}.$$

On voit que, dans ce cas encore, les résultats obtenus sous forme de séries trigonométriques sont plus simples que ceux que l'on obtient par la méthode d'intégration classique. En outre, ils dispensent de l'emploi de tables de fonctions hyperboliques.

#### V. Indications sur l'application de la méthode de Ritz à quelques autres problèmes de résistance des matériaux

##### § 1. Déformée d'une poutre dont l'un des bouts est encastré et dont l'autre est soit encastré, soit appuyé

La méthode de Ritz, nous venons de le voir, permet d'écrire, avec une grande facilité, sous forme de série trigonométrique, l'équation de la déformée d'une poutre appuyée aux deux bouts.

Cette simplicité dans l'application est due au fait que les fonctions  $X_i = \sin \frac{i\pi x}{l}$  utilisées pour nos développements en série satisfont aux deux bouts de la poutre :

1° aux conditions  $X_i = 0$  et  $\frac{d^2X_i}{dx^2} = 0$ , qui doivent être vérifiées à l'extrémité d'une poutre quand cette extrémité est appuyée ;

2° aux conditions d'orthogonalité

$$\int_0^l X'''_m X_p dx = \int_0^l X'''_p X_m dx = 0, \quad m \neq p$$

qui ont permis de déterminer individuellement les coefficients  $a_i$ .

Si donc, dans le cas où la poutre est encastrée aux deux bouts, nous voulons obtenir des développements présentant le même caractère de simplicité que ceux du chapitre II, il faudra chercher des fonctions  $U_i$  satisfaisant aux deux bouts de la poutre :

1° aux conditions  $U_i = 0$  et  $\frac{dU_i}{dx} = 0$  qui doivent être vérifiées à l'extrémité d'une poutre quand cette extrémité est encastrée ;

2° aux conditions d'orthogonalité

$$\int_0^l U'''_m U_p dx = \int_0^l U'''_p U_m dx = 0, \quad m \neq p$$

qui permettront de déterminer individuellement les coefficients  $a_i$ .

Si la poutre est encastrée à un bout et appuyée à l'autre, les fonctions  $U_i$  devront satisfaire aux conditions d'orthogonalité indiquées ci-dessus et l'on devra avoir  $U_i = 0$  et  $\frac{dU_i}{dx} = 0$  au bout encastré et  $U_i = 0$  et  $\frac{d^2U_i}{dx^2} = 0$  au bout appuyé.

Les fonctions  $U_i$  possédant ces propriétés existent. Elles ont été étudiées par lord RAYLEIGH<sup>1</sup>. Ce sont les fonctions propres d'une équation que l'on rencontre dans la théorie du mouvement vibratoire des tiges élastiques. Rrrz<sup>2</sup> a utilisé celles de ces fonctions  $U_i$  qui satisfont aux conditions de la poutre encastrée aux deux bouts, pour résoudre le problème de la plaque encastrée. Les fonctions  $X_i = \sin \frac{i\pi x}{l}$  sont celles de ces fonctions propres  $U_i$  qui satisfont aux conditions de la poutre appuyée aux deux bouts.

Nous nous bornons à signaler ici ces développements en séries de fonctions propres. Pour pouvoir les utiliser dans la pratique, il faudrait posséder des tables des fonctions  $U_i$  analogues aux tables de fonctions trigonométriques.

Voici cependant deux développements en séries trigonométriques que l'on peut utiliser pour le cas d'une poutre encastrée aux deux bouts et qui porte une charge symétrique par rapport à son milieu.

Si la charge est une charge uniformément répartie  $q$ , la déformée a pour équation

$$y = -\frac{ql^4}{8EI\pi^4} \left[ \left( \cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right) + \frac{1}{2^4} \left( \cos \frac{4\pi x}{l} - 1 \right) + \frac{1}{3^4} \left( \cos \frac{6\pi x}{l} - 1 \right) + \dots \right].$$

Si la charge est une charge  $P$  concentrée sur le milieu de la poutre, l'équation est

$$y = -\frac{P\beta}{4EI\pi^4} \left[ \left( \cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right) + \frac{1}{3^4} \left( \cos \frac{6\pi x}{l} - 1 \right) + \frac{1}{5^4} \left( \cos \frac{10\pi x}{l} - 1 \right) + \dots \right].$$

<sup>1</sup> Theory of Sound, Vol. I, p. 260 et suivantes.

<sup>2</sup> Œuvres, p. 223 et suivantes.

**§ 2. Déformée d'une poutre à deux appuis simples, de moment d'inertie variable**

L'équation différentielle de la déformée est

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = q(x). \quad (1)$$

Elle est la même qu'au paragraphe 1, II, mais  $I$  est fonction d' $x$ .

Les conditions aux limites sont encore

$$y = 0 \text{ et } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = l,$$

et nous pourrons prendre pour  $y$  l'expression

$$y_n(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2)$$

Les équations G sont alors

$$\int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \left[ EI \frac{d^4y}{dx^4} - q(x) \right] dx = 0 \dots$$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \left[ EI \frac{d^4y}{dx^4} - q(x) \right] dx = 0.$$

Ecrivons explicitement la dernière de ces équations

$$E \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \left[ a_1 \int_0^l I \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{\pi x}{l} dx + \dots \right]$$

$$\dots + n^4 a_n \int_0^l I \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Les coefficients  $a_i$  ne peuvent plus être déterminés individuellement. Il faudra calculer  $n^2$  intégrales de la forme

$$\int_0^l I \sin \frac{p\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad p=1,2,\dots,n \quad m=1,2,\dots,n$$

dont certaines seront égales entre elles puisque

$$\int_0^l I \sin \frac{p\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \int_0^l I \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{p\pi x}{l} dx.$$

Tout calcul fait, les équations G formeront un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues. Les deuxièmes membres de ces équations se calculeront comme au paragraphe 2, II.

Ces équations donneront les valeurs des coefficients  $a_i$  et l'expression (2) sera, en  $n^{\text{ème}}$  approximation, l'équation de la déformée.

Sans insister sur ce cas, examinons celui où le moment d'inertie varie *brusquement*.

Prenons l'exemple suivant (fig. 12) donné par M. Hétényi, dans un article intitulé « Deflection of Beams of Varying Cross Section » paru au *Journal of Applied Mechanics*, 1937, Vol. 59.

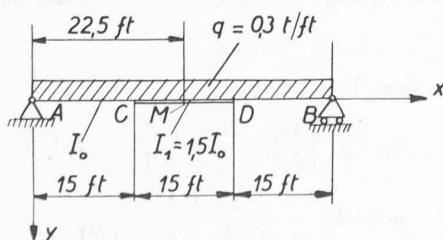


Fig. 12.

Généralement, pour trouver la déformée d'une poutre du type de la figure 12, on se sert de la *méthode graphique*, qui donne la déformée sous forme de courbe funiculaire.

Si l'on veut avoir l'équation de la déformée, on appliquera la *méthode classique*. Pour utiliser la symétrie de la poutre et celle de la charge, on ne considérera qu'une moitié de la poutre, par exemple la moitié de gauche. On aura deux branches de déformée, la branche  $AC'$  pour laquelle le moment d'inertie est  $I_0$  et la branche  $C'M'$  pour laquelle le moment d'inertie est  $I_1 = \alpha I_0 = 1.5 I_0$ .

Les constantes d'intégration se déterminent en écrivant que pour  $C'M'$ , la pente de la déformée est nulle en  $M'$ , que pour  $AC'$ ,  $y = 0$  pour  $x = 0$  et enfin que pour  $x = \frac{l}{3}$ , l'ordonnée et la pente de la déformée sont les mêmes pour les deux branches. On trouve les équations suivantes :

pour la branche  $AC'$

$$EI_0 y = -\frac{q l^3}{12} + \frac{q x^4}{24} + \frac{q l^3 x}{1944} \left[ 14 + \frac{13}{\alpha} \right],$$

pour  $C'M'$

$$EI_0 y = \frac{1}{\alpha} \left[ -\frac{q l^3}{12} + \frac{q x^4}{24} + \frac{q l^3 x}{24} - \frac{q l^4}{213} \right] + \frac{q l^4}{216}.$$

La flèche en  $M$  est

$$f = 12,58 \frac{10^3}{EI_0} \cdot (\text{ft}). \quad (\text{ft} = \text{pied} = 0,3048 \text{ m}).$$

On obtient ainsi deux équations pour la déformée et ces équations, polynômes du 4<sup>e</sup> degré, se prêtent mal au calcul numérique.

M. Hétényi remplace l'effet de la variation du moment d'inertie de la poutre sur la déformée par l'application d'un système de forces convenablement choisi, qui s'ajoute aux forces données. Il fait agir ces deux systèmes de forces sur une poutre de même portée que la poutre donnée, mais dont le moment d'inertie est constant et =  $I_0$ .

M. Hétényi calcule alors cette poutre à moment d'inertie constant et, en utilisant la méthode de M. Timoshenko, met l'équation de la déformée sous forme de série trigonométrique.

Il trouve pour cette déformée, en s'arrêtant aux termes en  $\sin \frac{3\pi x}{l}$ , l'équation

$$EI_0 y = 10^3 \left[ 12,891 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,305 \sin \frac{3\pi x}{l} \right].$$

La flèche en  $M$  a la même valeur que ci-dessus.

Appliquons la *méthode de Ritz*, en première approximation.

Si  $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ , l'équation G s'écrit

$$EI_0 a_1 \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \left[ \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \alpha \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \int_{2l/3}^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \right] = q \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx.$$

Les quadratures effectuées, il vient

$$a_1 = \frac{4q l^4}{EI_0 \pi^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7\pi}{6}}}, \quad \text{et} \quad y = 12,3 \frac{10^3}{EI_0} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

L'erreur sur la flèche est de 3 %.

En prenant  $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$ ,

on calculerait, mais c'est assez long, une troisième approximation, comparable à celle de M. Hétényi.

On peut généraliser l'expression obtenue en première approximation.

Supposons  $AC = DB = \frac{pl}{n}$ ,  $p$  et  $n$  entiers,  $p \leq \frac{n}{2}$ . On a toujours  $I_1 = \alpha I_0$ .

On obtient pour équation de la déformée

$$y = \frac{4ql^4}{EI_0\pi^5} \frac{1}{\sin \frac{2\pi p}{n} \cdot \frac{\alpha - 1}{\pi} + \alpha + \frac{2p}{n}(1 - \alpha)} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Si, au lieu d'une charge uniformément répartie, la poutre porte une charge concentrée  $P$  appliquée au point d'abscisse  $c$ , l'équation de la déformée devient

$$y = \frac{2Pb^3}{EI_0\pi^4} \frac{\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{\sin \frac{2\pi p}{n} \cdot \frac{\alpha - 1}{\pi} + \alpha + \frac{2p}{n}(1 - \alpha)}.$$

Le facteur

$$\frac{1}{\sin \frac{2\pi p}{n} \cdot \frac{\alpha - 1}{\pi} + \alpha + \frac{2p}{n}(1 - \alpha)},$$

facteur de réduction de la flèche, mesure l'effet du renforcement de la poutre sur cette flèche.

Ce facteur est égal à 1 quand  $\alpha = 1$ . Il diminue quand  $\alpha$  augmente. Il est égal à 1 quand  $p = \frac{n}{2}$  et à  $\frac{1}{\alpha}$  quand  $p = 0$ .

### § 3. Calcul de la plaque rectangulaire

Soit une plaque élastique plane, mince, d'épaisseur  $h$  dont le feuillet moyen est situé dans le plan  $xy$  supposé horizontal.

Quand la plaque est sollicitée par une charge transversale  $q(x, y)$  par unité de surface, l'équation qui donne le petit déplacement transversal  $w$  d'un point  $(x, y)$  de son feuillet moyen est de la forme

$$\Delta^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Aq(x, y).$$

$$A = \frac{12(1 - V^2)}{Eh^3} = \frac{10,92}{Eh^3}, \quad \text{si } V = \frac{1}{m} = \frac{3}{10}.$$

Supposons la plaque rectangulaire et prenons pour axes ses côtés  $OM$ , de longueur  $l$  et  $ON$ , de longueur  $l_1$  (fig. 13).

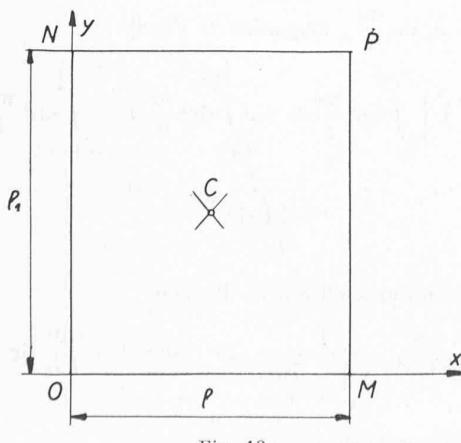


Fig. 13.

Suivant qu'un des bords de la plaque, parallèle à l'axe des  $x$ , est appuyé ou encastré, le déplacement  $w$  satisfait, sur ce bord, aux conditions

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dy^2} = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0.$$

Si le bord considéré est parallèle à l'axe des  $y$ , on aura, sur ce bord, suivant qu'il est appuyé ou encastré

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0.$$

Pour appliquer la méthode de Ritz, prenons

$$w = a_{11}X_1Y_1 + a_{12}X_1Y_2 + a_{21}X_2Y_1 + a_{22}X_2Y_2 + \dots$$

où  $X_i(x)$  et  $Y_h(y)$  sont respectivement des fonctions d' $x$  et d' $y$  seulement, qui satisfont aux conditions aux limites imposées à la plaque.

Le procédé de Galerkine donne les équations G suivantes :

$$\int_0^l \int_0^{l_1} X_1 Y_1 [\Delta^4 w - Aq] dx dy = 0,$$

$$\int_0^l \int_0^{l_1} X_1 Y_2 [\Delta^4 w - Aq] dx dy = 0, \dots$$

Supposons le plaque *encastrée sur tout son pourtour*. Nous allons calculer  $w$  en première approximation, en prenant

$$w = a_{11}X_1Y_1.$$

L'équation G s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^{l_1} a_{11} X_1 Y_1 [X_1''' Y_1 + 2X_1'' Y_1'' + X_1 Y_1'''] dx dy = \\ & = A \int_0^l \int_0^{l_1} q(x, y) X_1 Y_1 dx dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Prenons (voir paragraphe 1)

$$X_1 = \cos \left( \frac{2\pi x}{l} - 1 \right), \quad Y_1 = \cos \left( \frac{2\pi y}{l_1} - 1 \right).$$

Les conditions aux limites seront satisfaites sur le contour de la plaque.

En utilisant ces expressions de  $X_1$  et de  $Y_1$  ainsi que celles de leurs dérivées deuxièmes et quatrièmes, le 1<sup>er</sup> membre de (3), les quadratures effectuées, devient

$$a_{11} \frac{2^3 \pi^4}{l^2} \left[ \frac{3}{2} \frac{l_1}{l} + \frac{l}{l_1} + \frac{3}{2} \frac{l^3}{l_1^3} \right].$$

Si  $l_1 = l$  (plaqué carrée), le crochet prend la valeur 4.

Si  $l_1 = 1,5l$ , il vaut  $\frac{121}{36}$ ; si  $l_1 = 2l$ , il vaut  $\frac{59}{16}$ .

Supposons maintenant que la charge de la plaque est *uniformément répartie*,  $q = \text{constante}$ ; le second membre de (3) est

$$Aql l_1.$$

On aura donc la relation

$$a_{11} \frac{2^3 \pi^4}{l^2} \left[ \frac{3}{2} \frac{l_1}{l} + \frac{l}{l_1} + \frac{3}{2} \frac{l^3}{l_1^3} \right] = Aql l_1$$

$$\text{et } w = Aq \frac{\frac{l^3 l_1 X_1 Y_1}{2^3 \pi^4 \left[ \frac{3}{2} \frac{l_1}{l} + \frac{l}{l_1} + \frac{3}{2} \frac{l^3}{l_1^3} \right]}}{2^3 \pi^4 \left[ \frac{3}{2} \frac{l_1}{l} + \frac{l}{l_1} + \frac{3}{2} \frac{l^3}{l_1^3} \right]}.$$

Au centre de la plaque,  $X_1 = -2$  et  $Y_1 = -2$  et

$$f = Aq \frac{4l^3 l_1}{2^3 \pi^4 \left[ \frac{3}{2} \frac{l_1}{l} + \frac{l}{l_1} + \frac{3}{2} \frac{l^3}{l_1^3} \right]}.$$

Alors

$$f_{l_1=l} = 0,00129 Aql^4, \quad f_{l_1=1,5l} = 0,00230 Aql^4,$$

$$f_{l_1=2l} = 0,00285 Aql^4.$$

Répétons ce calcul de première approximation en choisissant pour  $X_1$  et  $Y_1$  des polynômes, en  $x$  et en  $y$  respectivement.

Appelons  $2l$  et  $2l_1$  les longueurs des côtés de la plaque et prenons des axes de coordonnées parallèles à ces côtés, l'origine étant au centre de celle-ci.

Avec  $X_1 = x^4 - 2l^2x^2 + l^4$  et  $Y_1 = y^4 - 2l_1^2y^2 + l_1^4$ , les conditions au contour de la plaque seront vérifiées.

Un calcul analogue à celui que nous venons de faire donne

$$\omega = \frac{Aq \cdot 49 \cdot X_1 Y_1}{128 [7l_1^4 + 4l^2 l_1^2 + 7l^4]}.$$

Au centre de la plaque, pour  $x = 0$  et  $y = 0$

$$X_1(0) = l^4, \quad Y_1(0) = l_1^4 \quad \text{et} \quad f = \frac{Aq \cdot 49 \cdot l_1^4 l^4}{128 [7l_1^4 + 4l^2 l_1^2 + 7l^4]}.$$

Si  $l_1 = l$  (plaqué carrée), le crochet =  $18l^4$ ; si  $l_1 = 1,5l$ , il vaut  $51,4l^4$ ; si  $l_1 = 2l$ , il est égal à  $135l^4$ . Alors

$$f_{l_1=l} = 0,0213 Aql^4, \quad f_{l_1=1,5l} = 0,0375 Aql^4,$$

$$f_{l_1=2l} = 0,0450 Aql^4.$$

Pour comparer ces résultats aux précédents, il faut les diviser par  $2^4$ . La concordance est satisfaisante et l'on peut présumer que nos premières approximations de  $\omega$  donnent des valeurs acceptables pour les flèches.

Il en est tout autrement pour les moments  $M_x, M_y, M_{xy}$  qui dépendent des dérivées deuxièmes de  $\omega$ .

BIEZENO et GRAMMEL, dans leur *Technische Dynamik* (Berlin, Springer, 1939), p. 139-142, font le calcul en prenant pour  $\omega$  l'expression

$$\omega = a_{11} X_1 Y_1 + a_{12} X_1 Y_2 + a_{21} X_2 Y_1 + a_{22} X_2 Y_2,$$

avec quatre coefficients.

Les polynômes  $X_1$  et  $Y_1$  sont ceux que nous venons d'utiliser et

$$X_2 = x^2 X_1 = x^6 - 2l^2 x^4 + l^4 x^2, \quad Y_2 = y^2 Y_1 = y^6 - 2l_1^2 y^4 + l_1^4 y^2.$$

En prenant  $l_1 = 1,5l$ , ces auteurs trouvent pour les moments des valeurs qui concordent à 1 % près avec les valeurs exactes (dont le calcul est beaucoup plus compliqué) et la flèche au centre

$$f_{l_1=1,5l} = 0,0350 Aql^4,$$

est exacte à 0,4 % près.

Nous venons de faire le calcul de la plaque pour une charge uniformément répartie. Il se ferait d'une manière analogue si la plaque était sollicitée par une force  $P$  appliquée en son centre.

En se servant des polynômes convenables, on calculerait par la même méthode une plaque dont les côtés sont les uns appuyés, les autres encastrés.

Ritz, pour son calcul de la plaque carrée encastrée, avait utilisé, au lieu de polynômes, les fonctions propres  $U_i$  dont nous avons parlé au paragraphe 1.

## LES CONDITIONS D'UN BON ÉCLAIRAGE<sup>1</sup>

par Madame C. ROY-POCHON, ingénieur E.P.U.L.,  
Présidente de la 2<sup>me</sup> Section de la Société Française des Electriciens

On peut juger un éclairage de différents points de vue; les plus importants sont l'utilité, l'hygiène et l'esthétique.

Nous ne parlerons pas ici d'esthétique. Non pas que nous la considérons comme négligeable; mais elle est essentiellement affaire de goût et de sens artistique. Ce n'est pas un ingénieur qui peut trancher en une telle matière. D'autre part, l'esthétique conduit parfois à s'écartez des règles établies par les éclairagistes; on peut le faire, il va de soi, avec moins d'inconvénients dans le cas d'un salon que dans celui d'un bureau ou d'un atelier.

Du point de vue de l'hygiène, nous devons considérer les effets de l'éclairage (ou du manque d'éclairage) sur la vue et, d'une façon générale, sur la santé et le bien-être des occupants du local. A ce genre de préoccupations, nous rattachons, un peu arbitrairement, celle de la sécurité du travail.

Le point de vue utilitaire fait intervenir la rapidité d'exécution d'une tâche donnée, le rendement dans le travail, et nous incite à rechercher la plus grande efficacité de la lumière distribuée dans le local.

La technique de l'éclairage comporte un certain nombre de règles qui répondent à deux ordres de préoccupations:

- a) assurer un niveau d'éclairage suffisant pour l'exécution d'une tâche donnée;
- b) ne pas éblouir.

<sup>1</sup> Causerie faite le 4 mars 1952 à l'A<sup>3</sup> E<sup>2</sup> P. L., section de Paris.

### Rappel de définitions

Avant de parler de niveaux d'éclairage, il n'est pas inutile de rappeler quelques définitions.

Qu'est-ce qu'un éclairage? C'est une densité de flux lumineux, un flux par unité de surface éclairée. Qu'est-ce qu'un flux lumineux? C'est un débit d'énergie rayonnée sous forme de lumière visible. On pourrait le mesurer en watts; on préfère utiliser le *lumen*, unité subjective, qui tient compte de la sensibilité variable de l'œil suivant la longueur d'ondes. Le maximum de sensibilité correspond à 5500 angstroëms, c'est-à-dire à une lumière jaune verdâtre. Pour cette longueur d'ondes, on peut définir un « équivalent mécanique de la lumière »: 0,0016 watt ( $\frac{1}{625}$ ) pour un lumen. Autrement dit, un watt équivaut à 625 lumens. Mais ce n'est pas le cas des lampes usuelles qui sont des sources de lumière blanche. En lumière du jour, par exemple, le lumen correspond environ à  $\frac{1}{250}$  watt; en lumière artificielle, à  $\frac{1}{100}$  watt. Ceci veut dire que si l'on compare deux surfaces identiques, éclairées l'une par la lumière du jour, l'autre par une lampe à incandescence, l'égalité d'éclairage sera obtenue avec des énergies requises dans le rapport de 1 (lumière naturelle) à 2,5 (lumière artificielle).

Nous croyons utile d'insister sur ce caractère essentiellement subjectif de l'unité de flux lumineux: le lumen « rouge » ne