

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin technique de la Suisse romande
<b>Band:</b>	78 (1952)
<b>Heft:</b>	9
<b>Artikel:</b>	La méthode de Walther Ritz: son application à quelques problèmes élémentaires de résistance des matériaux
<b>Autor:</b>	Paschoud, Maurice
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-58993">https://doi.org/10.5169/seals-58993</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

**Abonnements :**

Suisse : 1 an, 24 francs  
Etranger : 28 francs  
Pour sociétaires :  
Suisse : 1 an, 20 francs  
Etranger : 25 francs  
Pour les abonnements  
s'adresser à :  
Administration  
du « Bulletin technique  
de la Suisse romande »  
Librairie Rouge & Cie  
S. A., Lausanne  
Compte de chèques pos-  
taux II. 5778, à Lausanne  
Prix du numéro : Fr. 1.40

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Société vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; E. Latelain, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; E. d'Okołiski, architecte; A. Paris, ingénieur; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. L. Archinard, ingénieur; Cl. Grosgruin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; G. Furter, ingénieur; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur, Caste postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique: A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitaux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

**Tarif des annonces**

Le millimètre  
(larg. 47 mm) 24 cts

Réclames : 60 cts le mm  
(largeur 95 mm)

Rabais pour annonces  
répétées

Annances Suisses S.A.



5 Rue Centrale. Tél. 223326  
Lausanne et succursales

**SOMMAIRE :** *La méthode de Walther Ritz : Son application à quelques problèmes élémentaires de résistance des matériaux*, par MAURICE PASCHOUD. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes : *Rapport du président sur l'activité de la Société et de son Comité durant l'exercice du 30 mars 1951 au 28 mars 1952*. — **BIBLIOGRAPHIE**. — **SERVICE DE PLACEMENT**. — **INFORMATIONS DIVERSES**.

## LA MÉTHODE DE WALTHER RITZ

### Son application à quelques problèmes élémentaires de résistance des matériaux

par MAURICE PASCHOUD<sup>1</sup>

#### I. Introduction

##### § 1. Problèmes aux limites du 2<sup>e</sup> ordre et Calcul des variations<sup>2</sup>

L'intégrale générale d'une équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre dépend de deux constantes d'intégration. Deux conditions sont nécessaires pour déterminer ces constantes.

Quand ces conditions sont telles que la fonction cherchée doit prendre des valeurs données pour deux valeurs de la variable, par exemple aux deux extrémités  $a$  et  $b$  d'un intervalle  $(a, b)$ , on a affaire à un *problème aux limites*.

Il existe une relation étroite entre les problèmes aux limites et le calcul des variations<sup>3</sup>.

Les valeurs d'une fonction étant données en deux points  $x = a$  et  $x = b$ , un des problèmes du calcul des variations consiste à déterminer cette fonction  $y(x)$  de façon à rendre extremum une intégrale de la forme

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (1)$$

On montre, c'est une *condition nécessaire*, que les fonctions  $y(x)$  rendant  $I$  extremum sont, quand elles existent, des solutions de l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad (2)$$

qui s'appelle l'*équation d'Euler* du problème considéré. Cette équation d'Euler transforme le problème de variation en un problème aux limites.

Si, par exemple, l'intégrale à rendre extremum est

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{y'^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy' \right) dx$$

avec les conditions  $y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,

l'équation d'Euler sera  $y'' + y + 1 = 0$ , et le problème aux limites correspondant consistera à trouver la solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

<sup>1</sup> Professeur honoraire de l'Université de Lausanne.

<sup>2</sup> Pour fixer les idées, nous rappelons, dans cette introduction, certains faits concernant les problèmes aux limites du 2<sup>e</sup> ordre. Dans la suite, nous appliquerons sans autre des résultats analogues à des problèmes aux limites relatifs à des équations d'un ordre plus élevé que le 2<sup>e</sup> et à des équations aux dérivées partielles.

<sup>3</sup> Voir BLANC, *Les équations différentielles de la technique*. Cours de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne, [1], chapitres IV et XI.

### § 2. La méthode de Ritz

Ritz suit une marche inverse de celle que nous venons d'esquisser. Il ramène les problèmes aux limites à des problèmes de variation.

Reprendons l'exemple du paragraphe 1. Pour trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' + y + 1 = 0,$$

satisfaisant aux conditions  $y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,

on cherchera une fonction  $y(x)$  satisfaisant à ces conditions et rendant extremum l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{y'^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy' \right) dx$$

dont l'équation  $y'' + y + 1 = 0$  est l'équation d'Euler.

Cette façon de procéder présente de l'intérêt si l'on sait résoudre le problème de variation auquel on est ramené.

Pour résoudre ce problème, Ritz suppose que la fonction  $y(x)$  est de la forme

$$y_n(x) = a_1 X_1(x) + a_2 X_2(x) + \dots + a_n X_n(x) \quad (3)$$

et qu'elle satisfait aux conditions aux limites. Les fonctions  $X_i(x)$  doivent être linéairement indépendantes.

Si l'on porte cette expression d' $y$  et celle de sa dérivée dans  $I$ , celle-ci devient une fonction des coefficients  $a_i$ .

Trouver l'extremum de cette fonction n'est plus un problème de variation ; c'est un problème de calcul différentiel. On écrit que les dérivées partielles de  $I$  par rapport aux coefficients  $a_i$  sont nulles, d'où  $n$  relations

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

qui permettent le calcul des coefficients  $a_i$ .

L'expression (3), avec ces valeurs des coefficients  $a_i$ , sera la meilleure approximation de la solution du problème aux limites que l'on peut obtenir en se servant des  $n$  fonctions  $X_i$ .

Généralement, pour que la fonction  $y(x)$  donnée par (3) satisfasse aux conditions aux limites, on choisira comme fonctions  $X_i$  des fonctions qui, elles-mêmes, satisfont à ces conditions.

Appliquons la méthode à notre exemple. Nous choisirons d'abord pour  $y(x)$  l'expression

$$y_1 = a_1 x \left( \frac{\pi}{2} - x \right),$$

qui est de la forme (3), avec un seul coefficient.

La fonction

$$X_1(x) = x \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

est un polynôme qui s'annule pour  $x = 0$  et pour  $x = \frac{\pi}{2}$ .

En portant  $y_1$  et sa dérivée dans  $I$ , il vient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{a_1^2}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - 2\pi x + 4x^2 \right] - \frac{a_1^2}{2} \left[ x^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - \pi x^3 + x^4 \right] + a_1 x \left[ \frac{\pi}{2} - 2x \right] \right\} dx.$$

Tout calcul fait

$$I = a_1^2 \frac{\pi^3}{48} - a_1^2 \frac{\pi^5}{1920} - a_1 \frac{\pi^2}{48}$$

et la condition  $\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0$  donne

$$a_1 \left( \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi^5}{960} \right) - \frac{\pi^3}{48} = 0.$$

On a donc  $a_1 = 0,66$ . La 1<sup>re</sup> approximation est

$$y_1 = 0,66 x \left( \frac{\pi}{2} - x \right).$$

Pour la 2<sup>e</sup> approximation, nous prendrons

$$y_2(x) = a_1 x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + a_2 x^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right)^2$$

avec deux coefficients. On trouve alors

$$y_2 = 0,638 x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + 0,057 x^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right)^2.$$

### § 3. Le procédé de Galerkine

M. Galerkine a donné à la méthode de Ritz une forme qui permet, lorsque, aux limites, on a  $y(a) = 0$  et  $y(b) = 0$ , de partir directement de l'équation à intégrer, *sans passer par la fonction F*. Le procédé de Galerkine permet en outre d'écrire les équations donnant les coefficients  $a_i$  sans calculer  $I$  en fonction de ces coefficients.

$$\text{Soient} \quad I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

l'intégrale dont il faut chercher l'extremum et

$$y'' - f(x, y, y') = 0$$

l'équation d'Euler correspondante.

Partons toujours de l'expression

$$y_n(x) = a_1 X_1(x) + \dots + a_n X_n(x),$$

les fonctions  $X_i$  satisfaisant aux conditions aux limites. Portons cette expression d' $y$  dans  $I$ . On a

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y'} X'_i + \frac{\partial F}{\partial y} X_i \right) dx.$$

Si l'on intègre par parties le 1<sup>er</sup> terme du 2<sup>e</sup> membre, on peut écrire, en tenant compte des conditions

$$X_i(a) = 0 \quad \text{et} \quad X_i(b) = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = - \int_a^b X_i \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right] dx.$$

Le facteur dans le crochet n'est pas autre chose que le 1<sup>er</sup> membre de l'équation d'Euler relative à  $I$ . On aura donc finalement comme condition nécessaire pour l'extremum de  $I$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \int_a^b X_i [y'' - f(x, y, y')] dx = 0.$$

C'est la forme donnée par Galerkine aux équations  $\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0$ .

Appliquons ce procédé à l'intégration de l'équation

$$y'' + y + 1 = 0$$

avec les conditions

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

En 1<sup>re</sup> approximation

$$y_1 = a_1 x \left( \frac{\pi}{2} - x \right),$$

et l'équation de Galerkine (que nous appellerons l'équation G) est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) [y_1'' + y_1 + 1] dx = 0.$$

Si l'on porte dans cette équation les expressions de  $y_1$  et de  $y_1''$ , on obtient la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \left[ -2a_1 + a_1 x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + 1 \right] dx = 0,$$

d'où l'on tire la valeur  $a_1 = 0,66$  déjà trouvée plus haut.

En 2<sup>e</sup> approximation, avec

$$y_2 = a_1 x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + a_2 x^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right)^2,$$

les deux équations G sont

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) [y_2'' + y_2 + 1] dx = 0$$

$$\text{et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right)^2 [y_2'' + y_2 + 1] dx = 0.$$

Elles donnent pour  $a_1$  et pour  $a_2$  les valeurs trouvées précédemment.

Au lieu de

$$X_1 = x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \text{ et } X_2 = x^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right)^2,$$

on aurait pu se servir des expressions

$$X_1 = \sin 2x \text{ et } X_2 = \sin^2 2x,$$

qui, toutes deux, s'annulent pour  $x = 0$  et pour  $x = \frac{\pi}{2}$ .

On trouverait alors, en 1<sup>re</sup> approximation,  $y_1 = 0,42 \sin 2x$ , et, en 2<sup>e</sup> approximation,  $y_2 = 0,484 \sin 2x - 0,071 \sin^2 2x$ .

En prenant

$$X_1 = x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \text{ et } X_2 = \sin 2x$$

on obtiendrait la 2<sup>e</sup> approximation suivante :

$$y_2 = 0,513 x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + 0,098 \sin 2x.$$

#### § 4. Critique de la méthode de Ritz

L'exemple suivant ([4], p. 251-253) met en évidence certaines difficultés qui peuvent se présenter dans l'emploi de la méthode de Ritz.

Soit à intégrer l'équation  $y'' - A(x)y = 1$ , avec les conditions  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$ .

On donne

$$A(x) = \begin{cases} 2,25 & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{pour } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

En prenant  $X_i = \sin i x$ ,  $i = 1, 2, \dots$  on obtient les approximations

$$y_1 = -0,599 \sin x$$

$$y_2 = -0,650 \sin x + 0,121 \sin 2x$$

$$y_3 = -0,658 \sin x + 0,428 \sin 2x - 0,049 \sin 3x$$

$$y_4 = -0,658 \sin x + 0,428 \sin 2x - 0,048 \sin 3x - 0,012 \sin 4x$$

$$y_5 = -0,658 \sin x + 0,428 \sin 2x - 0,049 \sin 3x - 0,012 \sin 4x - 0,009 \sin 5x.$$

On voit que, tout au moins dans les premières approximations, les valeurs des coefficients changent quand l'ordre  $n$  de l'approximation considérée augmente. Il est donc difficile de déterminer, à priori, le nombre de fonctions  $X_i$  qu'il faut utiliser pour obtenir le résultat cherché avec une précision donnée.

D'autre part, il n'est pas facile, généralement, d'établir que la suite des approximations  $y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$  converge vers une fonction  $y(x)$ .

Enfin, si l'on porte les approximations obtenues dans l'équation différentielle proposée, celle-ci est assez mal vérifiée, du moins par les premières approximations. On voit même, sur l'exemple ci-dessus, que l'équation proposée est très mal vérifiée pour certaines valeurs d' $x$ , par exemple pour  $x = 0$ , si grand que soit l'ordre de l'approximation considérée.

Cela ne signifie d'ailleurs pas que les approximations obtenues diffèrent beaucoup de la solution cherchée. Des fonctions peu différentes les unes des autres peuvent posséder des dérivées très différentes. Si, dans notre exemple, on avait pris

$$X_i = x^i (\pi - x)^i,$$

on trouverait, en 1<sup>re</sup> approximation

$$y_1 = -0,237 x (\pi - x).$$

Les deux fonctions

$$y_1 = -0,237 x (\pi - x) \text{ et } y_1 = -0,599 \sin x$$

diffèrent assez peu l'une de l'autre. Leurs dérivées secondes sont, en revanche, très différentes et, si l'on peut s'exprimer ainsi, la première de ces fonctions vérifie l'équation proposée moins mal que la deuxième.

Quand on connaît la solution du problème aux limites proposé (elle est  $y = \cos x + \sin x - 1$  pour l'exemple du paragraphe 3), on peut évidemment l'utiliser pour se faire une idée de la précision des approximations trouvées par la méthode de Ritz. Mais la connaissance de cette solution exacte ne rend pas du tout inutile l'emploi de la méthode de Ritz, car celle-ci donne généralement une forme intéressante à cette solution.

Aucune des difficultés que nous venons de signaler ne se présente dans les applications qui suivent, aux chapitres II, III et IV.

## II. Déformée de la poutre à deux appuis simples

### § 1. Représentation par une série trigonométrique

Soit une poutre à deux appuis simples, de longueur  $l$ , de rigidité  $EI$  constante, portant la charge  $q(x)$  par unité de longueur. (Fig. 1.)

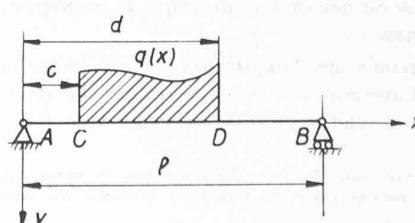


Fig. 1.

Pour trouver sa déformée, nous utiliserons l'équation

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x). \quad (1)$$

Les conditions aux limites sont  $y = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  pour  $x = 0$  et pour  $x = l$ .

Prenons pour  $y$  l'expression

$$y_n(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2)$$

qui satisfait aux conditions aux limites. Les  $n$  équations G sont :

$$\int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \left[ EI \frac{d^4 y_n}{dx^4} - q(x) \right] dx = 0, \dots \dots$$

$$\dots \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \left[ EI \frac{d^4 y_n}{dx^4} - q(x) \right] dx = 0.$$

La  $n$ ème, écrite explicitement, est

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \left[ EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \left( a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + 2^4 a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + n^4 a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right] dx = \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3)$$

Si  $m$  et  $p$  sont des entiers et si  $m \neq p$ , on a

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{p\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}.$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 n^4 a_n \frac{l}{2} = \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (4)$$

Cette expression fondamentale (4), où la charge  $q(x)$  n'intervient qu'au 2<sup>e</sup> membre (*terme de charge*), permet le calcul de  $a_n$  dès que la fonction  $q(x)$  est donnée explicitement.

Ce calcul étant fait pour un mode de charge donné, on portera les valeurs des  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) correspondants dans (2). Si l'on suppose alors que  $n$  augmente indéfiniment, l'expression (2) deviendra l'équation de la déformée sous forme de série trigonométrique.

## § 2. Calcul de quelques termes de charge

a) La charge est une charge uniformément répartie appliquée de  $C$  à  $D$

$$\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{ql}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi c}{l} - \cos \frac{n\pi d}{l} \right]. \quad (5)$$

Si la charge uniformément répartie,  $q$ , s'étend sur toute la poutre,

$$\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2ql}{n\pi} \quad \text{pour } n \text{ impair};$$

$$\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{pour } n \text{ pair}. \quad (5 \text{ bis})$$

b) La charge est une charge concentrée  $P$ , appliquée au point  $C$  d'abscisse  $c$

Nous partons de l'expression (5) et supposons que le point  $D$ , d'abscisse  $d = c + \epsilon$  se rapproche de  $C$  de façon que lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro,  $q\epsilon$  tende vers  $P$ .

<sup>1</sup> Voir TIMOSHENKO, *Résistance des Matériaux*, 1<sup>re</sup> partie, [2], p. 132. On pourrait évidemment partir de l'équation classique du deuxième ordre  $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$ , où  $M$  est le moment fléchissant. Le calcul serait un peu plus compliqué.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_c^d q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{ql}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi c}{l} - \cos \frac{n\pi (c + \epsilon)}{l} \right] = P \sin \frac{n\pi c}{l}. \quad (6)$$

c) La charge est un couple de moment  $M$ , appliqué au point  $C$  d'abscisse  $c$

Nous supposons la poutre sollicitée par deux forces  $P$ , verticales. L'une, ascendante, est appliquée au point  $C$ ; l'autre, descendante, est appliquée au point  $D$  d'abscisse  $d = c + \epsilon$ . Ces deux forces égales forment un couple de moment  $P\epsilon$  (que nous considérerons comme positif s'il tourne dans le sens des aiguilles de la montre). Faisons tendre  $\epsilon$  vers zéro, de façon que  $P\epsilon$  tende vers  $M$ . On aura

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_c^d q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ -P \sin \frac{n\pi c}{l} + P \sin \frac{n\pi (c + \epsilon)}{l} \right] = M \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi c}{l}. \quad (7)$$

## § 3. Equation de la déformée pour divers modes de charge<sup>1</sup>

a) La poutre porte une charge uniformément répartie sur toute sa longueur (Fig. 2)

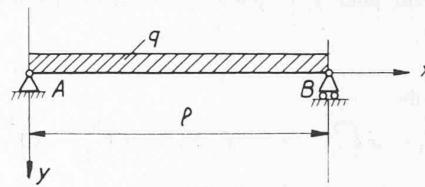


Fig. 2.

L'équation de la déformée s'obtient en utilisant la relation (4), avec les expressions (5 bis) pour le 2<sup>e</sup> membre. Elle est

$$y(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l} =$$

$$= \frac{4ql^4}{EI306,02} \left[ \frac{1}{1^5} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{243} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right]. \quad (8)$$

Ecrivons, à titre de comparaison, l'équation classique de cette déformée

$$y = \frac{q}{24EI} (l^3 x - 2l^3 x^3 + x^4). \quad (8 \text{ bis})$$

Si, dans (8) et dans (8 bis) on fait  $x = \frac{l}{2}$ , il vient, pour la flèche au milieu de la poutre, respectivement, les expressions

$$\frac{4ql^4}{EI\pi^5} \left[ \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots \right] \quad \text{et} \quad \frac{5ql^4}{384EI}.$$

En les égalant, on obtient la relation

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} = \frac{5\pi^5}{4536}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Ce mode de représentation par une série trigonométrique est dû à M. TIMOSHENKO, qui l'établit en partant de la notion d'énergie de déformation. Malgré des différences sensibles dans l'application, la méthode de Ritz et celle qui est basée sur la notion d'énergie de déformation sont, au fond, identiques.

Sur ces développements en séries trigonométriques, voir TIMOSHENKO, *Résistance des matériaux*, 2<sup>e</sup> partie, [3] et *Théorie de la stabilité élastique*, [4].

<sup>2</sup> Voici un certain nombre de relations analogues. Elles peuvent toutes se déduire, comme celle que nous venons d'établir, de la comparaison entre des expressions classiques de la Résistance des matériaux et les expressions correspondantes obtenues par la méthode de Ritz. On peut aussi (Bous-

*Moment fléchissant.* — En dérivant (8) deux fois terme à terme, nous obtenons pour le moment fléchissant, qui est donné par la relation

$$M = -EI \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (9)$$

l'expression

$$M = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10)$$

Si la charge uniformément répartie n'agissait qu'entre les points *C* et *D* de la poutre (Fig. 3), on aurait pour la déformée

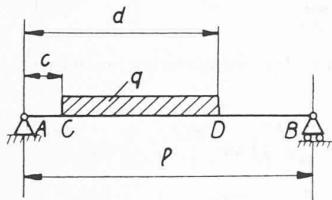


Fig. 3.

l'expression

$$y = \frac{2ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^5} \left[ \cos \frac{n\pi c}{l} - \cos \frac{n\pi d}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

On déduit immédiatement de ces expressions celle de la pente de la déformée qui est donnée par  $\frac{dy}{dx}$  et celle du moment fléchissant.

b) *La poutre porte une charge concentrée  $P$  appliquée au point *C* (Fig. 4)*

En se servant de l'expression (6) du terme de charge, on trouve pour équation de la déformée

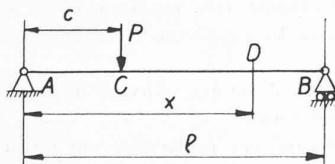


Fig. 4.

SINESQ, *Calcul intégral*, fascicule II, p. 171-173) déduire ces relations, dont nous allons avoir besoin, du développement connu

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$$

On a

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} = \frac{9,87}{8} = 1,234; \quad \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1,645;$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12} = 0,822.$$

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32} = \frac{31,01}{32} = 0,969.$$

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} = \frac{97,41}{96} = 1,015; \quad \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = 1,082$$

$$\frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \dots = \frac{7\pi^4}{720} = 0,947.$$

$$y = \frac{2Pb^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{2Pb^3}{EI 97,41} \left[ \frac{1}{4^4} \sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^4} \sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right] \quad (11)$$

Cette expression est *valable pour toute la longueur de la poutre*, alors que les expressions classiques correspondantes

$$y = \frac{P(l-c)x}{6EI} [2lc - c^2 - x^2] \quad \text{et} \quad (11 \text{ bis})$$

$$y = \frac{P(l-c)x}{6EI} [2lc - c^2 - x^2] + \frac{P(x-c)^3}{6EI},$$

ne sont valables que pour  $x \leq c$  et pour  $x \geq c$  respectivement.

L'expression (11) *ne change pas si l'on y remplace  $c$  par  $x$  et  $x$  par  $c$* . On peut donc énoncer le théorème de réciprocité suivant : la flèche au point *D* due à une charge  $P$  appliquée au point *C* est égale à la flèche au point *C* due à la charge  $P$  appliquée au point *D*.

De (11), on déduit par des dérivations terme à terme les expressions de la pente de la déformée et du moment fléchissant, cette dernière ne changeant pas si l'on y remplace  $c$  par  $x$  et  $x$  par  $c$ .

c) *La poutre est sollicitée par un couple de moment  $M$  appliquée au point *C* (Fig. 5)*

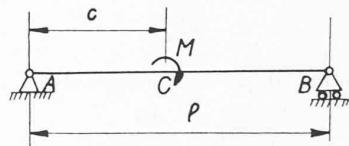


Fig. 5.

En utilisant l'expression (7), on peut écrire immédiatement l'équation de la déformée. C'est

$$y = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{2Ml^2}{EI 31,01} \left[ \frac{1}{1^3} \cos \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^3} \cos \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right]. \quad (12)$$

Celle de la pente de la déformée est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Ml}{EI\pi^2} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Elle ne change pas si l'on y remplace  $c$  par  $x$  et  $x$  par  $c$ .

Si le couple est appliqué sur un des appuis de la poutre, on obtient les relations

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0, c=o} = \frac{2Ml}{EI\pi^2} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^2} = \frac{Ml}{3EI} = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l, c=l} \quad \text{et}$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{c=l} = \frac{2Ml}{EI\pi^2} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^2} (-1)^n = -\frac{Ml}{6EI} = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0}.$$

#### § 4. Applications

*Calcul du moment d'encastrement  $M$  d'une poutre encastree à un bout et appuyée à l'autre. La charge est triangulaire (Fig. 6)*

La poutre à deux appuis simples obtenue en supprimant l'encastrement en *A* se déforme sous la charge. Sa déformée a pour équation

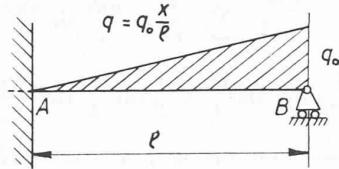


Fig. 6.

$$y = \frac{2 q_0 l^4}{EI \pi^5} \left[ \frac{1}{1^5} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2^5} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right].$$

Les coefficients de la série précédente sont donnés par la relation (4) dans laquelle on a

$$\int_c^d q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_A^B q_0 \frac{x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{q_0 l}{n\pi} (-1)^n.$$

La pente de cette déformée sur l'appui A est alors

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2 q_0 l^3}{EI \pi^4} \left[ \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \dots \right] = \frac{2 q_0 l^3}{EI \pi^4} \cdot \frac{7\pi^4}{720} = \frac{7 q_0 l^3}{360 EI}.$$

Si, d'autre part, on applique à cette poutre à deux appuis simples AB, sur son appui A, un couple de moment M, la pente de sa déformée, sur cet appui A, sera

$$\frac{Ml}{3EI}.$$

Il y a encastrement en A. On aura donc

$$\frac{7 q_0 l^3}{360 EI} + \frac{Ml}{3EI} = 0,$$

d'où

$$M = -\frac{7 q_0 l^2}{120}.$$

*Moments d'encastrement d'une poutre encastree aux deux bouts et sollicitée par une charge P (Fig. 7)*

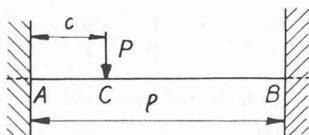


Fig. 7.

Quand la poutre à deux appuis simples obtenue en supprimant les encastrements est sollicitée par la charge P, les pentes de sa déformée sur ses appuis A et B sont respectivement

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2 P l^2}{EI \pi^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi c}{l} \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{n=l} = \frac{2 P l^2}{EI \pi^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} (-1)^n \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

Quand cette poutre AB, à deux appuis simples, est sollicitée par un couple de moment  $M_A$ , appliqué sur son appui A, les pentes de sa déformée sur les appuis sont respectivement

$$\frac{M_A l}{3EI} \quad \text{et} \quad -\frac{M_A l}{6EI}.$$

Quand la même poutre est sollicitée par un couple de moment  $M_B$  appliqué sur son appui B, on aura, pour les pentes de la déformée sur les appuis A et B, respectivement, les expressions

$$-\frac{M_B l}{6EI} \quad \text{et} \quad \frac{M_B l}{3EI}.$$

La poutre est encastrée aux deux bouts, on aura donc les deux relations

$$\frac{2 P l^2}{EI \pi^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi c}{l} + \frac{M_A l}{3EI} - \frac{M_B l}{6EI} = 0,$$

$$\frac{2 P l^2}{EI \pi^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} (-1)^n \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi c}{l} - \frac{M_A l}{6EI} + \frac{M_B l}{3EI} = 0.$$

On en déduit les expressions suivantes des moments d'encastrement :

$$-M_A = \frac{4 Pl}{\pi^3} \left[ \left( \sin \frac{\pi c}{l} + \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi c}{l} + \dots \right) + 3 \left( \frac{1}{2^3} \sin \frac{2\pi c}{l} + \frac{1}{4^3} \sin \frac{4\pi c}{l} + \dots \right) \right].$$

$$-M_B = \frac{4 Pl}{\pi^3} \left[ -\left( \sin \frac{\pi c}{l} + \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi c}{l} + \dots \right) + 3 \left( \frac{1}{2^3} \sin \frac{2\pi c}{l} + \frac{1}{4^3} \sin \frac{4\pi c}{l} + \dots \right) \right].$$

Pour  $c = \frac{l}{2}$ , on trouve les valeurs bien connues

$$-M_A = \frac{4 Pl}{\pi^3} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \right) + 3.0 \right] = \frac{4 Pl \pi^3}{\pi^3 \cdot 32} = \frac{Pl}{8},$$

$$-M_B = \frac{4 Pl}{\pi^3} \left( -\frac{\pi^3}{32} \right) = -\frac{Pl}{8}.$$

*Remarque.* — Les séries trigonométriques développées dans ce chapitre peuvent être utilisées pour les calculs numériques.

Les unes convergent très rapidement et, dans les applications, on pourra les employer en n'en conservant que le premier terme.

Pour les autres, il faudra, suivant les cas, en conserver plus ou moins de termes.

Mais, dans chaque cas particulier, on pourra aisément se rendre compte du nombre de termes qu'il faut conserver pour obtenir le résultat cherché avec une précision voulue.

Notons aussi que les expressions approchées obtenues en ne conservant que le premier terme de la série trigonométrique relative à un cas donné permettent quelquefois d'établir des résultats que, généralement, l'on démontre en partant de l'équation rigoureuse de la déformée.

Ainsi, dans le « Bulletin technique » des Ateliers de constructions mécaniques de Vevey (n° 1, 1941), M. J. Tache étudie la question de la *Contre-flèche d'un pont roulant*.

En utilisant l'équation classique de la déformée d'une poutre à deux appuis simples, M. Tache établit divers résultats généraux intéressants. Son calcul est compliqué par le fait que dans le cas de la charge concentrée, l'équation de la déformée qu'il emploie n'est valable que pour une partie de la poutre.

En se servant de l'expression approchée de l'équation de la déformée obtenue en ne conservant que le premier terme de la série (11), on établit très simplement les résultats donnés par M. Tache.

(A suivre.)