Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 78 (1952)

Heft: 9

Inhaltsverzeichnis

78e année 3 mai 1952 No 9

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Société vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

LA MÉTHODE DE WALTHER RITZ

Son application à quelques problèmes élémentaires de résistance des matériaux

par MAURICE PASCHOUD [1]

I. Introduction

§ 1. *Problèmes aux limites du 2e ordre et Calcul des variations* [2]

L'intégrale générale d'une équation différentielle du 2e ordre dépend de deux constantes d'intégration. Deux conditions sont nécessaires pour déterminer ces constantes.

Quand ces conditions sont telles que la fonction cherchée doit prendre des valeurs données pour *deux* valeurs de la variable, par exemple aux deux extrémités a et b d'un intervalle (a, b), on a affaire à un *problème aux limites.*

Il existe une relation étroite entre les problèmes aux limites et le calcul des variations [3].

Les valeurs d'une fonction étant données en deux points $x = a$ et $x = b$, un des problèmes du calcul des variations consiste à déterminer cette fonction $y(x)$ de façon à rendre extremum une intégrale de la forme

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx. \tag{1}$$

On montre, c'est une *condition nécessaire,* que les fonctions $y(x)$ rendant I extremum sont, quand elles existent, des solutions de l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\ , \tag{2}$$

qui s'appelle l'*équation d'Euler* du problème considéré. Cette équation d'Euler transforme le problème de variation en un problème aux limites.

Si, par exemple, l'intégrale à rendre extremum est

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{y'^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy'\right) dx$$

$$\text{avec les conditions } y(o) = 0\ ,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ ,$$

l'équation d'Euler sera $y'' + y + 1 = 0$,
et le problème aux limites correspondant consistera à trouver la solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions

$$y(o) = 0\ ,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ .$$

[1] Professeur honoraire de l'Université de Lausanne.

[2] Pour fixer les idées, nous rappelons, dans cette introduction, certains faits concernant les problèmes aux limites du 2e ordre. Dans la suite, nous appliquerons sans autre des résultats analogues à des problèmes aux limites relatifs à des équations d'un ordre plus élevé que le 2e et à des équations aux dérivées partielles.

[3] Voir BLANC, *Les équations différentielles de la technique.* Cours de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne, [1], chapitres IV et XI.