

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin technique de la Suisse romande
<b>Band:</b>	78 (1952)
<b>Heft:</b>	7
<b>Artikel:</b>	Étude des ondes de translation de faible amplitude dans le cas des canaux d'amenée des usines hydro-électriques
<b>Autor:</b>	Cuénod, Michel / Gardel, André
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-58991">https://doi.org/10.5169/seals-58991</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

<b>Abonnements :</b>
Suisse : 1 an, 24 francs
Etranger : 28 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs
Pour les abonnements s'adresser à :
Administration du « Bulletin technique de la Suisse romande » Librairie Rouge & Cie S. A., Lausanne
Compte de chèques postaux II, 5778, à Lausanne
Prix du numéro : Fr. 1.40

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Société vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; E. Latelii, architecte — Vaud: MM. F. Cheneaux, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; A. Paris, ingénieur; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. L. Archinard, ingénieur; Cl. Grosgruin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; G. Furter, ingénieur; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur. Caste postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique: A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitaux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

## Tarif des annonces

Le millimètre  
(larg. 47 mm) 24 cts

Réclames : 60 cts le mm  
(largeur 95 mm)

Rabais pour annonces répétées

Annonces Suisses S.A.



5 Rue Centrale. Tél. 22 33 26  
Lausanne et succursales

**SOMMAIRE :** *Etude des ondes de translation de faible amplitude dans le cas des canaux d'aménée des usines hydro-électriques*, par MICHEL CUÉNOD, ingénieur EPF, et ANDRÉ GARDEL, ing. EPUL, lic. ès sc. — *DIVERS : Dispositifs de sécurité pour grues pivotantes*, par ARTHUR NYFFELER, ingénieur EPUL. — *Nouvelle loi fédérale sur les brevets d'invention*. — *LES CONGRÈS : Formation d'un Comité national suisse pour l'irrigation et le drainage ; Quatrième congrès de l'Association internationale des Ponts et Charpentes*. — *NÉCROLOGIE : Marc Lorétan, ingénieur ; Louis de Vallière, ingénieur*. — *BIBLIOGRAPHIE*. — *SERVICE DE PLACEMENT*. — *INFORMATIONS DIVERSES*.

COMMUNICATIONS DU LABORATOIRE D'HYDRAULIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE  
Directeur: M. le professeur A. STUCKY. — Directeur-adjoint: M. le professeur D. BONNARD

## ÉTUDE DES ONDES DE TRANSLATION DE FAIBLE AMPLITUDE dans le cas des canaux d'aménée des usines hydro-électriques

MICHEL CUÉNOD  
ingénieur EPF

par  
et

ANDRÉ GARDEL  
ing. EPUL, lic. ès sc.

### I. Introduction

L'étude des ondes de translation qui se propagent dans les canaux d'aménée ou de fuite d'usines hydro-électriques a déjà fait l'objet de nombreuses publications<sup>1</sup>. Des méthodes analytiques, graphiques ou semi-graphiques ont été indiquées pour le calcul de ces ondes. Nous nous proposons ici d'indiquer une nouvelle méthode applicable lorsqu'il s'agit d'ondes consécutives à de faibles variations de l'ouverture des turbines.

Cette méthode permet d'aborder le problème de la stabilité du réglage de ces usines. En effet, il peut se produire dans le canal d'aménée un phénomène comparable à celui, bien connu, dont les chambres d'équilibre sont le siège [8]. Dans un cas, comme dans l'autre, un régime de marche instable peut s'établir si les pertes de charge dans le canal (ou la galerie) d'aménée ne sont pas suffisantes pour assurer l'amortissement des ondes de translation (ou de l'oscillation dans la chambre d'équilibre). C'est plus particulièrement le cas si

l'usine débite son énergie sur un réseau séparé et que l'effet stabilisant de l'interconnexion ne puisse pas se faire sentir. L'usine travaille alors à puissance approximativement constante pendant certaines périodes et l'on peut établir une condition de stabilité jouant, pour les centrales alimentées par un canal à écoulement libre, le même rôle que la condition de Thoma pour les centrales dont l'adduction se fait sous charge.

Dans un précédent exposé consacré au cas des usines munies de chambres d'équilibre, nous avons proposé un procédé de stabilisation du réglage par asservissement temporaire de la puissance électrique à la pression hydraulique. En agissant sur le réglage de la fréquence ou de la tension, on constate qu'il suffit de variations très limitées de la tension ou de la fréquence pour obtenir un effet stabilisant important. Nous montrerons ici qu'un tel procédé de stabilisation est également applicable aux centrales alimentées par des canaux à écoulement libre ; à chute égale, l'effet de stabilisation est même obtenu avec des variations encore plus réduites de la fréquence ou de la tension, car les variations d'ouverture de la turbine provoquent des écarts de pression plus réduits dans le canal d'aménée que dans la chambre d'équilibre.

<sup>1</sup> Voir bibliographie, p. 102.

Les numéros entre crochets que l'on rencontrera dans le texte se réfèrent à cette bibliographie.

Nous commencerons par examiner à l'aide du calcul opérationnel le cas général des ondes de translation de faible amplitude dans un canal à écoulement libre. Puis nous établirons la solution particulière valable pour le canal d'aménée d'une usine hydro-électrique et procéderons à la « transformation » de la solution pour les cas suivants :

Canal infiniment long ou de longueur finie,

Canal sans ou avec perte de charge.

Il en résultera la condition de stabilité mentionnée ci-dessus.

## II. Etude des ondes de translation de faible amplitude

### A. Etablissement des équations différentielles

Soit un canal de profil en travers constant, dans lequel se produit un écoulement « graduellement varié » (au sens de Boussinesq), et caractérisé par (fig. 1) :

$x$  : abscisse

$t$  : temps

$H(x, t)$  : hauteur du plan d'eau

$V(x, t)$  : vitesse moyenne dans une section donnée

$i(x, t)$  : pente de la ligne de charge

$J(x)$  : pente du fond.

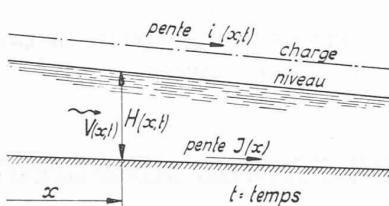


Fig. 1. — Ecoulement graduellement varié.

Si l'on considère un élément de longueur  $dx$  de ce canal, on peut écrire une équation de continuité et une équation dynamique, équations qui ont été établies en 1871 par Saint-Venant et qui sont applicables au cas des ondes de translation de faible amplitude :

Equation de continuité :

$$(1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(HV)}{\partial x} = 0.$$

Equation dynamique :

$$(2) \quad g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g(i - J) = 0.$$

Pour l'établissement de ces équations et l'examen des hypothèses qui leur servent de base, nous ne saurions mieux faire que de renvoyer le lecteur au remarquable ouvrage de M. le professeur H. Favre [2].

Nous admettrons que le régime initial est un écoulement graduellement varié permanent, caractérisé par  $H_o(x)$  et  $V_o(x)$  et que la pente  $i$  de la ligne de charge est égale à  $\zeta V^2$ . Les équations (1) et (2) relatives au régime initial sont alors :

$$(3) \quad \frac{\partial(H_o V_o)}{\partial x} = 0.$$

$$(4) \quad g \frac{\partial H_o}{\partial x} + V_o \frac{\partial V_o}{\partial x} + g(\zeta V_o^2 - J) = 0.$$

Nous voulons limiter cette étude au cas des ondes de faible amplitude et pouvons poser :

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta H(x, t) = H - H_o \\ \Delta V(x, t) = V - V_o \end{cases}$$

En introduisant ces relations (5) dans les équations de Saint-Venant (4) et (2), et en tenant compte du régime initial (3) et (4), nous obtenons, en négligeant le terme  $\Delta V \frac{\partial V_o}{\partial x}$  qui est d'un ordre inférieur :

$$(6) \quad \frac{\partial \Delta H}{\partial t} + H_o \frac{\partial \Delta V}{\partial x} + V_o \frac{\partial \Delta H}{\partial x} = 0.$$

$$(7) \quad g \frac{\partial \Delta H}{\partial x} + \frac{\partial \Delta V}{\partial t} + V_o \frac{\partial \Delta V}{\partial x} + 2g\zeta V_o \Delta V = 0.$$

Nous introduirons les *valeurs relatives* suivantes :

$$h = \frac{\Delta H}{H_o} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\Delta V}{V_o}$$

ainsi que les *paramètres* :

$$\alpha = g\zeta V_o = \text{facteur d'amortissement}$$

$$w = \sqrt{gH_o} = \text{célérité d'onde.}$$

Les équations deviennent finalement<sup>1</sup> :

$$(8) \quad \text{équation de continuité : } \frac{\partial h}{\partial t} + V_o \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0$$

$$(9) \quad \text{équation dynamique : } w^2 \frac{\partial h}{\partial x} + V_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_o^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2V_o \alpha \varphi = 0.$$

### B. Solution générale

Pour résoudre le système (8) (9) et séparer les variables, nous faisons usage du calcul symbolique ; en posant  $p = \frac{\partial}{\partial t}$ , nous obtenons un système d'équations différentielles aux dérivées totales par rapport à la seule variable  $x$  :

$$(10) \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{p}{V_o} h + \frac{dh}{dx}$$

$$(11) \quad - \frac{dh}{dx} = \frac{V_o}{w^2} p \varphi + \frac{2\alpha V_o}{w^2} \varphi + \frac{V_o^2}{w^2} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Nous supposerons — hypothèse acceptable en pratique — que  $V_o$  varie suffisamment peu le long du canal pour qu'on puisse considérer cette vitesse comme constante.

Dans ces conditions, et après dérivation des deux équations (10) et (11) par rapport à  $x$ , on obtient :

$$(12) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = + \frac{d^2h}{dx^2} + \frac{p}{V_o} \frac{dh}{dx}$$

$$(13) \quad w^2 \frac{d^2h}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} (p + 2\alpha) V_o + V_o^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0.$$

Nous éliminons  $\varphi$  en introduisant dans (13) les valeurs de  $d\varphi/dx$  et  $d^2\varphi/dx^2$  tirées de (10) et (12), d'où :

$$(14) \quad \frac{d^2h}{dx^2} (V_o^2 - w^2) + \frac{dh}{dx} 2V_o(p + \alpha) + hp(p + 2\alpha) = 0$$

<sup>1</sup> On pourrait obtenir des équations sans dimension en utilisant d'autres valeurs relatives ; le nombre des paramètres serait réduit de trois à deux, mais la signification physique des équations devient plus difficile à saisir et nous avons estimé préférable de renoncer à cette simplification de la forme.

équation dont l'équation caractéristique est :

$$(15) \quad q^2(V_o^2 - w^2) + q 2V_o(p + \alpha) + p(p + 2\alpha) = 0.$$

On en tire :

$$q = \frac{-V_o(p + \alpha) \pm \sqrt{V_o^2(p + \alpha)^2 - (V_o^2 - w^2)(p + 2\alpha)p}}{V_o^2 - w^2}.$$

En développant l'expression figurant sous le radical, et en y négligeant le terme  $\alpha^2 \frac{V_o^2}{w^2}$  qui est voisin de zéro, on trouve

$$q \cong \frac{-V_o(p + \alpha) \pm wp \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{p}}}{V_o^2 - w^2}.$$

Nous remplaçons  $\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{p}}$  par  $1 + \frac{\alpha}{p}$ , ce qui est admissible en première approximation puisque  $\alpha \ll 1$ , et obtenons, tous calculs faits :

$$(16) \quad q \cong \frac{(p + \alpha)(-V_o \pm w)}{V_o^2 - w^2} \quad \text{d'où :}$$

$$q_1 \cong -\frac{p + \alpha}{w + V_o} \quad q_2 \cong \frac{p + \alpha}{w - V_o}.$$

Il est connu [11] que la solution générale d'un tel système d'équations est de la forme :

$$(17) \quad h = A e^{-\frac{x(p+\alpha)}{w+V_o}} + B e^{\frac{x(p+\alpha)}{w-V_o}}$$

$$\nu = \frac{A}{\beta} e^{-\frac{x(p+\alpha)}{w+V_o}} - \frac{B}{\beta} e^{\frac{x(p+\alpha)}{w-V_o}}$$

avec  $\beta = \sqrt{p \frac{V_o}{w^2} + \frac{2\alpha V_o}{w^2}} = \frac{V_o}{w} \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{p}} \cong \frac{V_o}{w} \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)$

$\beta$  = paramètre sans dimension, caractéristique du canal.

Nous établirons immédiatement les équations analogues valables lorsque l'abscisse  $x$  croît dans le sens inverse du courant ; en effet, ce sont ces équations-là que nous utiliserons par la suite. Il suffit de changer  $x$  en  $-x$  et  $\nu$  en  $-\nu$  :

$$(18) \quad h = A e^{\frac{x(p+\alpha)}{w+V_o}} + B e^{-\frac{x(p+\alpha)}{w-V_o}}$$

$$(19) \quad \nu = -\frac{A}{\beta} e^{\frac{x(p+\alpha)}{w+V_o}} + \frac{B}{\beta} e^{-\frac{x(p+\alpha)}{w-V_o}}$$

$\beta$  ne change pas de valeur.

### C. Détermination des conditions aux limites dans le cas du canal d'aménée d'une usine hydroélectrique

#### 1. Conditions à la limite aval du canal

Soient  $h_1$  et  $\nu_1$  les valeurs de  $h$  et  $\nu$  à l'extrémité aval du canal ; nous allons montrer que l'on peut établir, des relations de la forme

$$(20) \quad h_1 = -\beta_1 \nu_1 + \mu$$

où  $\beta_1$  est une constante dans un cas donné, et  $\mu$  le terme perturbateur (constante s'il s'agit d'une variation unitaire instantanée).

Nous examinerons successivement les trois cas de réglage suivants : à ouverture donnée, à puissance donnée, à puissance dépendante du niveau d'eau.

Soit  $H_o$  la hauteur de chute en régime permanent (fig. 2) ; le paramètre caractérisant la chute sera

$$(21) \quad \varepsilon = \frac{H_o}{\mathcal{X}_o} \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta H}{\mathcal{X}_o} = \varepsilon h.$$

$\varepsilon$  est généralement inférieur à l'unité.

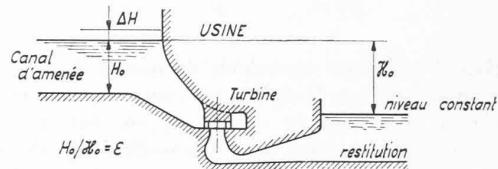


Fig. 2. — Extrémité aval du canal d'aménée.

#### a) Réglage à ouverture donnée

Admettons qu'à partir d'une valeur  $M_o$  l'ouverture varie suivant une loi donnée  $M(t)$ <sup>1</sup>.

Sachant que le débit à travers le vannage est proportionnel d'une part à la vitesse  $V_1$  dans le canal, d'autre part au produit de l'ouverture  $M$  par la racine carrée de la chute, nous pouvons écrire<sup>2</sup> :

$$(22) \quad \frac{V_1}{V_o} = \frac{M}{M_o} \sqrt{\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}_o}}.$$

Soient  $V_1 = V_o - \Delta V_1$ ,  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_o + \Delta H$ ,  $M = M_o + \Delta M$  et  $m = \Delta M/M_o$  ; l'équation (22) devient

$$1 - \nu_1 = (1 + m) \sqrt{1 + \varepsilon h_1} \cong 1 + m + \frac{\varepsilon h_1}{2}.$$

Cette relation est bien de la forme (20) avec

$$(23) \quad \beta_1 = \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{2m}{\varepsilon}.$$

#### b) Réglage à puissance donnée

Soit  $N_o$  la puissance initiale débitée par le groupe, puissance qui varie ensuite selon une loi  $N(t)$ . On peut écrire :

<sup>1</sup> En principe, les variations de  $M$  restent limitées de manière que l'on ne sorte pas du domaine des ondes de faible amplitude ; en fait, cette condition n'est pas très limitative puisque même une fermeture totale ne provoque généralement pas en ce qui concerne la hauteur du plan d'eau du canal, des ondes d'une amplitude telle que les équations (18) et (19) ne soient pas applicables, au moins approximativement.

<sup>2</sup> On néglige ici tout effet d'inertie des masses d'eau dans l'adduction de la turbine (coup de bâlier), ce qui est justifié par la faible longueur de cette adduction.

<sup>3</sup> Dans le cas général où l'on connaît les courbes caractéristiques du débit en fonction d'une part de la chute à ouverture constante, d'autre part de l'ouverture à chute constante (fig. 3), on trouve les valeurs suivantes des coefficients :

$$\beta_1 = \frac{1}{\varepsilon \operatorname{tg} \varphi_1} \quad \mu = -m \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1}.$$

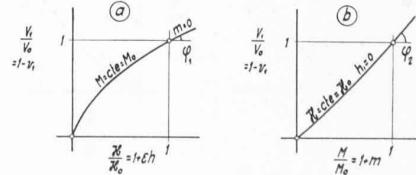


Fig. 3. — Courbes caractéristiques du groupe.

- a) Débit en fonction de la chute, à ouverture constante.
- b) Débit en fonction de l'ouverture, à chute constante.

$$(24) \quad \frac{N}{N_o} = \frac{Q \cdot \alpha}{Q_o \cdot N_o} \quad \text{où } Q = \text{débit.}$$

En posant  $\Delta N/N_o = n$ , et en remarquant que

$\Delta Q/Q_o = -v_1$ , la relation (24) s'écrit

$$1 + n = (1 - v_1)(1 + \epsilon h_1) \simeq 1 + \epsilon h_1 - v_1$$

d'où les valeurs des coefficients :

$$(25) \quad \beta_1 = \frac{1}{\epsilon} \quad \mu = \frac{n}{\epsilon}.$$

### c) Réglage à puissance dépendante du niveau d'eau

Nous admettons que le réglage est conçu de manière qu'une surélévation  $\Delta H$  dans le canal ( $\epsilon h_1$  en valeur relative) entraîne une augmentation proportionnelle  $K \cdot \epsilon h_1$  de la puissance demandée par le réseau ; ceci peut être réalisé, par exemple, par une modification de la tension ou de la fréquence de consigne. La puissance est ainsi asservie au niveau d'eau et vaut  $1 + n + K \epsilon h_1$  où  $K$  est le facteur d'asservissement [9]. La puissance de la turbine étant égale à  $1 + \epsilon h_1 - v_1$ , on a :

$$(26) \quad n + K \epsilon h_1 = \epsilon h_1 - v_1$$

d'où

$$(27) \quad \boxed{\beta_1 = -\frac{1}{\epsilon(1-K)} \quad \mu = \frac{n}{\epsilon(1-K)}}.$$

En examinant les valeurs des coefficients  $\beta_1$  et  $\mu$  dans les trois cas (relations 23, 25 et 27), on constate que les deux premiers constituent des cas particuliers du troisième dans lesquels :

<sup>1</sup> Nous avons admis implicitement que le réglage de la vitesse était astatique et qu'il agissait d'une manière infiniment rapide par rapport aux variations du plan d'eau du canal. Si toutefois on veut tenir compte de l'effet du réglage de vitesse, on peut partir de l'identité suivante :

$$n = \frac{\Delta N}{N_o} = \frac{\partial N/N_o}{\partial \omega/\omega_o} \frac{\Delta \omega}{\omega_o} + \frac{\partial N/N_o}{\partial K/K_o} \frac{\Delta K}{K_o}$$

où  $\omega$  = pulsation et  $K$  = impédance de charge.

Si l'on suppose connues les courbes caractéristiques de la puissance de la turbine (fig. 4), on voit que

$$n = \frac{\Delta \omega}{\omega_o} \operatorname{tg} \psi_1 + \frac{\Delta K}{K_o} \operatorname{tg} \psi_2.$$

Si  $\delta$  est le statisme du groupe, on aura  $\frac{\Delta \omega}{\omega_o} = -\delta \frac{\Delta Q}{Q_o} = v_1 \delta$ .

Nous trouvons donc finalement, en posant  $\Delta K/K_o = k$

$$\beta_1 = -\frac{1 + \delta \operatorname{tg} \psi_1}{\epsilon} \quad \mu = \frac{k}{\epsilon} \operatorname{tg} \psi_2.$$

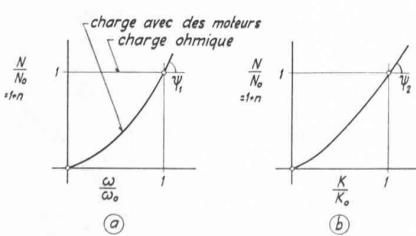


Fig. 4. — Courbes caractéristiques du réseau.

- a) Puissance en fonction de la fréquence, à impédance constante.  
b) Puissance en fonction de l'impédance, à fréquence constante.

$K = 1,5$  pour un réglage à ouverture constante  
 $K = 0$  pour un réglage à puissance constante.

On verrait facilement que l'on a :

$K = 1$  pour un réglage à débit constant.

### 2. Condition à la limite amont du canal

Soient  $h_2$  et  $v_2$  les valeurs de  $h$  et  $v$  à l'extrémité amont du canal ; nous poserons d'une manière générale

$$(28) \quad h_2 = \beta_2 v_2.$$

Si nous supposons que le canal débouche à l'amont dans un bassin à niveau constant, il en résulte  $h_2 \equiv 0$ , donc  $\beta_2 = 0$ . C'est le cas pour lequel les ondes remontant le canal se réfléchissent en changeant de signe<sup>1</sup>.

La réflexion sans changement de signe que l'on obtiendrait en imposant une vitesse  $v_2$  nulle à l'amont, conduit à  $\beta_2 = \infty$ . On se trouve dans ces conditions lorsque l'extrémité amont du canal est fermée par un mur. C'est le cas, par exemple, pour l'épanouissement d'une chambre d'équilibre.

### D. Solution particulière dans le cas envisagé

En introduisant dans les équations (18) et (19) les valeurs correspondant à l'extrémité amont du canal ( $x = l$ ,  $h = h_2$ ,  $v = v_2$ ), on obtient deux équations d'où l'on tire  $A$  et  $B$  :

$$(29) \quad \begin{cases} A = \frac{h_2 - \beta v_2}{2} e^{-\frac{l(p+\alpha)}{w-V_o}} \\ B = \frac{h_2 + \beta v_2}{2} e^{\frac{l(p+\alpha)}{w-V_o}} \end{cases}$$

Après élimination de  $A$  et  $B$  des équations (18) et (19), l'onde de translation est définie par deux relations ;

$$(30) \quad h = h(h_2, v_2) \quad \text{et} \quad v = v(h_2, v_2).$$

Or, nous désirons obtenir :

$$(31) \quad h = h(\beta_1, \beta_2, \mu) \quad \text{et} \quad v = v(\beta_1, \beta_2, \mu).$$

Il faut donc calculer

$$(32) \quad h_2 = h_2(\beta_1, \beta_2, \mu) \quad \text{et} \quad v_2 = v_2(\beta_1, \beta_2, \mu)$$

pour passer de (30) à (31)<sup>2</sup>.

Nous poserons

$$\rho_1 = \frac{\beta_1 - \beta}{\beta_1 + \beta} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{\beta_2 - \beta}{\beta_2 + \beta}, \quad \text{facteurs de réflexion de}$$

l'onde de translation en aval et en amont,

et  $T = \frac{l}{w+V_o} + \frac{l}{w-V_o}$ , temps mis par l'onde pour parcourir le canal aller et retour.

<sup>1</sup> C'est de l'onde de pression qu'il s'agit ; l'onde de vitesse se réfléchit au contraire sans changer de signe.

<sup>2</sup> Le calcul peut être conduit de la manière suivante : dans les équations (30) on introduit les valeurs aval, d'où  $h_1 = h_1(h_2, v_2)$  et  $v_1 = v_1(h_2, v_2)$  ; on y élimine  $h_2$  tiré de (28) d'où  $h_1 = h_1(\beta_2, v_2)$  et  $v_1 = v_1(\beta_2, v_2)$ .

On peut éliminer  $v_1$  de cette deuxième équation en le tirant de (20), d'où  $h_1 = h_1(\beta_1 \beta_2, \mu, v_2)$  qui peut être combiné avec  $h_1 = h_1(\beta_2, v_2)$  ci-dessus pour éliminer  $h_1$ . On obtient ainsi  $v_2 = v_2(\beta_1, \beta_2, \mu)$  et  $h_2 = \beta_2 v_2$  cherchés :

$$v_2 = \mu \cdot \left\{ e^{\frac{l(p+\alpha)}{w-V_o}} \left[ \frac{\beta_2 + \beta}{2} \left( 1 + \frac{\beta_1}{\beta} \right) \right] + e^{-\frac{l(p+\alpha)}{w+V_o}} \left[ \frac{\beta_2 - \beta}{2} \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta} \right) \right] \right\}.$$

On obtient, tous calculs faits :

$$(33) \quad h = \frac{\mu\beta}{\beta + \beta_1} \cdot \frac{e^{-\frac{x(p+\alpha)}{w-V_o}} + \rho_2 e^{-\left(T-\frac{x}{w+V_o}\right)(p+\alpha)}}{1 - \rho_1 \rho_2 e^{-T(p+\alpha)}}.$$

$$(34) \quad v = \frac{\mu}{\beta + \beta_1} \cdot \frac{-\frac{x(p+\alpha)}{w-V_o} - \rho_2 e^{-\left(T-\frac{x}{w+V_o}\right)(p+\alpha)}}{1 - \rho_1 \rho_2 e^{-T(p+\alpha)}}.$$

Ces expressions peuvent être développées en série, en tenant compte du fait que

$$\frac{1}{1 - \rho_1 \rho_2 e^{-T(p+\alpha)}} \approx 1 + \rho_1 \rho_2 e^{-T(p+\alpha)} + (\rho_1 \rho_2)^2 e^{-2T(p+\alpha)} + \dots$$

Nous ne le ferons que pour  $h$  définis par l'équation (33), ce qui donne :

$$(35) \quad h = \frac{\mu\beta}{\beta + \beta_1} \left[ e^{-\frac{x(p+\alpha)}{w-V_o}} + \rho_2 e^{-\left(T-\frac{x}{w+V_o}\right)(p+\alpha)} + \rho_1 \rho_2 e^{-\left(\frac{x}{w-V_o}\right)(p+\alpha)} + \rho_1 \rho_2^2 e^{-\left(2T-\frac{x}{w+V_o}\right)(p+\alpha)} + (\rho_1 \rho_2)^2 e^{-\left(2T+\frac{x}{w-V_o}\right)(p+\alpha)} + \dots + (\rho_1 \rho_2)^r e^{-\left(rT+\frac{x}{w-V_o}\right)(p+\alpha)} + (\rho_1 \rho_2)^r \rho_2 e^{-\left((r+1)T-\frac{x}{w+V_o}\right)(p+\alpha)} \right].$$

Cette équation représente une onde qui va et vient dans le canal, se propageant à la vitesse  $(w - V_o)$  quand elle remonte le canal et  $(w + V_o)$  quand elle descend, onde qui est multipliée par le facteur  $\rho_1$  à chaque réflexion à l'extrémité aval du canal et par  $\rho_2$  à chaque réflexion à l'amont.

### III. Détermination de l'onde de translation résultant d'une variation de la charge de la centrale

#### A. Canal infiniment long

La valeur de  $h$  développée en série (éq. 35) se réduit à son premier terme :

$$(36) \quad h = \frac{\mu\beta}{\beta + \beta_1} e^{-\frac{x(p+\alpha)}{w-V_o}}.$$

Avant de traiter le cas général du canal avec pertes de charge, nous examinerons un cas plus simple.

##### 1. Canal sans pertes de charge

Le paramètre caractéristique du canal vaut dans ce cas  $\beta = V_o/w$  (éq. 17). D'autre part, le réglage à ouverture constante conduit à

$$\beta_1 = 2/\epsilon \quad \text{et} \quad \mu = -2m/\epsilon \quad (\text{éq. 23})$$

où  $m$  est la variation brusque de l'ouverture relative. L'équation de l'onde (36) devient

$$h = -\frac{m}{\frac{w}{V_o} + \frac{\epsilon}{2}} e^{-p \frac{x}{w-V_o}}.$$

On sait que le facteur  $e^{-pt}$  correspond à un décalage  $t$  dans le temps (théorème du retard). En effectuant la transformation inverse de la fonction ci-dessus, on obtient donc :

$$(37) \quad h(x_1 t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \frac{x}{w-V_o} \\ -\frac{m}{\frac{w}{V_o} + \frac{\epsilon}{2}} & \text{pour } t > \frac{x}{w-V_o}. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une onde à front raide, se déplaçant vers l'amont à la vitesse  $w - V_o$ , ainsi que le montre la figure 5a. L'effet de la hauteur de chute est faible, car  $w$  est plus grand que  $V_o$  et  $\epsilon$  généralement inférieur à l'unité (application numérique, voir sous 3 ci-après). Il est aisément d'obtenir cette solution par des méthodes plus simples ; ce premier cas n'a donc qu'une valeur de contrôle.

Il convient toutefois de faire quelques remarques sur la portée physique de la solution mathématique. L'expérience montre que l'on n'obtient réellement des ondes à front raide que lorsqu'il s'agit d'ondes positives ( $m < 0$ ) ; lorsque l'onde est négative, il n'y a pas de front d'onde caractérisé. D'autre part, le front d'onde des ondes positives se déforme rapidement en une succession d'ondulations, dont la forme tend à être trochoïdale ; les belles expériences de M. le professeur Favre<sup>1</sup> montrent que la ligne moyenne de l'ondulation correspond à la valeur du calcul.

Néanmoins, dans le cas que nous étudions ici d'ondes de translation de faible amplitude, et pour examiner les conditions de stabilité du réglage, nous pensons que les résultats fournis par l'analyse donnent une image suffisamment exacte de la réalité pour ne pas entacher les conclusions d'une erreur importante.

#### 2. Canal avec pertes de charge

Nous avons vu que les cas de réglage à ouverture constante et à puissance constante peuvent être considérés comme des cas particuliers du réglage à puissance dépendante du niveau ; c'est donc ce troisième cas que nous envisagerons seul :

$$\beta_1 = -1/\epsilon(1-K) \quad \text{et} \quad \mu = n/\epsilon(1-K). \quad (\text{éq. 27})$$

L'équation (36) s'écrit après quelques calculs :

$$(38) \quad h = \frac{n}{\epsilon(1-K)} \left[ \frac{1}{pT_\alpha + 1} + \frac{\frac{pT_\alpha}{w}}{1 - \frac{\epsilon V_o(1-K)}{pT_\alpha + 1}} \right] e^{-pT_x} e^{-\alpha T_x}$$

où les paramètres  $T_\alpha = \frac{1}{\alpha} \left[ 1 - \frac{w}{\epsilon V_o(1-K)} \right]$  et  $T_x = \frac{x}{w-V_o}$  sont tous deux des temps.

Le calcul de  $h$  peut se faire à l'aide des transformations de Laplace. Les transformations suivantes sont connues :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + pT_\alpha} &\rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{T_\alpha}} \\ \frac{pT_\alpha}{1 + pT_\alpha} &\rightarrow e^{-\frac{t}{T_\alpha}}. \end{aligned}$$

On en tire la valeur de  $h$  :

<sup>1</sup> Voir [2]. On y trouvera également la valeur de la surélévation maximum des ondulations en fonction de la valeur obtenue par le calcul.

(39)

$$h_n(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < T_x \\ \frac{1}{\epsilon(1-K)} - \left[ \frac{1}{\epsilon(1-K)} - \frac{1}{\epsilon(1-K) - \frac{\omega}{V_o}} \right] e^{-\frac{t}{T_\alpha}} & \text{pour } t > T_x \end{cases} e^{-\alpha T_x}$$

$$\approx \frac{1}{\epsilon(1-K)} \left\{ 1 + (1-K) \frac{\epsilon V_o}{\omega} e^{-\frac{t}{T_\alpha}} \right\} e^{-\alpha T_x} \text{ pour } t > T_x.$$

Pour  $K = 1$ , la relation ci-dessus n'est pas applicable, et l'on trouve :

$$h_n(x,p) = -\frac{V_o}{\omega} e^{-\alpha T_x} \left( 1 + \frac{\alpha}{p} \right) e^{-p T_x} \quad \text{d'où}$$

$$(40) \quad h(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < T_x \\ -\frac{V_o}{\omega} e^{-\alpha T_x} (1 + \alpha t) & \text{pour } t > T_x \end{cases} \quad K = 1.$$

Le facteur  $e^{-\alpha T_x}$  est une constante en un point donné du canal ; il vaut 1 à l'extrémité aval. Les équations (39) et (40) montrent que le mouvement du plan d'eau en un point donné du canal est apériodique : il est *apériodique amorti* si  $T_\alpha$  est positif, c'est-à-dire si :

$$\frac{\omega}{\epsilon V_o (1-K)} < 1$$

$$(41) \quad \text{ou encore si} \quad K < 1 - \frac{\omega}{\epsilon V_o} \quad \text{ou} \quad K > 1.$$

Le mouvement est apériodique amplifié si  $T_\alpha$  est négatif, c'est-à-dire si :

$$1 - \frac{\omega}{\epsilon V_o} < K < 1.$$

Dans le cas du réglage à puissance constante, pour lequel  $K = 0$ , il y a donc instabilité si  $\frac{\omega}{\epsilon V_o} > 1$ , ce qui est généralement le cas. Mais en asservissant la puissance au niveau d'eau, la stabilité pourra toujours être obtenue, à condition de choisir un coefficient d'asservissement  $K$  supérieur à l'unité<sup>1</sup>.

Ce phénomène d'instabilité paraît avoir échappé à l'observation ; cela provient probablement du fait que la constante de temps  $T_\alpha$  est très élevée (de l'ordre de quelques heures). L'instabilité n'a pas le temps de se développer suffisamment avant que les conditions d'ouverture soient modifiées.

### 3. Application numérique

Supposons un canal d'aménée de section rectangulaire (largeur 5,0 m, profondeur 2,5 m) débitant 6,25 m<sup>3</sup>/sec. avec une vitesse de 0,5 m/sec. Le coefficient de rugosité de Strickler est admis égal à 50 et la chute est de 10 m.

On trouve immédiatement :

célérité d'onde  $\omega = 4,95$  m/sec.

pente de la ligne de charge  $i = 7,5 \cdot 10^{-5}$

facteur d'amortissement  $\alpha = 1,46 \cdot 10^{-3}$

paramètre caractérisant la chute  $\epsilon = 0,25$ .

<sup>1</sup> Il est curieux de constater que le réglage à puissance constante est stable dans le cas de très faibles chutes, une augmentation de puissance étant alors obtenue par une réduction du débit et une montée du niveau d'eau dans le canal, et non l'inverse. Le réglage est au contraire instable pour les hautes chutes.

Dans le cas d'une variation brusque de l'ouverture, les pertes de charge étant nulles, l'équation (37) donne la surélévation  $h$  consécutive à une variation brusque de l'ouverture :

$$h = -0,0998 \text{ m pour } t > \frac{x}{4,45}.$$

Avec pertes de charge, on trouve, par l'équation (39) et avec  $K = 1,5$ ,

$$h = -m [8,00 - 7,9 \cdot e^{-1,82 \cdot 10^{-5} t}] e^{-3,28 \cdot 10^{-4} x}.$$

La figure 5 montre quelle est, à différentes époques, la ligne d'eau consécutive à une diminution d'ouverture de 20 %. Dans le cas avec perte de charge, le niveau monte lentement devant l'usine jusqu'au moment où l'augmentation de la charge permet l'évacuation du débit par la nouvelle ouverture réduite.

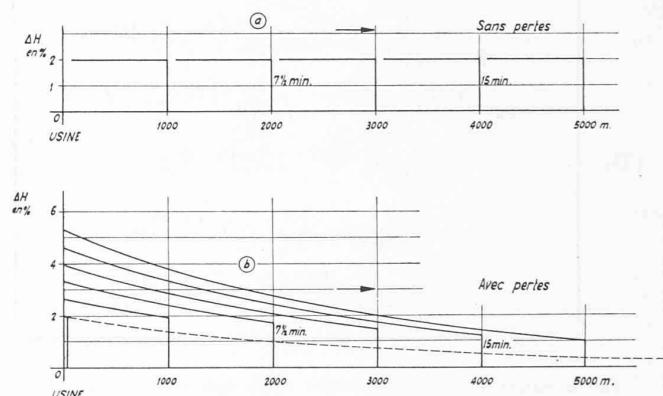


Fig. 5. — Application numérique. Canal infiniment long.  
Surélévation produite à un instant donné, en fonction de l'abscisse par une diminution de l'ouverture de 20 %.  
a) Sans pertes de charge dans le canal.  
b) Avec pertes.

La figure 6 montre quelle est la surélévation devant l'usine, en fonction du temps, pour une fermeture de 20 % et avec réglage à puissance dépendant de la pression. On y vérifie qu'il n'y a stabilité que si  $K > 1$ , ainsi que l'indique la deuxième condition (41). (La première condition conduit, avec les données admises, à  $K < -40$  dont la réalisation n'est pas possible.)

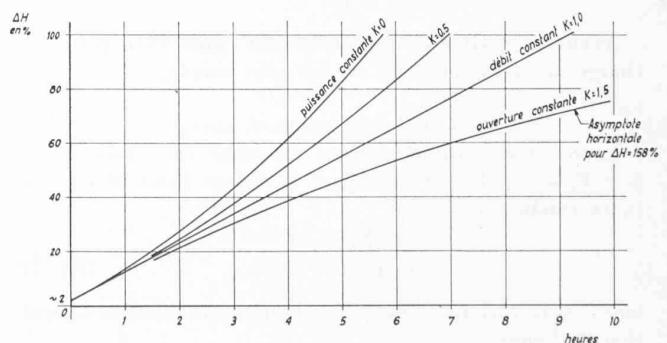


Fig. 6. — Application numérique. Canal infiniment long.  
Surélévation produite à l'extrême aval, en fonction du temps, pour différents modes de réglage, à la suite d'une réduction de puissance de 20 %.

### B. Canal de longueur finie

Nous avons vu que si le canal communique à l'amont avec un bassin à niveau constant,  $\beta_2 = 0$ ; dans ce cas, le coefficient de réflexion  $\rho_2$  vaut  $-1$ .

Nous nous limiterons dans ce qui suit à la détermination de la surélévation  $h$  du niveau de l'eau à l'extrémité aval du canal, devant l'usine. La relation (35) devient :

$$(42) \quad h = \frac{\mu\beta}{\beta + \beta_1} [1 - (1 + \rho_1)e^{-T(p+\alpha)} + \rho_1(1 + \rho_1)e^{-2T(p+\alpha)} - \dots].$$

#### 1. Canal sans pertes de charge

$$\beta = \frac{V_o}{\omega} \quad \alpha = 0.$$

Les facteurs  $e^{-pT}$ ,  $e^{-2pT}$ ... correspondent à un décalage dans le temps de  $T$ ,  $2T$ ....

Dans le cas général du réglage dépendant de la pression on trouve :

$$\frac{\mu\beta}{\beta + \beta_1} = \frac{-n}{\frac{\omega}{V_o} - \epsilon(1-K)} \approx -n \frac{V_o}{\omega} \left[ 1 + \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right]$$

$$\rho_1 = \frac{\frac{\omega}{V_o} + \epsilon(1-K)}{\frac{\omega}{V_o} - \epsilon(1-K)} \approx 1 + \frac{2\epsilon V_o}{\omega} (1-K).$$

Il en résulte les valeurs suivantes de la surélévation du niveau de l'eau en admettant une variation de la charge  $n$  selon une impulsion rectangulaire

$$\text{pour } 0 < t < T, \quad \frac{h}{n} = -\frac{V_o}{\omega} \left[ 1 + \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right]$$

$$\text{pour } T < t < 2T, \quad \frac{h}{n} = -\frac{V_o}{\omega} \left[ 1 + \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right] \left[ -1 - \frac{2V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right]$$

$$\text{pour } rT < t < (r+1)T, \quad \frac{h}{n} = -\frac{V_o}{\omega} \left[ 1 + \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right] \left[ -1 - \frac{2V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right]^r$$

ou encore :

(43)

$$\text{pour } rT < t < (r+1)T, \quad \frac{h}{n} \approx \frac{V_o}{\omega} \left[ 1 + (2r+1) \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right] (-1)^{r+1}.$$

Il se propage donc une onde de translation de forme rectangulaire, qui peut s'amortir ou s'amplifier selon que  $\rho_1$  est inférieur ou supérieur à l'unité. On en déduit que l'onde ira en s'amortissant si

(44)

$$K > 1$$

C'est en particulier le cas si l'ouverture est constante ( $K = 1,5$ ), tandis qu'il y a amplification si la puissance est constante ( $K = 0$ ).

Les conditions vont être un peu modifiées par l'introduction des pertes de charge.

#### 2. Canal avec pertes de charge

La relation (42) est encore valable ; on trouve

$$\frac{\mu\beta}{\beta + \beta_1} \approx -n \frac{V_o}{\omega} \left( 1 + \frac{\alpha}{p} \right) \left[ 1 + \frac{V_o}{\omega} \left( 1 + \frac{\alpha}{p} \right) \epsilon(1-K) \right]$$

$$\text{et} \quad \rho_1 \approx 1 + \frac{2V_o}{\omega} \left( 1 + \frac{\alpha}{p} \right) \epsilon(1-K).$$

Pour  $0 < t < T$ , seul le premier terme de la fonction (42) doit être pris en considération ; nous retombons sur le cas déjà résolu ci-dessus pour le canal infiniment long (voir A.2). La solution est donnée par l'équation (39), que nous simplifierons légèrement en constatant que  $\frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K)$  est très petit devant l'unité et en négligeant les termes d'ordre supérieur. On obtient :

$$\text{pour } 0 < t < T, \quad \frac{h_1}{n}(t) = \frac{1}{\epsilon(1-K)} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right] e^{-\frac{t}{T_\alpha}} \right\}.$$

Pour  $T < t < 2T$ , les deux premiers termes de la relation (42) interviennent. On voit, après transformation, que

$$\text{pour } T < t < 2T, \quad \frac{h_2}{n}(t) = \frac{h_1}{n}(t) - e^{-\alpha T} 2 \left[ 1 + \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right] h_1(t-T) - e^{-\alpha T} \frac{2V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \alpha \int_T^t \frac{h_1}{n}(t-T) dt.$$

Le calcul de l'intégrale n'est pas difficile à exécuter, et l'on peut établir la formule de récurrence suivante :

$$(45) \quad \begin{aligned} \text{pour } iT < t < (i+1)T \\ \frac{h_{i+1}}{n}(t) = \frac{h_i}{n}(t) + (-1)^i e^{\alpha(iT)} \\ 2 \left( \left[ 1 + (2i-1) \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right] \frac{1}{\epsilon(1-K)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ 1 - \left[ 1 + \frac{V_o}{\omega} \epsilon(1-K) \right] e^{-\frac{t-iT}{T_\alpha}} \right] + (2i-1) \frac{V_o}{\omega} \alpha(t-iT) - \right. \\ \left. - (2i-1) \frac{1}{\epsilon(1-K)} e^{-\frac{t-2iT}{T_\alpha}} \right). \end{aligned}$$

On peut ainsi déterminer de proche en proche les ondes successives.

Les conditions de stabilité se déterminent de la façon la plus commode en considérant l'expression de  $h$  écrite sous forme symbolique. Il est connu que pour qu'une telle expression corresponde à une fonction qui soit différente de  $\infty$  pour  $t = \infty$ , il faut et il suffit que la partie réelle des racines de son dénominateur  $D(p)$  soit négative, Soit :

$$D(p) = (\beta + \beta_1) [1 + \rho_1 e^{-(p+\alpha)T}] = 0$$

l'équation qui permet de calculer les valeurs de  $p$  qui annulent le dénominateur, avec :

$$\beta_1 = -\frac{1}{\epsilon(1-K)} \quad \beta = \frac{V_o}{\omega} \left( 1 + \frac{\alpha}{p} \right)$$

$$\rho_1 = \frac{\beta_1 - \beta}{\beta_1 + \beta}.$$

La détermination des conditions de stabilité conduit à la résolution d'une équation transcendante comportant une infinité de solutions. Elle s'effectue le plus commodément par voie graphique en faisant usage des critères de Nyquist ou de Leonhard, selon la forme que l'on donne à  $D(p)$ . Pour ce faire, il faut poser  $p = j\omega$  avec  $j = \sqrt{-1}$  dans l'expression  $D(p)$ , construire points par points, en donnant différentes valeurs à  $\omega$ , la courbe de Nyquist ou de Leonhard qui en résulte, et étudier la position de cette courbe par rapport au

point  $(+1, j0)$  pour la courbe de Nyquist, et à l'origine pour la courbe de Leonhard.

$$D(j\omega) = \left[ -\frac{1}{\epsilon(1-K)} + \frac{V_o}{\omega} \left( 1 + \frac{\alpha}{j\omega} \right) \right].$$

$$(46) \quad \cdot \left\{ 1 + \left[ \begin{array}{l} \frac{V_o}{\omega} \left( 1 + \frac{\alpha}{j\omega} \right) + \frac{1}{\epsilon(1-K)} \\ 1 + \frac{V_o}{\omega} \left( 1 + \frac{\alpha}{j\omega} \right) - \frac{1}{\epsilon(1-K)} \end{array} \right] e^{-T(j\omega + \alpha)} \right\}.$$

Cette détermination graphique n'offre pas de difficulté dès que les valeurs numériques des différents paramètres sont connues. Cependant, cette méthode se prête mal à une discussion générale des résultats, aussi pouvons-nous nous contenter d'une première approximation basée sur les considérations suivantes :

Le premier facteur de cette expression correspond au cas du canal infiniment long que nous avons déjà étudié. Nous savons que le plan d'eau est stable si  $K > 1$ ; mais l'instabilité apériodique qui apparaît si cette condition n'est pas remplie, est si lente qu'elle ne tire pas à conséquence.

Le deuxième facteur a la forme suivante, puisque

$$\frac{V_o}{\omega} \epsilon (1-K) \left( 1 + \frac{\alpha}{j\omega} \right) \ll 1$$

$$1 + \rho_1 e^{-(j\omega + \alpha)T} \simeq 1 + \left[ 1 + 2 \frac{V_o}{\omega} (1-K) \epsilon \left( 1 + \frac{\alpha}{j\omega} \right) \right] e^{-(j\omega + \alpha)T}.$$

Pour que la condition de stabilité soit satisfaite, il faut que la partie réelle de l'expression comprise dans la parenthèse soit plus petite que 1, à savoir :

$$(47) \quad \boxed{\left[ 1 + 2 \frac{V_o}{\omega} (1-K) \epsilon \right] e^{-\alpha T} < 1.}$$

La signification physique de cette expression est simple : lors d'un aller et retour d'une onde le long du canal, il faut que son amortissement soit supérieur à l'amplification produite par le réglage lors de sa réflexion à l'extrémité aval du canal.

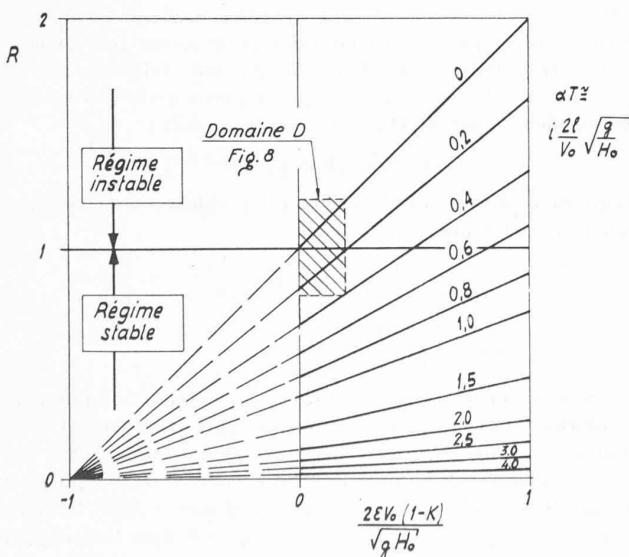


Fig. 7. — Canal de longueur finie.  
Stabilité du réglage.

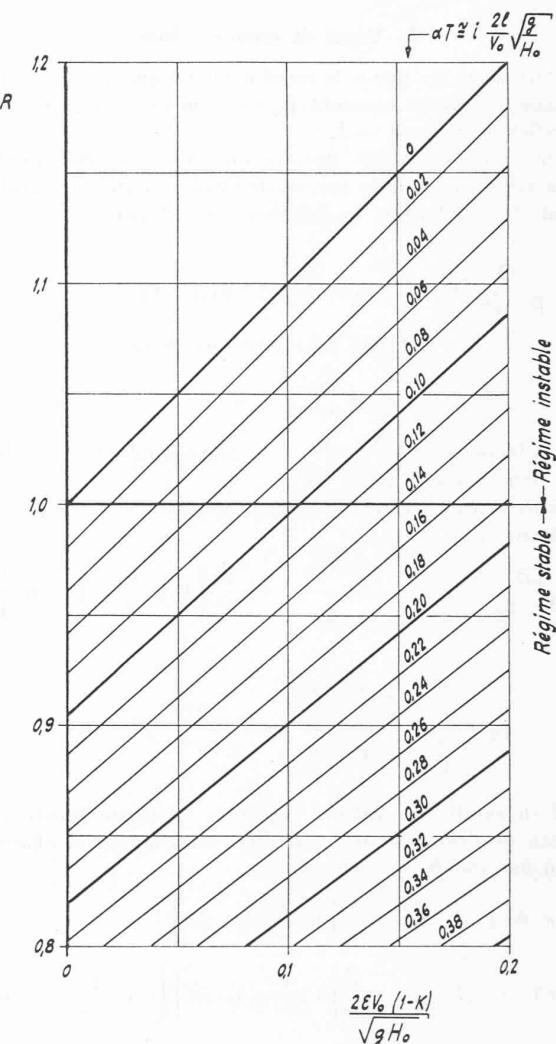


Fig. 8. — Canal de longueur finie.  
Stabilité du réglage. Domaine des cas usuels.

Il est facile de voir que si  $\alpha$  est nul, cette condition (47) se réduit bien à la condition (44) obtenue précédemment.

Les valeurs des maxima des ondes qui se succèdent dans le canal forment une suite qui peut être assimilée à une progression géométrique. Le premier membre de l'inéquation (47) en est alors la raison  $R$  :

$$(48) \quad R = \left[ 1 + 2 \frac{V_o}{\omega} (1-K) \epsilon \right] e^{-\alpha T}.$$

dont le graphique de la figure 7 permet la détermination rapide dans un cas donné. La figure 8 n'est que l'agrandissement du domaine  $D$  du graphique précédent, domaine dans lequel se trouvent plus particulièrement les cas réels.

Des relations (47) et (48), il ressort que le risque d'instabilité est d'autant plus grand que le canal est court, la profondeur faible (élévéité  $\omega$  faible), les frottements restreints, la vitesse d'écoulement élevée et la chute réduite. Un asservissement  $K$  de la puissance assure la stabilisation du réglage. Avec  $K = 1$ , le réglage est stable quelles que soient les valeurs des autres paramètres.

### 3. Application numérique

Nous considérons le même canal que précédemment (largeur : 5,0 m, profondeur : 2,5 m, débit : 6,25 m<sup>3</sup>/sec.), mais de longueur limitée à 100 m. Le temps  $T$  qu'une onde met pour parcourir ce canal aller et retour est de 40 secondes.

Supposons tout d'abord que les pertes de charge sont nulles ( $\alpha = 0$ ). Avec la même chute de 10 m que précédemment ( $\epsilon = 0,25$ ) la relation (48) nous donne  $R = 1,05 - \frac{K}{20}$ .

Avec ouverture constante,  $R = 0,975$ , l'oscillation est légèrement amortie ; par contre, avec un réglage à puissance constante,  $R = 1,05$  et l'oscillation est amplifiée. Les deux courbes de la figure 9 montrent quelles sont les variations de niveau devant l'usine consécutives à une brusque réduction de 20 % de l'ouverture ou de la puissance. Dans le second cas, la surélévation double en moins de 10 minutes.

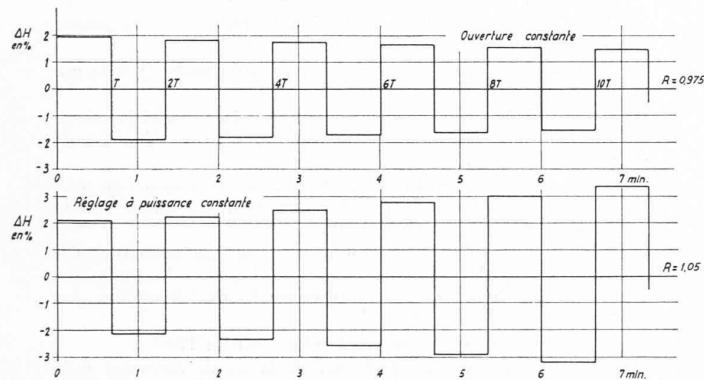


Fig. 9. — Application numérique. Canal de longueur finie. Surélévation consécutive à une réduction de puissance de 20 %, sans tenir compte des pertes de charge dans le canal.

La stabilité de marche est améliorée lorsque l'on tient compte des pertes de charge. La relation (48) nous donne pour  $\alpha = 1,46 \cdot 10^{-3}$ ,  $R = 0,92$  pour ouverture constante et  $R = 0,99$  pour réglage à puissance constante. L'oscillation qui est nettement amortie lorsque l'ouverture est constante, est presque entretenue si la puissance reste invariable (fig. 10).

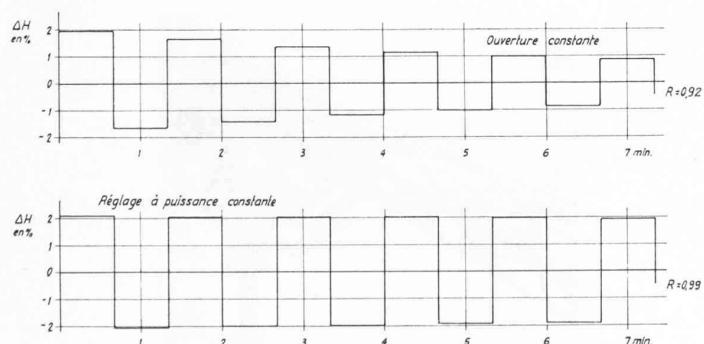


Fig. 10. — Application numérique. Canal de longueur finie. Surélévation consécutive à une réduction de puissance de 20 %, en tenant compte des pertes de charge dans le canal.

On remarquera que l'on peut améliorer considérablement la stabilité de marche par un asservissement même léger de la puissance au niveau. Ainsi, dans le cas envisagé ci-dessus, on peut obtenir pour la marche à puissance constante l'amor-

tissement correspondant à l'ouverture constante avec un coefficient d'asservissement  $K$  de 0,075. Dans ces conditions, une variation de niveau de 1 m entraînerait un écart de puissance de 0,75 %. Avec les dimensions admises, une telle variation de niveau serait exceptionnelle. Néanmoins, en agissant sur le réglage de la tension, on peut admettre [9] que l'écart de tension résultant ne dépasserait pas 0,3 à 0,4 % et serait donc insignifiant.

### IV. Conclusion

L'emploi du calcul opérationnel dans l'étude des ondes de translation de faible amplitude qui se propagent dans les canaux à écoulement libre permet d'obtenir une solution analytique générale, compte tenu de l'effet des pertes de charge.

Dans le cas du canal d'aménée d'une usine hydro-électrique, on peut établir les conditions aux limites amont et aval et établir la solution particulière, sous forme opérationnelle. Dans la condition à la limite aval (côté usine) intervient le type de réglage : à ouverture constante, à puissance constante, ou à puissance dépendante du niveau dans le canal. Les deux premiers types peuvent être considérés comme des cas particuliers du troisième.

En envisageant des ondes de translation dues à des variations brusques de l'ouverture ou de la puissance, nous avons procédé à la transformation opérateur temps des fonctions obtenues (transformation inverse de Laplace). On obtient ainsi la valeur de la surélévation dans le canal en fonction du temps et du lieu.

Ce calcul a été fait d'abord pour un canal infiniment long, sans ou avec pertes de charge. Le problème est alors simplifié par l'absence de réflexion à l'extrémité amont<sup>1</sup>. On constate néanmoins une possibilité d'instabilité du réglage : si le coefficient  $K$  d'asservissement est inférieur à l'unité — ce qui est le cas pour un réglage à puissance constante ( $K = 0$ ) — le niveau dans le canal, devant l'usine, tend à s'élever ou s'abaisser en un mouvement apériodique amplifié. Cette instabilité n'est en général pas importante parce que très lente.

Nous avons envisagé ensuite un canal de longueur limitée, sans ou avec pertes de charge et avons tenu compte des réflexions d'ondes se produisant aux deux extrémités du

<sup>1</sup> A titre de contrôle expérimental, on peut appliquer les résultats des calculs qui précèdent à certaines des expériences très précises faites par M. le professeur Favre dans un chenal de 60 m de longueur et de 42 cm de largeur (expériences dont les résultats ont d'ailleurs été vérifiés avec une excellente précision par les calculs détaillés de M. Favre).

Nous avons fait ce contrôle pour les ondes positives d'aval (série 6, exp. 50, 52 et 54, p. 148) provoquées par une fermeture totale instantanée de la vanne aval. Il faut relever que ce cas de fermeture totale sort du domaine des manœuvres de faible amplitude pour lequel les résultats analytiques obtenus ici sont valables. Néanmoins la comparaison des résultats analytiques et expérimentaux est satisfaisante, ainsi que le montre le tableau ci-dessous :

Exp.	Débit initial $Q_0$	Prof. initiale $H_0$	Vitesse de propagation		Surélévation à l'extrémité aval		Ecart	
			calculée	mesurée	calculée	mesurée	absolu	relatif
50	18,6	173	13,0	12,3	34,0	35,4	1,1	3 %
52	21,3	220	14,7	13,9	34,5	35,6	1,1	3 %
54	24,3	278	16,5	15,6	35,0	35,9	0,9	3 %
	dm <sup>3</sup> /s	mm	dm/s	dm/s	mm	mm	mm	mm

Cette bonne approximation peut s'expliquer : si les écarts de la vitesse sont importants et sortent des hypothèses du calcul, les écarts de la hauteur du plan d'eau restent de faible amplitude, même en cas de fermeture totale.

La méthode de calcul que nous indiquons peut d'ailleurs être perfectionnée pour être applicable au cas où les variations ne sont pas de faible importance, mais cette extension sort du cadre de notre exposé.

canal. Dans ce cas également, on constate qu'une instabilité du réglage est possible, tout à fait analogue à celle du réglage de vitesse sous l'effet du coup de bâlier, mais avec une période beaucoup plus lente. Nous avons donc établi une condition de stabilité qui est le pendant, pour les usines avec canal d'aménée à écoulement libre, de la condition de Thoma pour les usines alimentées par une galerie sous pression avec chambre d'équilibre. Cette condition de stabilité n'est applicable — comme celle de Thoma — que si l'usine alimente un réseau isolé.

Ainsi que nous l'avons proposé pour des usines munies de chambre d'équilibre, la stabilité peut être améliorée par un asservissement temporaire de la puissance débitée par l'usine au niveau à l'aval du canal ou, selon le procédé proposé par MM. Gaden et Borel, par un asservissement de la puissance à la course du vannage [12]. L'asservissement peut être aisément obtenu en agissant sur le réglage de la tension ou de la fréquence ; nous avons montré dans une précédente étude [9] que les variations de tension ou de fréquence qui en résultent sont très faibles et admissibles, étant donné leur caractère temporaire et limité au cas — généralement peu fréquent — de la marche sur réseau isolé.

Le but de la présente étude est donc de donner, grâce à l'emploi du calcul opérationnel, une solution analytique générale du problème des ondes de translation dues à des manœuvres de faible amplitude du vannage. Cette solution permet d'examiner la stabilité du réglage d'une usine hydro-électrique alimentée par un canal à écoulement libre et d'établir la condition à satisfaire pour éviter une instabilité. Comme pour les usines ayant une adduction sous charge, avec chambre d'équilibre, on peut réaliser une stabilisation du réglage par asservissement de la puissance au niveau dans le canal.

#### Adresses des auteurs :

M. Cuénod, ingénieur à la Société Ofinco, 2, Tertasse, Genève.  
A. Gardel, ingénieur, av. Warnery 14, Lausanne.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. CALAME : *Calcul de l'onde de translation dans les canaux d'usines*. Ed. La Concorde, Lausanne 1932.
2. H. FAVRE : *Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts*. Ed. Dunod, Paris 1935.
3. H.-M. HENRY : *Propagation d'une intumescence dans un canal découvert*. Revue générale d'électricité, 1938, N° 19 et 20.  
— *Sur les perturbations susceptibles de se propager à une vitesse uniforme dans un canal découvert*. Revue générale d'électricité, 1939, N° 29.
4. A. CRAYA : *Calcul graphique des régimes variables dans les canaux*. La Houille Blanche, novembre 1945.
5. G. SUPINO : *Sur la propagation des ondes dans les canaux découverts*. Revue générale d'électricité, 1938, N° 29.
6. B. FINZI : *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. L'Energia Elettrica, aprile 1950, N° 4.
7. G. SUPINO : *La propagazione delle onde nei canali*. L'Energia Elettrica, aprile 1950, N° 4.
8. E. BRAUN : *Über die Stabilität des Betriebes einer Turbinenanlage mit offenen Werkkanälen*. Festschrift der Techn. Hochschule Stuttgart, 1929.
9. M. CUÉNOD et A. GARDEL : *Stabilisation des oscillations du plan d'eau des chambres d'équilibre*. Bulletin technique de la Suisse romande, 12 août 1950.
10. DE SAINT-VENANT : *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit*. Compte rendu de l'Académie des Sciences du 17 juillet 1871.
11. K. W. WAGNER : *Operatorenrechnung*, Leipzig 1940.
12. D. GADEN et L. BOREL : *Influence de la loi de variation de la puissance sur la condition de stabilité de Thoma*. Bulletin technique de la Suisse romande, 4 mai 1951.

## DIVERS

### Dispositifs de sécurité pour grues pivotantes

par ARTHUR NYFFELER, ingénieur EPUL

L'ordonnance du Conseil fédéral, du 22 juin 1951, « concernant les mesures destinées à prévenir des accidents dans l'emploi de grues et d'engins de levage » (ordonnance SUVAL) prévoit notamment qu'avant fin 1956, toutes les grues pivotantes devront être munies de dispositifs déterminés en vue d'assurer les mouvements de levage et de translation. Nous avions, en effet, attiré l'attention des milieux intéressés sur cette question dans un article publié en 1947<sup>1</sup>.

Pour éviter tout accident lors du levage de la charge, il est prescrit que la grue doit être munie d'un *interrupteur de fin de course de levage* (voir fig. 1). Ce dernier est monté à la pointe de la flèche ; il consiste en un dispositif mobile de contact, en fer cornière, et en un interrupteur de courant. Si, par mégarde, le crochet de suspension des charges est amené trop haut et entre en contact avec la partie inférieure de l'extrémité de la flèche, le dispositif mobile de contact se déclenche et coupe le courant. Le courant d'alimentation pour le moteur de levage étant interrompu, l'appareil de levage s'arrête avant qu'il se produise un dommage. Grâce à un dispositif de pontage, le conducteur de la grue peut remettre l'appareil de levage en mouvement. Lorsque la

position de la flèche doit être modifiée, on procède de manière analogue.

La dite ordonnance prescrit, en outre, que chaque grue doit être pourvue d'un *dispositif de sécurité pour les cas de surcharge*. Tout le treuil de levage est fixé de façon élastique à l'ossature au moyen de ressorts, de manière qu'en cas de surcharge il s'éloigne de l'ossature et que le moteur de levage s'arrête ; une autre solution consiste à munir le treuil d'une

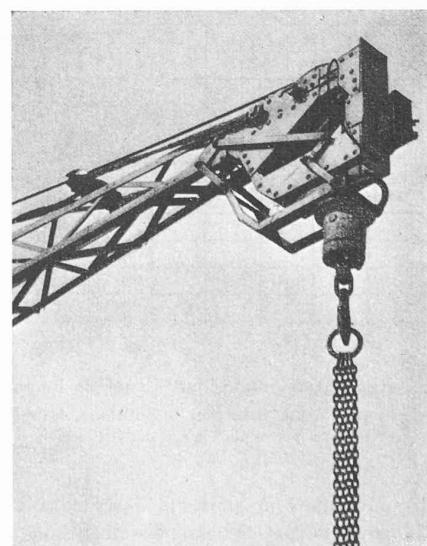


Fig. 1.

<sup>1</sup> Voir A. Nyffeler, « Sicherungs-Vorrichtungen an Baukränen ». Schweiz. Bauzeitung, vol. 65, 1947, N° 15.