

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | Bulletin technique de la Suisse romande   |
| <b>Band:</b>        | 78 (1952)   |
| <b>Heft:</b>        | 21  |
| <br>                |   |
| <b>Artikel:</b>     | Quelques applications de séries à des problèmes de stabilité élastique                |
| <b>Autor:</b>       | Klitchieff, J.M.  |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-59007">https://doi.org/10.5169/seals-59007</a> |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

|   |
|---|
| <b>Abonnements :</b>  |
| Suisse : 1 an, 24 francs  |
| Etranger : 28 francs  |
| Pour sociétaires :  |
| Suisse : 1 an, 20 francs  |
| Etranger : 25 francs  |
| Pour les abonnements s'adresser à :   |
| Administration du « Bulletin technique de la Suisse romande » Librairie Rouge & Cie S. A., Lausanne |
| Compte de chèques postaux II. 5775, à Lausanne  |
| Prix du numéro : Fr. 1.40   |

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Société vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne ; Secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg : MM. P. Joye, professeur ; † E. Latelatin, architecte — Vaud : MM. P. Chenaux, ingénieur ; H. Matti, ingénieur ; E. d'Okolski, architecte ; Ch. Thévenaz, architecte — Genève : MM. L. Archinard, ingénieur ; Cl. Grosgrain, architecte ; E. Martin, architecte ; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel : MM. J. Béguin, architecte ; R. Guye, ingénieur — Valais : MM. J. Dubuis, ingénieur ; D. Burgener, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 478, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique : A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte ; R. Neeser, ingénieur.

|   |
|---|
| <b>Tarif des annonces</b>               |
| Le millimètre (larg. 47 mm) 24 cts      |
| Réclames : 60 cts le mm (largeur 95 mm) |
| Rabais pour annonces répétées           |
| Annonces Suisses S.A.                   |



5 Rue Centrale, Tél. 223326<sup>2</sup>  
Lausanne et succursales

**SOMMAIRE :** Quelques applications de séries à des problèmes de stabilité élastique, par J. M. KLITCHIEFF, professeur à l'Ecole polytechnique de Belgrade. — L'usine hydroélectrique de Rheinau. — NÉCROLOGIE : Jean Pronier, ingénieur. — LES CONGRÈS : Journées de la productivité du Centre Suisse de la Productivité. — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES.

## QUELQUES APPLICATIONS DE SÉRIES À DES PROBLÈMES DE STABILITÉ ÉLASTIQUE

par J. M. KLITCHIEFF, professeur à l'Ecole polytechnique de Belgrade<sup>1</sup>

### 1. Flambage d'une barre comprimée reposant sur appuis élastiques

Considérons d'abord comme exemple simple le cas d'une barre reposant librement sur quatre appuis également espacés. Dans le cas de supports *absolument rigides*, la barre comprimée (fig. 1) flambe de façon telle qu'il y a un point d'inflexion sur chaque point d'appui. Chaque travée est alors dans la condition d'une barre avec extrémités articulées et de longueur  $l/3$ . La valeur critique de la force de compression est donnée, dans ce cas, par la formule bien connue d'Euler

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/3)^2},$$

dans laquelle  $E$  est le module d'élasticité de la barre à la tension et  $I$  le moment d'inertie de la section transversale.

Supposons maintenant que les appuis intermédiaires sont élastiques et d'élasticité égale. Dans ce cas, si la barre flambe, la courbe élastique prend une des formes des figures 1, 2 ou 3, selon la rigidité des appuis intermédiaires.

Il est parfois nécessaire de choisir la rigidité des supports intermédiaires, de manière qu'ils ne fléchissent pas si la poutre vient à flamber, et qu'ils soient, par suite, équivalents à des supports absolument rigides.

<sup>1</sup> Adaptation à la publication d'une conférence, donnée le 13 juin 1952, à l'Institut de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne.



Fig. 1.

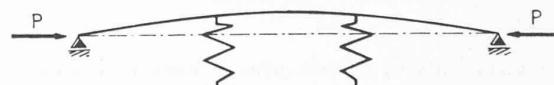


Fig. 2.



Fig. 3.

Ce problème a été étudié pour la première fois par mon professeur J. G. Boobnov, et les résultats de ses recherches sont donnés dans le livre bien connu de S. Timoshenko sur la « Stabilité élastique ». M. Boobnov a exprimé en termes finis la flexion (fig. 4) d'une poutre soumise à l'action combinée des réactions  $R_1, \dots, R_{m-1}$  et de la compression  $P$ . En égalant la flexion des appuis à la flexion de la poutre aux points des appuis il est arrivé à un système de  $(m-1)$  équations linéaires et homogènes en  $R_1, \dots, R_{m-1}$ . En éga-

lant à zéro le déterminant de ce système, il a obtenu une équation du degré  $m-1$ . Si la force de compression est donnée, la plus petite des solutions de cette équation représente la constante d'élasticité des appuis qui est nécessaire.

La méthode employée par M. Boobnov oblige chaque fois à développer un déterminant de l'ordre égal au nombre des appuis intermédiaires, ce qui conduit à des calculs numériques fatigants. M. Boobnov a fait ces calculs pour différents nombres d'appuis intermédiaires allant jusqu'à onze. L'application des séries trigonométriques, comme je l'ai démontré dans un article publié par le « Quart. Journ. Mech. and Applied Math. » en 1949, conduit à une solution générale et très simple, valable pour un nombre quelconque des appuis.

Soit  $R_i$  la pression exercée par l'appui n°  $i$  (fig. 4) sur la barre flambée. Le moment de flexion qu'elle produit,  $M_i$  (fig. 5), comme on le sait, peut se donner sous forme d'une série trigonométrique.

$$M_i = -\frac{2}{\pi^2} R_i l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi \frac{i}{m} \sin n\pi \frac{x}{l}.$$

Désignons par  $\alpha$  la constante élastique des supports, c'est-à-dire la flexion d'un support produite par l'unité de charge, et par  $u_i$  la flexion du support n°  $i$ .

On a alors

$$R_i = \frac{u_i}{\alpha}$$

et

$$M_i = -\frac{2}{\pi^2} \frac{l}{\alpha} u_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi \frac{i}{m} \sin n\pi \frac{x}{l},$$

et le moment de flexion produit par les pressions de tous les appuis intermédiaires est

$$M = -\frac{2}{\pi^2} \frac{l}{\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} u_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi \frac{i}{m} \sin n\pi \frac{x}{l}.$$

Le moment de flexion produit par la force de compression  $P$  est

$$M' = Pu.$$

Ici  $u$  désigne l'ordonnée de la courbe élastique de la poutre ; elle peut être donnée sous forme de série

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi \frac{x}{l},$$

où les coefficients  $C_n$  restent pour le moment indéfinis. On a alors

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi \frac{i}{m}.$$

En introduisant les expressions obtenues dans l'équation différentielle de la ligne élastique

$$-EI \frac{d^2u}{dx^2} = M + M',$$

on obtient

$$\begin{aligned} EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_n \sin n\pi \frac{x}{l} &= P \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi \frac{x}{l} - \\ &- \frac{2}{\pi^2} \frac{l}{\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k\pi \frac{i}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi \frac{i}{m} \sin n\pi \frac{x}{l}, \end{aligned}$$

et

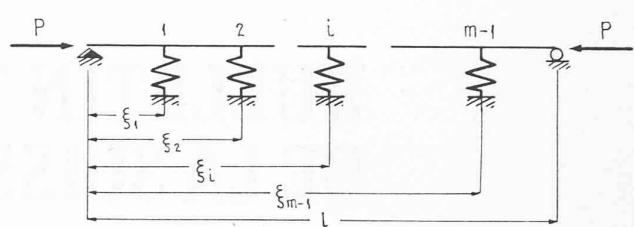


Fig. 4.

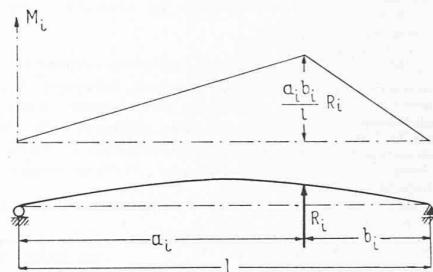


Fig. 5.

$$C_n n^2 \left( n^2 - \frac{P l^2}{\pi^2 E I \alpha} \right) + \frac{1}{\pi^4 E I \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[ 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sin n\pi \frac{i}{m} \sin k\pi \frac{i}{m} \right] = 0.$$

Pour les valeurs de  $n$  qui sont des nombres multiples de  $m$  la somme désignée par  $K(n, k)$  est égale à zéro, et on obtient pour ces valeurs des équations indépendantes

$$\lambda^2 = j^2 m^2, \quad j = 1, 2 \dots$$

déterminant les valeurs de la force critique qui correspondent aux appuis intermédiaires absolument rigides. La plus petite de ces forces ( $j=1$ ) est déterminée par

$$\lambda^2 = m^2. \quad (1)$$

Pour celles des valeurs de  $n$  qui ne sont pas des nombres multiples de  $m$ , la valeur de  $K$  est égale à

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left[ \cos \frac{\pi i}{m} (k-n) - \cos \frac{\pi i}{m} (k+n) \right]$$

et en appliquant l'expression connue de la somme d'un polynôme trigonométrique

$$\sum_{i=1}^{m-1} \cos i\theta = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(m-\frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$

on peut prouver que  $K$  est égal à  $\pm m$  pour  $k = |n \pm 2jm|$  et qu'il est égal à zéro pour toutes autres valeurs de  $k$ . On obtient alors, pour les valeurs de  $n$  qui ne sont pas multiples de  $m$ , un système d'équations homogènes

$$G n^2 (n^2 - \lambda^2) C_n + \frac{ml^3}{\pi^4 E I \alpha} \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{|2jm+n|} = 0. \quad (2)$$

En égalant à zéro le déterminant de ce système, j'ai obtenu la relation qui existe entre  $\lambda^2$  et  $G$ , c'est-à-dire entre la force critique  $P$  et la constante élastique des supports  $\alpha$ . Après la publication de l'article, mon jeune collègue M. Tomić a attiré mon attention sur la possibilité d'éliminer les inconnues  $C_n$  d'une manière plus simple que celle exposée ici.

En remplaçant  $n$  par  $2jm + n$  dans l'équation (2) on a

$$(n + 2jm)^2 [(n + 2jm)^2 - \lambda^2] C_n \pm G \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{|n+2jm|} = 0 \quad (3)$$

et les équations (2) et (3) permettent d'exprimer

$$C_{|n+2jm|} = \pm C_n \frac{n^2 (n^2 - \lambda^2)}{(2jm + n)^2 [(n + 2jm)^2 - \lambda^2]}$$

et d'obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{|n+2jm|} = \\ & = C_n n^2 (n^2 - \lambda^2) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2jm + n)^2 [(2jm + n)^2 - \lambda^2]}. \end{aligned}$$

Quand on introduit cette expression dans l'équation (2) on arrive directement à l'équation

$$1 + G \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2jm + n)^2 [(2jm + n)^2 - \lambda^2]} = 0. \quad (4)$$

Si la rigidité des appuis intermédiaires doit être choisie de manière qu'ils soient équivalents à des supports absolument rigides, la force critique doit être égale à celle donnée par l'équation (1) et il faut remplacer  $\lambda^2$  par  $m^2$  dans l'équation (4). C'est sous cette forme que j'ai publié cette équation pour la première fois. En ne retenant que le premier terme de la série, j'ai obtenu des résultats qui sont en bon accord avec les résultats calculés par M. Boobnov.

Dans une de ses conférences à l'Institut mathématique de Belgrade, M. Karamata a indiqué une méthode de sommation de séries que je vais appliquer ici. En développant le terme général de la série (4) en fractions simples

$$(2jm + n)^{-2} [(2jm + n)^2 - m^2]^{-1} = \frac{1}{2m^3} \left\{ (2jm + n + m)^{-1} - (2jm + n - m)^{-1} \right\} - m^{-2} (2jm + n)^{-2}$$

on la réduit à des séries connues

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2j\pi + \theta} = \cot \theta, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2j\pi + \theta)^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

et après quelques transformations élémentaires on obtient la somme de la série en question

$$-\frac{\pi^2}{m^4} \frac{1}{2 \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{m} \right)}$$

et alors

$$a = \frac{1}{2 \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{m} \right)} \frac{l^3}{\pi^2 m^3 EI}$$

Les valeurs de  $n$  multiples de  $m$  étant exclues, la valeur minimale de  $a$  correspond à  $n = m \pm 1$ , et on arrive à une formule très simple :

$$a = \frac{1}{2 \left( 1 + \cos \frac{\pi}{m} \right)} \frac{l^3}{m^3 \pi^2 EI}$$

Quand  $m \rightarrow \infty$ , le facteur  $\frac{1}{2(1 + \cos \pi/m)} \rightarrow \frac{1}{4}$ , ce que M. Boobnov a prévu en se basant seulement sur les résultats numériques qu'il a obtenus.

## 2. Flambage des plaques renforcées par des nervures

Le poids d'un navire et la poussée de l'eau ne sont jamais distribués le long du bâtiment de la même façon. Par mer agitée les efforts provenant du roulis et du tangage correspondent à de nouvelles forces. Suivant la position relative de la houle et du navire, celui-ci peut, à certains moments, se trouver suspendu à ses deux extrémités sur deux lames (fig. 6), le milieu n'étant plus soutenu, ou au contraire reposer



Fig. 6.



Fig. 7.

sur une seule lame, l'avant et l'arrière (fig. 7) se trouvant en porte-à-faux. On est donc conduit à considérer le navire comme une poutre creuse (un caisson), reposant tantôt sur deux appuis situés aux extrémités, et tantôt sur un seul, au milieu de la longueur. Le plus souvent, la position dangereuse est celle qui est représentée par la figure 6, quand le tablier le plus faible de la poutre, c'est-à-dire le pont supérieur du navire, est comprimé. La partie du pont limitée par le bordé de la muraille et deux cloisons transversales voisines (fig. 8) se trouve alors dans les conditions d'une plaque rectangulaire appuyée le long du contour, comprimée par des forces longitudinales d'intensité  $p$  distribuées uniformément le long des côtés et renforcée par  $m-1$  nervures transversales égales et équidistantes.

La rigidité des nervures doit être choisie de manière qu'elles ne fléchissent pas si la plaque vient à flamber, c'est-à-dire qu'elles soient équivalentes à des supports absolument rigides. Ce problème a été étudié pour la première fois par S. Timoshenko, mais par la méthode appliquée par lui on ne peut résoudre le problème que pour un nombre de nervures très limité.

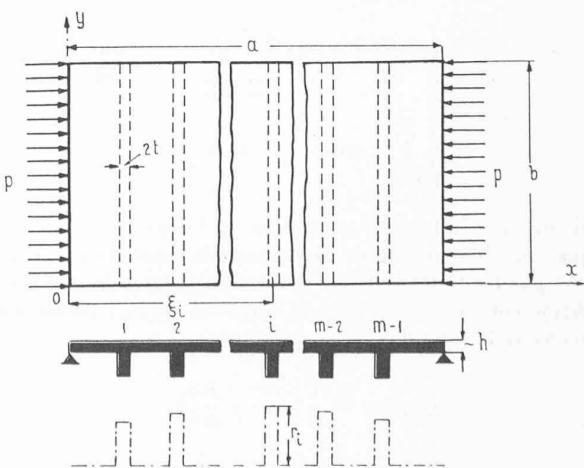


Fig. 8.

Après des calculs numériques considérables, il a établi les valeurs des rigidités nécessaires pour les cas d'une et de trois nervures, tandis que dans les constructions navales, ce nombre en général dépasse dix. L'application des séries, comme on le verra, donne la solution générale du problème sous une forme fort simple.

Désignons par  $r_i$  l'intensité par unité de la surface de contact de la pression exercée par la plaque sur la nervure  $n^o i$  à une distance  $y$  de son appui et par  $2t$  la largeur de la nervure. L'équation différentielle de la courbe élastique de la nervure peut être écrite comme suit :

$$EI \frac{d^4 w_i}{dy^4} = -2tr_i.$$

L'intensité de la pression exercée par toutes les nervures sur la plaque par unité de surface de cette dernière est alors représentée par la série

$$q = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{m-1} r_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\pi \frac{i}{m} \sin k\pi \frac{t}{a} \sin k\pi \frac{x}{a}.$$

La surface élastique de la plaque déformée peut être représentée par une série

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{ns} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}.$$

On peut supposer, sans que cela diminue la généralité des conclusions, que la flexion des nervures et, par conséquence, le flambage de la plaque dans la direction de  $y$ , s'effectue suivant une demi-onde, ce qui permet de poser  $s=1$  et de supprimer le second indice des coefficients. Alors

$$w = \sin \frac{\pi y}{b} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (5)$$

$$w_i = \sin \frac{\pi y}{b} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi i}{m},$$

et on a

$$r_i = -\pi^4 \frac{EI}{2t b^4} \sin \frac{\pi y}{b} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi i}{m},$$

et

$$q = - \begin{cases} \frac{2\pi^3 EI}{tb^4} \sin \frac{\pi y}{b} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi i}{m} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\pi \frac{i}{m} \sin k\pi \frac{t}{a} \sin k\pi \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Si on introduit cette expression et l'expression (5) dans l'équation différentielle de la surface élastique d'une plaque fléchie par l'action combinée d'une charge latérale répartie  $q$  et d'une compression  $p$  dans la direction de  $x$ , répartie uniformément le long des côtés  $x=0$  et  $x=a$

$$\Delta_1 \Delta_1 w = \frac{1}{D} \left( q - p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

et remplace  $\frac{\sin k\pi t/a}{k\pi t/a}$  par 1,  $k$  par  $n$  et  $n$  par  $k$  réciproquement, on obtient

$$C_n \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \pi^4 + \frac{\pi^4 EI}{Dab^4} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \boxed{2 \sum_{i=1}^{m-1} \sin k\pi \frac{i}{m} \sin n\pi \frac{i}{m}} = \frac{p \pi^2}{D a^2} n^2 C_n.$$

En procédant de la même manière qu'au chapitre 1, on arrive à la conclusion que pour les valeurs de  $n=jm$  on obtient

$$\left( j^2 m^2 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 = j^2 m^2 \boxed{\frac{pa^2}{\pi^4 D}},$$

ce qui détermine les pressions critiques correspondantes à des nervures absolument rigides. En désignant par  $c=a/m$  l'écartement des nervures on a

$$\lambda^2 = m^2 \left( j + \frac{c^2}{j b^2} \right)^2.$$

Dans les constructions navales, on a toujours  $c < b\sqrt{2}$ , par conséquence la plus petite valeur de  $\lambda^2$  correspond à  $j=1$

$$\lambda^2 = m^2 \left( 1 + \frac{c^2}{b^2} \right)^2.$$

Pour les valeurs de  $n$  qui ne sont pas de multiples de  $m$  on obtient comme dans 1

$$C_n \left[ \left( n^2 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - n^2 \lambda^2 \right] + \boxed{\frac{EI}{Db} \left( \frac{a}{b} \right)^3 m} \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{|2jm+n|} = 0$$

et en éliminant les  $C_n$  par le même procédé

$$1 + G \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ (2jm+n)^2 + \frac{a^2}{b^2} \right]^2 - (2jm+n)^2 \lambda^2 \right\}^{-1} = 0.$$

C'est la forme sous laquelle j'ai publié l'équation en 1948 dans le *Journ. of Appl. Mech.* et elle m'a suffi pour en tirer des conclusions pratiques en ne conservant que le premier terme de la série. Mais en procédant comme dans 1, on peut obtenir la somme de cette série et pour la valeur de  $\lambda^2$  obtenue ci-dessus on a l'expression

$$\frac{EI}{Db} = -\frac{2}{\pi} \left[ 1 - \left( \frac{c}{b} \right)^4 \right] \frac{\cos \frac{n\pi}{m} - \cos \pi \frac{c^2}{b^2}}{\frac{c}{b} \sin \pi \frac{c^2}{b^2}},$$

dont la valeur maximale correspond à  $n=m \pm 1$  et on obtient pour les navires en acier ( $E = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>)

$$I \geq 0,036 b^4 \left( \frac{h}{c} \right)^3.$$

Le même raisonnement peut être appliqué à l'étude du flambage d'une plaque renforcée par des nervures longitudinales, c'est le système de construction des navires de M. Isherwood. J'ai publié le résultat dans le même journal, en 1951 :

$$\frac{EI}{Db} \geq \frac{4}{\pi} \frac{a}{b} \left( 1 + \frac{a^2}{c^2} \right) \sqrt{2 + \frac{a^2}{c^2}}.$$