

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 78 (1952)
Heft: 1

Artikel: Étude des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable: cas d'une force appliquée au centre
Autor: Favre, Henry / Chabloz, Éric
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58980>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; E. Latelin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; A. Paris, ingénieur; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. L. Archinard, ingénieur; Cl. Grosgrin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; G. Furter, ingénieur; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Caste postale Chauderon 476, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique: A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

Abonnements:

Suisse: 1 an, 24 francs
Etranger: 28 francs

Pour sociétaires:

Suisse: 1 an, 20 francs
Etranger: 25 francs

Pour les abonnements
s'adresser à:

Administration
du « Bulletin technique
de la Suisse romande »
Librairie Rouge & Cie
S. A., Lausanne

Compte de chèques pos-
taux II. 5775, à Lausanne

Prix du numéro: Fr. 1.40

Tarif des annonces

Le millimètre
(larg. 47 mm) 20 cts

Réclames: 60 cts le mm
(largeur 95 mm)

Rabais pour annonces
répétées

Annonces Suisses S.A.



5 Rue Centrale. Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

SOMMAIRE: *Etude des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable. Cas d'une force appliquée au centre*, par HENRY FAVRE et ERIC CHABLOZ. — *Le développement actuel des aménagements hydroélectriques en France*. — BIBLIOGRAPHIE. — LES CONGRÈS: *Conférence internationale de l'abrasion et de l'usure*; *VIII^e congrès international de mécanique théorique et appliquée*. — SERVICE DE PLACEMENT. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES.

ÉTUDE DES PLAQUES CIRCULAIRES FLÉCHIES D'ÉPAISSEUR LINÉAIREMENT VARIABLE

Cas d'une force appliquée au centre

par HENRY FAVRE¹ et ÉRIC CHABLOZ²

Introduction

La flexion des *plaques circulaires d'épaisseur linéairement variable*³ a été récemment l'objet de diverses recherches théoriques. D. Conway a tout d'abord étudié plusieurs cas où la partie déformable de la plaque comprend un seul domaine annulaire, dans lequel l'épaisseur h est proportionnelle à la distance r d'un point au centre (fig. 1)⁴. L'un des deux auteurs du présent mémoire a ensuite traité les quatre cas précisés dans la figure 2, où la plaque est formée d'une partie centrale d'épaisseur constante et d'une partie annulaire où h est proportionnel à r ⁵. Enfin, les deux auteurs ont étudié ensemble les cas 1 et 2 de la figure 3, où l'épaisseur h est une fonction linéaire quelconque de la distance r ⁶. Dans le premier de ces

deux cas, la plaque est encastree, à surcharge uniformément répartie; dans le second, elle est posée le long du contour et supporte également une surcharge uniforme.

L'objet du présent mémoire est l'étude des cas 3 et 4 de la même figure. Ils sont analogues aux deux premiers, mais la surcharge y est appliquée au centre au lieu d'être uniformément répartie.

Après avoir établi l'équation différentielle du problème (§ 1), nous intégrerons cette équation, en supposant tout d'abord la plaque encastree le long du contour (§ 2), puis en l'admettant posée (§ 4). Dans les paragraphes 3 et 5, nous calculerons les déformations et les tensions correspondant à ces deux sortes d'appuis.

¹ Professeur de mécanique à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich.

² Assistant de mécanique à l'E. P. F.

³ Nous supposons essentiellement que les plaques considérées dans ce mémoire sont des corps de révolution et que les forces appliquées accusent elles-mêmes une symétrie de révolution autour de l'axe de la plaque.

⁴ D. CONWAY, *The Bending of Symmetrically Loaded Circular Plates of Variable Thickness*. Journ. of Applied Mechanics, Vol. 15, 1948, p. 1.

⁵ H. FAVRE, *Sur un type de plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable*. Bulletin technique de la Suisse romande, vol. 75, 1949, n° 18, 19 et 26.

⁶ H. FAVRE et E. CHABLOZ, *Etude des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable. Cas d'une surcharge uniformément répartie*. Journ. de Math. et de Ph. appl., vol. 1, 1950, p. 317 et suiv.

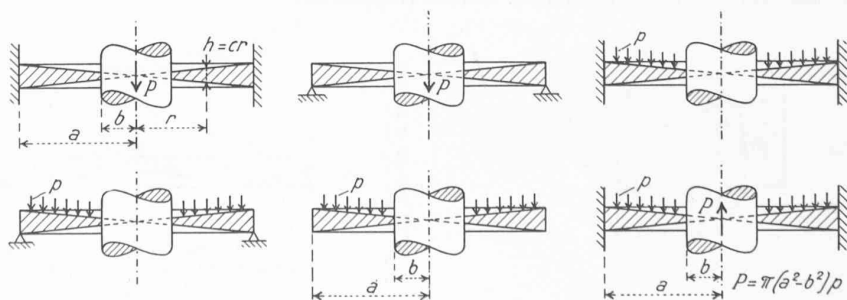


Fig. 1. — Coupes axiales des plaques circulaires étudiées par D. Conway.

§ 1. Equation différentielle des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable.

Cas d'une force appliquée au centre

Rappelons tout d'abord quelques formules générales connues. Considérons un plaque circulaire où l'épaisseur h , la surcharge par unité de surface p et les conditions d'appui sont uniquement fonctions de r . Nous admettrons que l'épaisseur soit petite par rapport aux autres dimensions et que la courbure initiale du feuillet moyen¹ soit très faible, de façon que les forces intérieures agissant dans cette surface soient négligeables².

Soient ξ_0 ³ le déplacement, parallèle à l'axe de la plaque, d'un point du feuillet moyen et

$$\varphi = -\frac{dz_0}{dr} \quad (1)$$

la variation (due à la déformation) de la pente de cette surface. La grandeur φ satisfait à l'équation différentielle du second ordre :

$$D \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) + \frac{dD}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) = -Q, \quad (2)$$

où Q désigne l'effort tranchant relatif à l'unité de longueur (fig. 4) et

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (3)$$

E étant le module d'élasticité et ν , le nombre de Poisson⁴.

L'intégration de l'équation (2), compte tenu de deux conditions aux limites, permet de déterminer $\varphi(r)$. Les moments de flexion M_r , M_t ⁵ et les tensions normales σ_r , σ_t peuvent ensuite être calculés à l'aide des formules

$$M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right), \quad M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_r = \frac{M_r}{h^3/12} z, \quad \sigma_t = \frac{M_t}{h^3/12} z, \quad (5)$$

¹ Par *feuillet moyen* nous entendons la surface qui, avant la déformation, a ses points équidistants des deux faces de la plaque.

² Il importe surtout que le plan tangent en un point quelconque du feuillet moyen fasse un petit angle avec un plan fixe.

³ z_0 , ainsi que la grandeur z que nous introduirons plus loin, seront comptés positivement vers le bas, en supposant l'axe de la plaque vertical et la surcharge dirigée vers le bas.

⁴ L'équation (2) a été indiquée pour la première fois par H. HOLZER, il est vrai sous une forme un peu différente. C'est à O. PICHLER que l'on doit la forme sous laquelle nous l'avons écrite. Pour sa démonstration, voir par exemple S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1940, p. 282 et suiv.

⁵ Le moment de torsion $M_{rt} = M_{tr}$ est ici identiquement nul. Il en est de même de l'effort tranchant relatif aux éléments de surface $h dr$.

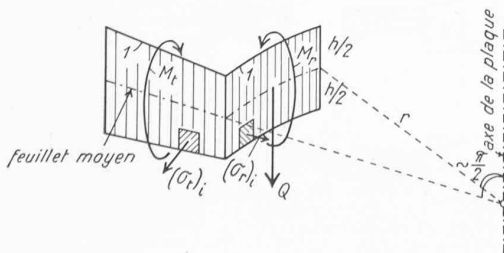


Fig. 4.

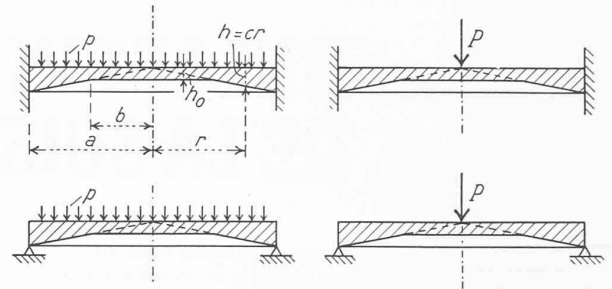


Fig. 2. — Coupes axiales des plaques circulaires étudiées par H. Favre.

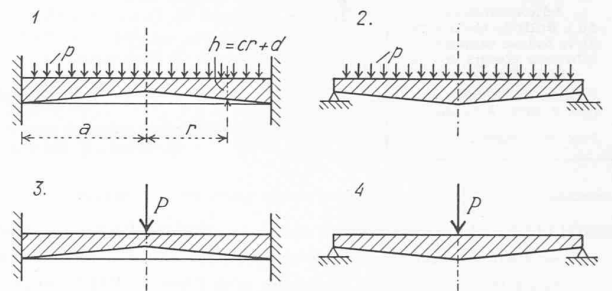


Fig. 3. — Coupes axiales des plaques circulaires étudiées par H. Favre et E. Chabloz. Les cas 1 et 2 ont été traités précédemment. Les cas 3 et 4 sont l'objet du présent mémoire.

z désignant la distance d'un point de la plaque au feuillet moyen. En particulier, les valeurs de ces tensions aux points $z = h/2$ de la face inférieure sont :

$$(\sigma_r)_i = \frac{6 M_r}{h^2}, \quad (\sigma_t)_i = \frac{6 M_t}{h^2}, \quad (6)$$

celles aux points correspondants $z = -h/2$ de la face supérieures sont égales aux valeurs (6) changées de signe.

Enfin, le déplacement ξ_0 s'obtient en intégrant l'équation (1) :

$$\xi_0 = -\int \varphi(r) dr + C, \quad (7)$$

C étant une constante qu'on détermine à l'aide d'une condition aux limites.

Soit maintenant une plaque circulaire de rayon a et d'épaisseur linéairement variable, soumise à une force P appliquée au centre. On peut supposer, par exemple — comme nous l'avons fait dans les figures 2 et 3 — que l'une des deux faces de la plaque soit un plan (fig. 5 a). Dans ce cas, l'autre face et le feuillet moyen seront des surfaces coniques de révolution. Il

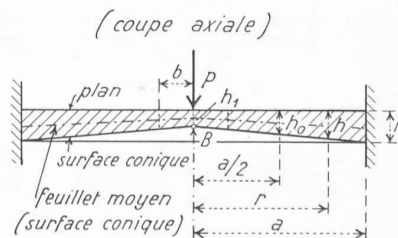


Fig. 5 a.

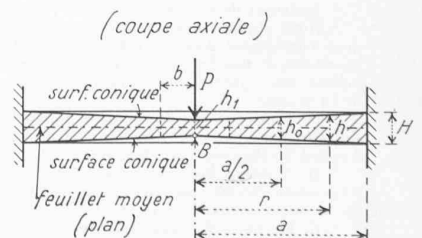


Fig. 5 b.

sera alors nécessaire, pour que la courbure initiale de ce feuillet soit très faible et les formules (4) à (7) applicables, que l'épaisseur h soit elle-même très petite par rapport au rayon a du contour.

On peut aussi supposer que le feuillet moyen soit un plan, les deux faces, qui sont symétriques, étant des surfaces coniques (fig. 5 b). La courbure initiale du feuillet étant alors nulle, les formules rappelées plus haut seront applicables dans les meilleures conditions possibles. On peut d'ailleurs imaginer une infinité de cas intermédiaires pouvant intervenir dans les applications. Les calculs qui suivent seront applicables à tous ces cas, mais seront d'autant plus exacts que la courbure du feuillet moyen sera plus faible. Ils ne seront en outre valables que lorsque les déplacements ξ_0 des points du feuillet moyen pourront être eux-mêmes considérés comme petits par rapport à l'épaisseur h .

Nous pouvons poser (fig. 5 a ou 5 b) ¹ :

$$h = \left[1 + \lambda \left(2 \frac{r}{a} - 1 \right) \right] h_0, \quad (8)$$

d'où

$$H = (h)_{r=a} = (1 + \lambda) h_0, \quad h_1 = (h)_{r=0} = (1 - \lambda) h_0,$$

h_0 désignant la valeur de h aux points où $r = a/2$ et λ la variation, divisée par h_0 , que subit l'épaisseur depuis ces points jusqu'au contour ou jusqu'au centre.

Posons encore :

$$\xi = \frac{r}{a} \quad (9) \quad \text{et} \quad D_0 = \frac{E h_0^3}{12 (1 - \nu^2)}. \quad (10)$$

L'équation (2) devient, en tenant compte de (3), (8), (9), (10) et en remarquant que

$$Q = \frac{P}{2\pi r} :$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{\Phi}{\xi} \right) = & - \frac{aP}{2\pi D_0} \frac{1}{\xi} - \lambda \left(a_{11} \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + a_{12} \frac{d\Phi}{d\xi} + a_{13} \frac{\Phi}{\xi} \right) - \\ & - \lambda^2 \left(a_{21} \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + a_{22} \frac{d\Phi}{d\xi} + a_{23} \frac{\Phi}{\xi} \right) - \\ & - \lambda^3 \left(a_{31} \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + a_{32} \frac{d\Phi}{d\xi} + a_{33} \frac{\Phi}{\xi} \right), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

où

$$\left. \begin{aligned} a_{11} = 6\xi - 3, & \quad a_{12} = 12 - \frac{3}{\xi}, \\ a_{21} = 12\xi^2 - 12\xi + 3, & \quad a_{22} = 36\xi - 24 + \frac{3}{\xi}, \\ a_{31} = 8\xi^3 - 12\xi^2 + 6\xi - 1, & \quad a_{32} = 32\xi^2 - 36\xi + 12 - \frac{1}{\xi}, \\ a_{13} = -6(1 - \nu) + \frac{3}{\xi}, & \\ a_{23} = -12(1 - 2\nu)\xi + 12(1 - \nu) - \frac{3}{\xi}, & \\ a_{33} = -8(1 - 3\nu)\xi^2 + 12(1 - 2\nu)\xi - 6(1 - \nu) + \frac{1}{\xi}. & \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Telle est l'équation différentielle d'une plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable et soumise à une force appliquée au centre.

¹ Ces deux figures ont été dessinées en choisissant une valeur positive de λ . Elles se rapportent au cas des paragraphes 2 et 3, où la plaque est encastrée le long du contour.

§ 2. Intégration de l'équation (11) dans le cas où la plaque est encastrée le long du contour

Nous utiliserons la méthode que nous avons déjà appliquée à la même plaque, sous l'action d'une surcharge uniformément répartie ¹.

Développons Φ , qui peut être considéré comme une fonction de ξ et de λ , en une série procédant selon les puissances croissantes de λ :

$$\Phi(\xi, \lambda) = \Phi_0(\xi) + \Phi_1(\xi)\lambda + \Phi_2(\xi)\lambda^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \lambda^i. \quad (13)$$

Pour des valeurs suffisamment petites de λ , il faut s'attendre à ce que cette série converge rapidement, de sorte qu'on pourra se contenter, dans les applications, de ne considérer qu'un petit nombre de ses termes. Ce point sera confirmé plus loin.

Pour déterminer les fonctions Φ_i , introduisons la série (13) dans les deux membres de l'équation (11) et identifions les coefficients des mêmes puissances de λ . Nous obtenons ainsi le système d'équations différentielles simultanées :

$$\left. \begin{aligned} \lambda^0: \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\Phi_0}{d\xi} + \frac{\Phi_0}{\xi} \right) = & - \frac{aP}{2\pi D_0} \frac{1}{\xi}, \\ \lambda^1: \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\Phi_1}{d\xi} + \frac{\Phi_1}{\xi} \right) = & - \left(a_{11} \frac{d^2\Phi_0}{d\xi^2} + a_{12} \frac{d\Phi_0}{d\xi} + a_{13} \frac{\Phi_0}{\xi} \right), \\ \lambda^2: \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\Phi_2}{d\xi} + \frac{\Phi_2}{\xi} \right) = & - \left(a_{11} \frac{d^2\Phi_1}{d\xi^2} + a_{12} \frac{d\Phi_1}{d\xi} + a_{13} \frac{\Phi_1}{\xi} + \right. \\ & \left. + a_{21} \frac{d^2\Phi_0}{d\xi^2} + a_{22} \frac{d\Phi_0}{d\xi} + a_{23} \frac{\Phi_0}{\xi} \right), \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ces équations sont applicables quelles que soient les conditions aux limites, pourvu que ces dernières ne dépendent que de r .

Supposons maintenant que la plaque soit encastrée le long du contour $r = a$ (fig. 5 a et 5 b). Les conditions aux limites sont alors :

$$(\Phi)_{r=0} \equiv (\Phi)_{\xi=0} = 0 \quad \text{et} \quad (\Phi)_{r=a} \equiv (\Phi)_{\xi=1} = 0. \quad (15)$$

Pour que ces conditions soient satisfaites quel que soit λ , il est nécessaire, d'après (13), que

$$(\Phi_i)_{\xi=0} = 0 \quad \text{et} \quad (\Phi_i)_{\xi=1} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty). \quad (16)$$

Revenons aux équations (14). Nous pouvons intégrer directement la première, qui est une équation d'Euler pour la fonction inconnue Φ_0 . En tenant compte des conditions $(\Phi_0)_{\xi=0} = 0$ et $(\Phi_0)_{\xi=1} = 0$, nous obtenons par des calculs élémentaires :

$$\Phi_0 = - \frac{aP}{4\pi D_0} \xi \text{Log } \xi. \quad (17)$$

En introduisant cette valeur de Φ_0 dans la seconde des relations (14), cette dernière devient elle-même une équation d'Euler ne contenant que la fonction inconnue Φ_1 :

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\Phi_1}{d\xi} + \frac{\Phi_1}{\xi} \right) = \frac{3aP}{2\pi D_0} \left[-\frac{1}{\xi} + (1 + \nu) \text{Log } \xi + 3 \right].$$

¹ Voir H. FAVRE et E. CHABLOZ, *loc. cit.* L'équation différentielle (11) obtenue ici ne diffère de celle relative au cas d'une surcharge uniformément répartie que par le premier terme du second membre, qui est ici

$$- \frac{aP}{2\pi D_0} \frac{1}{\xi}, \quad \text{au lieu de} \quad - \frac{a^3 P}{2 D_0} \xi.$$

La solution de cette équation, compte tenu des conditions $(\varphi_1)_{\xi=0} = 0$ et $(\varphi_1)_{\xi=1} = 0$, est

$$\varphi_1 = \frac{aP}{4\pi D_0} \left[2(1+\nu)\xi^2 \text{Log} \xi - 3\xi \log \xi + \frac{2}{3}(5-4\nu)(\xi^2 - \xi) \right] \quad (18)$$

En introduisant les valeurs (17) et (18) de φ_0 et φ_1 dans la troisième des relations (14), on obtient une nouvelle équation d'Euler permettant, en tenant compte des conditions $(\varphi_2)_{\xi=0} = 0$ et $(\varphi_2)_{\xi=1} = 0$, de déterminer φ_2 , et ainsi de suite. En procédant de la sorte, nous avons obtenu :

$$\varphi_2 = \frac{aP}{4\pi D_0} \left[-\frac{3}{2}(3+4\nu+\nu^2)\xi^3 \text{Log} \xi + 8(1+\nu)\xi^2 \text{Log} \xi - 6\xi \text{Log} \xi - \frac{1}{8}(85-36\nu-25\nu^2)\xi^3 + \frac{4}{3}(15-7\nu-4\nu^2)\xi^2 - \frac{1}{24}(225-116\nu-53\nu^2)\xi \right] \quad (19)$$

$$\varphi_3 = \frac{aP}{4\pi D_0} \left[\frac{1}{5}(51+77\nu+29\nu^2+3\nu^3)\xi^4 \text{Log} \xi - \frac{15}{2}(3+4\nu+\nu^2)\xi^3 \text{Log} \xi + 20(1+\nu)\xi^2 \text{Log} \xi - 10\xi \text{Log} \xi + \frac{1}{300}(8493-2089\nu-3053\nu^2-471\nu^3)\xi^4 - \frac{1}{8}(545-116\nu-213\nu^2-32\nu^3)\xi + \frac{1}{12}(705-195\nu-233\nu^2-53\nu^3)\xi^2 - \frac{1}{600}(11361-5228\nu-1781\nu^2-1192\nu^3)\xi \right] \quad (20)$$

Désignons par $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ... les approximations successives de la fonction φ , obtenues en ne considérant qu'un terme, deux termes, etc. de la série (13) :

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \varphi_0 & (1^{\text{re}} \text{ approximation}), \\ \varphi^{(2)} &= \varphi_0 + \varphi_1 \lambda & (2^{\text{e}} \text{ approximation}), \\ &\dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

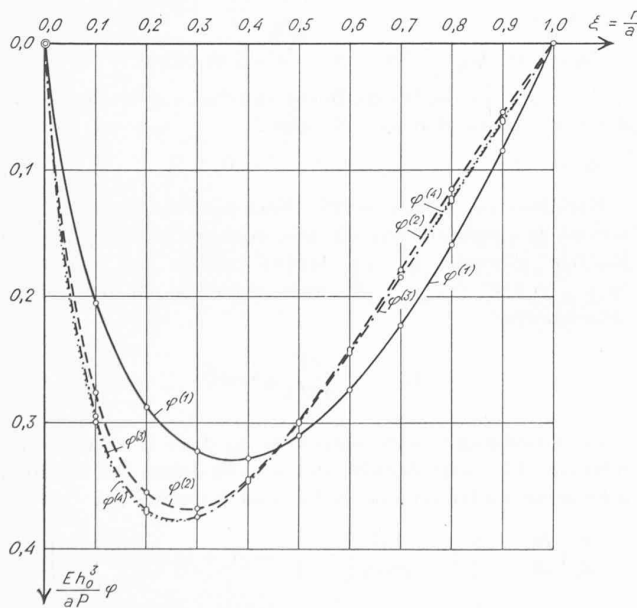


Fig. 6. — Plaque circulaire encastree de la figure 5 a ou 5 b. Représentation graphique des quatre premières approximations $\varphi^{(1)}$, ..., $\varphi^{(4)}$ en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour $\lambda = 0,2$ et $\nu = 0,25$.

Dans la figure 6, nous avons représenté graphiquement les valeurs de $\varphi^{(1)}$, ..., $\varphi^{(4)}$ en fonction de $\xi = r/a$, calculées pour $\lambda = 0,2$ et $\nu = 0,25$. On voit que la quatrième approximation diffère très peu de la troisième. Des calculs numériques comparatifs nous ont d'ailleurs montré que les valeurs de M_r , M_t déduites de la quatrième approximation sont affectées d'erreurs relatives de l'ordre de quelques millièmes si $0 < |\lambda| < 0,2$ et de quelques centièmes si $0,2 < |\lambda| < 0,4$. Or les valeurs de $|\lambda|$ qui interviennent dans les applications sont en général inférieures à 0,4.

Nous avons ainsi obtenu pour φ la valeur approchée, mais suffisante pour les applications :

$$\varphi(\xi) = \varphi^{(4)} = \varphi_0 + \varphi_1 \lambda + \varphi_2 \lambda^2 + \varphi_3 \lambda^3, \quad (22)$$

où φ_0 , ..., φ_3 ont les valeurs respectives (17), ..., (20).

§ 3. Calcul des déformations, des moments de flexion et des tensions dans le cas de la plaque encastree

Les relations (4) et (7) s'écrivent, en y remplaçant la variable r par ξ :

$$M_r = \frac{D}{a} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} + \nu \frac{\varphi}{\xi} \right), \quad M_t = \frac{D}{a} \left(\frac{\varphi}{\xi} + \nu \frac{d\varphi}{d\xi} \right), \quad (4')$$

$$\zeta_0 = -a \int \varphi(\xi) d\xi + C. \quad (7')$$

En introduisant dans (7') la valeur (22) de $\varphi(\xi)$ et en tenant compte de la condition d'appui $(\zeta_0)_{\xi=1} = 0$, qui détermine la constante C , il nous a été facile de calculer ζ_0 . De même, en introduisant $\varphi(\xi)$ dans les relations (4'), nous avons obtenu M_r et M_t , puis, à l'aide des formules (6), les valeurs des tensions $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ au voisinage de la face inférieure de la plaque.

Pour ne pas alourdir notre exposé, nous avons renoncé à insérer dans ce mémoire les formules obtenues, qui sont très longues et n'offrent qu'un intérêt relatif, et avons préféré donner à l'aide de diagrammes les résultats numériques auxquels elles conduisent. La figure 7 est une représentation

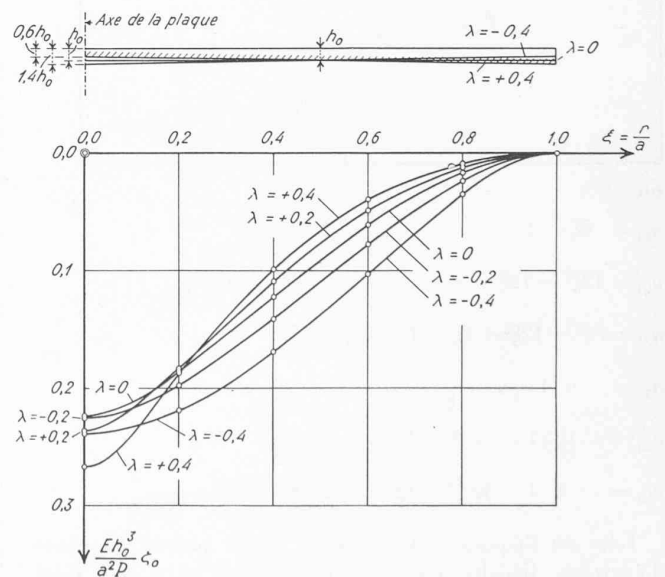


Fig. 7. — Plaque circulaire encastree de la figure 5 a ou 5 b. Représentation graphique de ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs de λ ($\nu = 0,25$).

graphique de la fonction $\zeta_0(\xi)$, pour les valeurs $-0,4$, $-0,2$, ± 0 , $+0,2$ et $+0,4$ de λ . Les diagrammes des moments M_r , M_t sont donnés dans la figure 8 et ceux des tensions $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$ dans la figure 9, pour les mêmes valeurs de λ . Toutes ces courbes ont été calculées en choisissant $\nu = 0,25$. Cette valeur du nombre de Poisson est une moyenne entre les valeurs correspondant à l'acier ($\sim 0,33$) et au béton armé ($\sim 0,15$ à $0,2$). Il faut d'ailleurs s'attendre à ce que toutes les valeurs calculées dépendent très peu du nombre ν , comme c'est en général le cas dans la Théorie de l'élasticité.

Remarquons que si λ est positif, l'épaisseur de la plaque est plus faible au voisinage du centre que vers le contour (cas des fig. 5 a et 5 b). Le contraire a lieu si λ est négatif.

La figure 7 montre éloquentement comment évoluent les déplacements ζ_0 , lorsque λ croît de $-0,4$ à $+0,4$. Il est intéressant de constater que $(\zeta_0)_{\xi=0}$, qui est la flexion au centre ou flèche de la plaque, passe par un minimum pour une valeur de λ très voisine de zéro. Toutes choses égales d'ailleurs, c'est donc la plaque d'épaisseur constante ($\lambda = 0$) qui accuse sensiblement la plus faible flexion au centre. En conséquence, pour les valeurs du paramètre λ comprises entre $-0,2$ et $+0,2$, $(\zeta_0)_{\xi=0}$ est pratiquement indépendant de ce paramètre. Ceci montre que, pour de petites valeurs positives

de λ , l'influence sur $(\zeta_0)_{\xi=0}$ du renforcement de l'épaisseur dans le domaine $0,5 < \xi < 1,0$ est approximativement compensée par celle de la diminution d'épaisseur dans le domaine $0 < \xi < 0,5$. Une compensation analogue existe pour de petites valeurs négatives de λ .

Ces renforcements et diminutions d'épaisseur dans les deux zones en question, expliquent d'ailleurs clairement l'évolution de la forme des courbes $\zeta_0(\xi)$, lorsque λ croît de $-0,4$ à $+0,4$.

Les moments de flexion M_r et M_t sont, quel que soit λ , négatifs au voisinage du contour ($\xi = 1$) et positifs près du centre ($\xi = 0$) (fig. 8). Ils croissent régulièrement à partir de valeurs finies négatives et tendent vers $+\infty$, lorsque ξ décroît de 1 à 0. Quelle que soit la valeur de ξ , les moments M_r et M_t sont des fonctions décroissantes de λ .

Les diagrammes des tensions normales $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ accusent par contre un caractère assez différent (fig. 9). Ces tensions sont, quel que soit λ , négatives au voisinage du contour et positives près du centre, comme les moments. Elles croissent — mais moins régulièrement que les moments — à partir de valeurs finies et tendent vers $+\infty$, lorsque ξ décroît de 1 à 0.¹

Dans les diagrammes de chacune des tensions $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$, on peut assez bien distinguer une première zone, voisine du contour, où la tension est une fonction croissante de λ , une seconde zone, près du centre de la plaque, jouissant de la même propriété, et une troisième, située entre les deux

¹ La tension $(\sigma_r)_i$ commence par décroître très légèrement avant de croître, lorsque $\lambda = 0,4$.

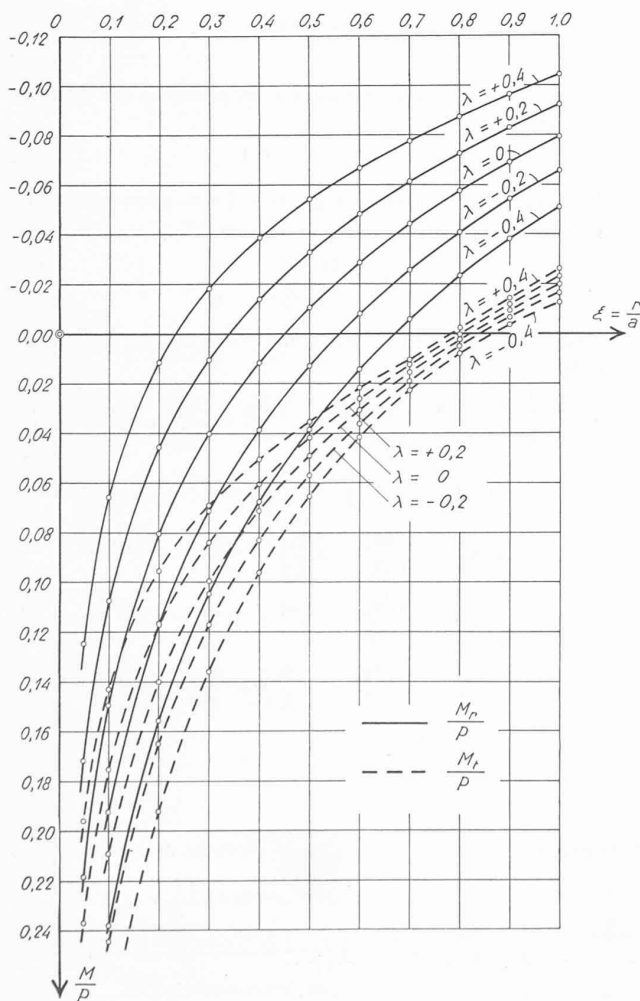


Fig. 8. — Plaque circulaire encastree de la figure 5 a ou 5 b. Représentation graphique de M_r et M_t en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs de λ ($\nu = 0,25$).

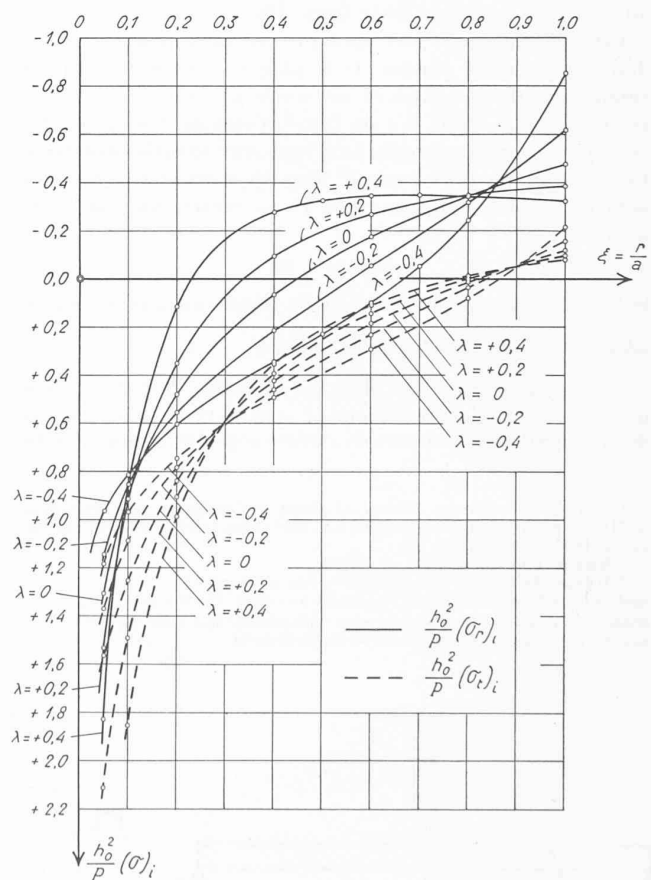


Fig. 9. — Plaque circulaire encastree de la figure 5 a ou 5 b. Représentation graphique de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs de λ ($\nu = 0,25$).

premières, où la tension est une fonction décroissante de λ .

Pour $\lambda = 0,4$, on voit que la plaque réalise cette condition que la tension $(\sigma_r)_i$ est sensiblement constante dans le domaine $0,5 < \xi < 1,0$.

Nous venons de remarquer que les moments de flexion et les tensions normales deviennent infiniment grands au centre de la plaque. Or on sait qu'au voisinage du point d'application d'une force concentrée, la théorie utilisée dans le présent calcul doit être révisée. Dans le cas où une force P agit au centre d'une plaque circulaire *simplement posée*, d'épaisseur constante h_1 et de rayon b , A. Nadai et S. Woinowsky-Krieger ont montré, par une analyse délicate du problème, que les tensions σ_r et σ_t aux points A et B de la figure 10 sont données par les formules :¹

$$(\sigma_r)_A = (\sigma_t)_A = \sigma_1 - \frac{P}{\pi \epsilon^2} \left[\frac{1+2\nu}{2} - (1+\nu)\beta \right], \quad (23)$$

$$(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{P}{h_1^2} \left[(1+\nu) \left(0,485 \text{ Log } \frac{b}{h_1} + 0,52 \right) + 0,48 \right], \quad (24)$$

où ϵ désigne le rayon du petit cercle où la force P est supposée être uniformément répartie et σ_1 est la tension normale $\sigma_r = \sigma_t$, en A, que donne la théorie ordinaire des plaques en tenant compte de la répartition de cette force. Quant à β , c'est un coefficient dépendant du rapport ϵ/h_1 .

Dans les applications, on peut cependant se contenter de ne calculer que la tension au point B, qui est une traction, car la tension relative au point A est une compression de caractère local qui occasionne très rarement la rupture de la matière². La formule (24) donne donc la tension dangereuse au centre de la plaque de la figure 10.

Cette formule peut être appliquée au cas étudié ici. Considérons en effet la portion de la plaque d'épaisseur variable comprise entre le centre et un cercle de rayon b , égal par exemple à $0,1 a$ (fig. 5 a ou 5 b)³. Cette portion peut être considérée comme une plaque d'épaisseur sensiblement constante h_1 , simplement posée le long du contour $r = b$ et sur laquelle agirait, outre la force P au centre, un couple de moment

$$(M_r)_{r=b} = \mu P$$

le long du contour (le facteur μ est représenté par les ordonnées $\frac{(M_r)_{r=b}}{P}$ des courbes de la figure 8).

Ce moment engendre dans le domaine $0 < r < b$ des moments de flexion sensiblement constants et indépendants de la direction de l'élément de surface considéré, approximati-

vement égaux à $(M_r)_{r=b}$. La tension produite en B par le moment relatif à ce point est

$$(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{(M_r)_{r=b}}{h_1^2/6} = \frac{6\mu}{h_1^2} P.$$

En ajoutant cette valeur à celle donnée par la formule (24), on obtient ainsi pour la *tension dangereuse au centre de la plaque* :

$$(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{P}{h_1^2} \left[(1+\nu) \left(0,485 \text{ Log } \frac{b}{h_1} + 0,52 \right) + 6\mu + 0,48 \right]. \quad (25)$$

En résumé, les tensions $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$ relatives à la plaque de la figure 5 a ou 5 b, sont données par les diagrammes de la figure 9, sauf au voisinage du centre, où la tension dangereuse, qui se produit au point B, est donnée par la formule (25).

§ 4. Intégration de l'équation (11) dans le cas où la plaque est posée le long du contour

Les conditions aux limites sont ici (fig. 11 a ou 11 b) :

$$(\varphi)_{r=0} \equiv (\varphi)_{\xi=0} = 0 \quad \text{et} \quad (M_r)_{r=a} \equiv (M_r)_{\xi=1} = 0. \quad (26)$$

Posons, comme précédemment :

$$\varphi(\xi, \lambda) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi)\lambda + \varphi_2(\xi)\lambda^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \lambda^i. \quad (13)$$

Comme nous l'avons vu au § 2, la première des conditions (26) exige que :

$$(\varphi_i)_{\xi=0} = 0. \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (27)$$

Remplaçons, d'autre part, φ par le développement (13) dans l'expression (4') du moment de flexion M_r :

$$M_r = \frac{D}{a} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} + \nu \frac{\varphi}{\xi} \right).$$

Nous obtenons, en tenant compte des relations (3), (8), (9) et (10) :

$$\begin{aligned} M_r = \frac{D_0}{a} & \left\{ \frac{d\varphi_0}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_0}{\xi} + \left[3(2\xi-1) \left(\frac{d\varphi_0}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_0}{\xi} \right) + \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_1}{\xi} \right] \lambda + \right. \\ & + \left[3(2\xi-1)^2 \left(\frac{d\varphi_0}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_0}{\xi} \right) + \right. \\ & + 3(2\xi-1) \left(\frac{d\varphi_1}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_1}{\xi} \right) + \frac{d\varphi_2}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_2}{\xi} \right] \lambda^2 + \\ & + \left[(2\xi-1)^3 \left(\frac{d\varphi_0}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_0}{\xi} \right) + 3(2\xi-1)^2 \left(\frac{d\varphi_1}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_1}{\xi} \right) + \right. \\ & + 3(2\xi-1) \left(\frac{d\varphi_2}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_2}{\xi} \right) + \frac{d\varphi_3}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_3}{\xi} \right] \lambda^3 + \\ & \left. \dots \dots \dots \right\}. \end{aligned}$$

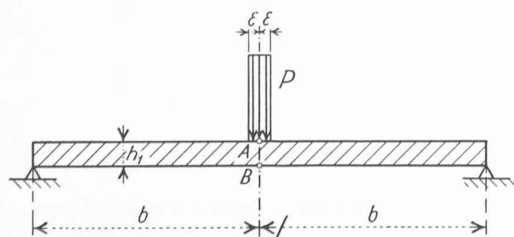


Fig. 10.

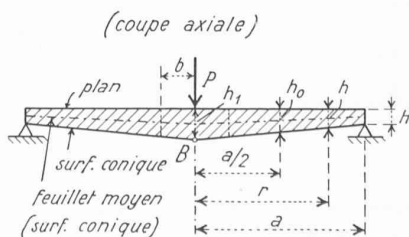


Fig. 11 a.

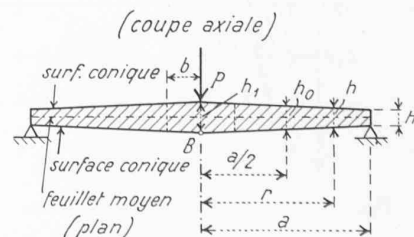


Fig. 11 b.

¹ Voir S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, p. 75. Voir aussi A. NADAI, *Elastische Platten*, p. 308 et S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Ing. Archiv*, vol. 4, 1933, p. 305.

² Voir S. TIMOSHENKO, *loc. cit.*, p. 77.

³ Il faut choisir pour h_1 une valeur petite par rapport à a , mais au moins égale à deux fois la valeur h_1 de l'épaisseur au centre. Les tensions $(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B$ données par la formule (25) que nous obtiendrons plus loin, dépendent très peu du choix de h_1 , comme on le vérifie facilement.

Pour que la seconde des conditions (26) soit satisfaite quel que soit λ , il est nécessaire, d'après l'expression ci-dessus de M_r , que :

$$\left(\frac{d\Phi_i}{d\xi} + \nu \frac{\Phi_i}{\xi} \right)_{\xi=1} = 0. \quad (i = 0, 1, 2, \dots \infty) \quad (28)$$

Pour déterminer les fonctions $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$, ..., nous devons donc intégrer le système (14), compte tenu des conditions (27) et (28). En procédant selon la même méthode que celle utilisée au § 2, consistant à intégrer l'une après l'autre les équations (14) en substituant chaque fois les valeurs de Φ_i déjà calculées, nous obtenons successivement :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{aP}{4\pi D_0} \left[\frac{1}{1+\nu} \xi - \xi \operatorname{Log} \xi \right], \\ \Phi_1 &= \frac{aP}{4\pi D_0} \left[2(1+\nu) \xi^2 \operatorname{Log} \xi - 3 \xi \operatorname{Log} \xi + \frac{4}{3}(1-2\nu) \xi^2 - \frac{5-6\nu-8\nu^2}{3(1+\nu)} \xi \right], \\ \Phi_2 &= \frac{aP}{4\pi D_0} \left[-\frac{3}{2}(3+4\nu+\nu^2) \xi^3 \operatorname{Log} \xi + 8(1+\nu) \xi^2 \operatorname{Log} \xi - 6 \xi \operatorname{Log} \xi - \frac{1}{8}(49-48\nu-25\nu^2) \xi^3 + \frac{4}{3}(11-11\nu-4\nu^2) \xi^2 - \frac{203-19\nu-275\nu^2-53\nu^3}{24(1+\nu)} \xi \right], \\ \Phi_3 &= \frac{aP}{4\pi D_0} \left[\frac{1}{5}(51+77\nu+29\nu^2+3\nu^3) \xi^4 \operatorname{Log} \xi - \frac{15}{2}(3+4\nu+\nu^2) \xi^3 \operatorname{Log} \xi + 20(1+\nu) \xi^2 \operatorname{Log} \xi - 10 \xi \operatorname{Log} \xi + \frac{1}{300}(5433-3649\nu-3233\nu^2-471\nu^3) \xi^4 - \frac{1}{8}(413-256\nu-245\nu^2-32\nu^3) \xi^3 + \frac{1}{12}(619-387\nu-339\nu^2-53\nu^3) \xi^2 - \frac{11059+3789\nu-13107\nu^2-6549\nu^3-1192\nu^4}{600(1+\nu)} \xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Des calculs numériques comparatifs analogues à ceux mentionnés à la fin du § 2 nous ont montré que, pour les valeurs de λ comprises entre $-0,4$ et $+0,4$ (qui sont celles intervenant en général dans les applications), le degré d'approximation de la fonction définie par les quatre premiers termes de la série (13) est certainement suffisant¹.

Nous avons ainsi obtenu pour Φ la valeur approchée :

$$\Phi(\xi) = \Phi^{(4)} = \Phi_0 + \Phi_1 \lambda + \Phi_2 \lambda^2 + \Phi_3 \lambda^3, \quad (30)$$

où Φ_0, \dots, Φ_3 ont maintenant les valeurs (29).

§ 5. Calcul des déformations, des moments de flexion et des tensions dans le cas de la plaque posée

Connaissant $\Phi(\xi)$, il nous a été facile de déterminer les déplacements ζ_0 , les moments M_r , M_t et les tensions normales $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$ à l'aide des formules (7'), (4') et (6).

Comme dans le cas de la plaque encastrée et pour les mêmes raisons que celles invoquées au § 3, nous avons renoncé à insérer dans ce mémoire les formules obtenues et avons préféré

¹ Comme dans le cas où la plaque est encastrée, les valeurs de M_r , M_t déduites de la quatrième approximation sont affectées d'erreurs relatives de l'ordre de quelques millièmes si $0 < |\lambda| < 0,2$ et de quelques centièmes si $0,2 < |\lambda| < 0,4$.

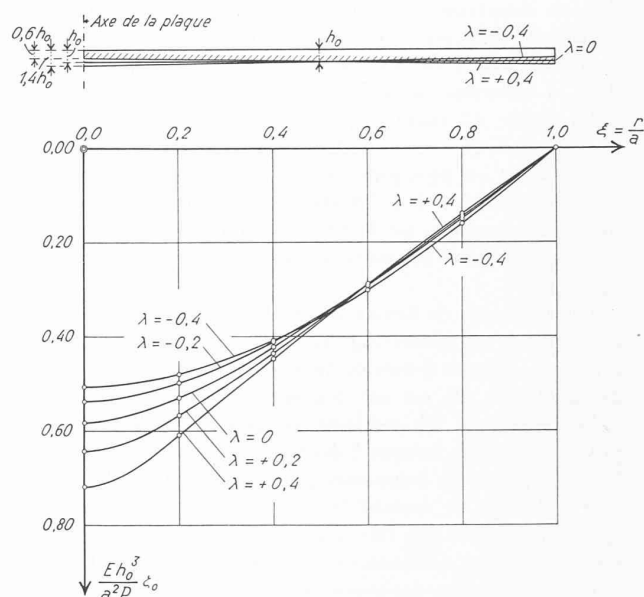


Fig. 12. — Plaque circulaire posée de la figure 11 a ou 11 b. Représentation graphique de ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs de λ ($\nu = 0,25$).

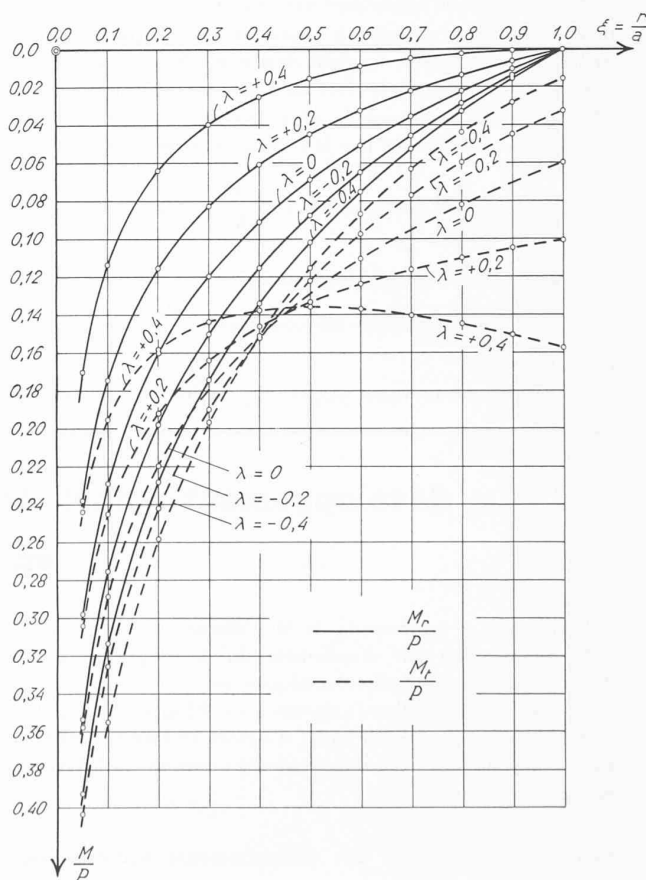


Fig. 13. — Plaque circulaire posée de la figure 11 a ou 11 b. Représentation graphique de M_r et M_t en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs de λ ($\nu = 0,25$).

donner directement les résultats à l'aide de diagrammes, reproduits dans les figures 12, 13 et 14, où sont dessinées les courbes relatives aux valeurs $-0,4, -0,2, \pm 0, +0,2, +0,4$ de λ et calculées en choisissant $\nu = 0,25$.

La figure 12 montre qu'en un point donné de la zone $0 < \xi < 0,5$, ξ_0 croît avec λ et cela d'autant plus rapidement que le point est plus près du centre de la plaque. Par contre, dans la zone $0,5 < \xi < 1,0$, les déplacements ξ_0 sont pratiquement indépendants de λ . On voit combien les déformations diffèrent de celles relatives au cas où la plaque est encastree (fig. 7).

Les moments de flexion M_r et M_t sont représentés par des courbes très régulières (fig. 13). Quel que soit λ , M_r croît de 0 à $+\infty$, lorsque ξ décroît de 1 à 0. En un point quelconque de la plaque, M_r est une fonction décroissante de λ .

Les moments M_t croissent en général d'une valeur finie positive à $+\infty$, lorsque ξ décroît de 1 à 0, sauf dans le cas $\lambda = +0,4$, où M_t commence par décroître. Dans la zone $0,45 < \xi < 1,0$ — et surtout le long du contour de la plaque ($\xi = 1$) — M_t est une fonction croissante de λ . Cette fonction est au contraire décroissante dans la zone $0 < \xi < 0,45$.

Les diagrammes des tensions normales $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ (fig. 14) accusent un caractère assez différent de ceux des moments. $(\sigma_r)_i$ croît de 0 à $+\infty$ et $(\sigma_t)_i$ d'une valeur finie positive à $+\infty$, lorsque ξ décroît de 1 à 0, quel que soit λ , comme les moments. $(\sigma_r)_i$ est une fonction décroissante de λ dans la zone $0,2 < \xi < 1,0$, mais croissante au voisinage du centre. Au contraire, $(\sigma_t)_i$ est une fonction croissante de λ quel que soit ξ .

Nous venons de remarquer que M_r , M_t , $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ deviennent infiniment grands au centre de la plaque; la théorie utilisée dans le présent calcul doit donc être révisée. Comme nous l'avons vu au § 3, c'est au point B de la figure 11 a ou 11 b qu'existe la tension la plus dangereuse au voisinage du centre. Elle est donnée par la formule établie au § 3 :

$$(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{P}{h_1^2} \left[(1+\nu) (0,485 \log \frac{b}{h_1} + 0,52) + 6\mu + 0,48 \right], \quad (25)$$

où b a la même signification que précédemment et où le facteur μ est représenté par les ordonnées $\frac{(M_r)_{r=b}}{P}$ des courbes de la figure 13.

En résumé, les tensions $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ relatives à la plaque de la

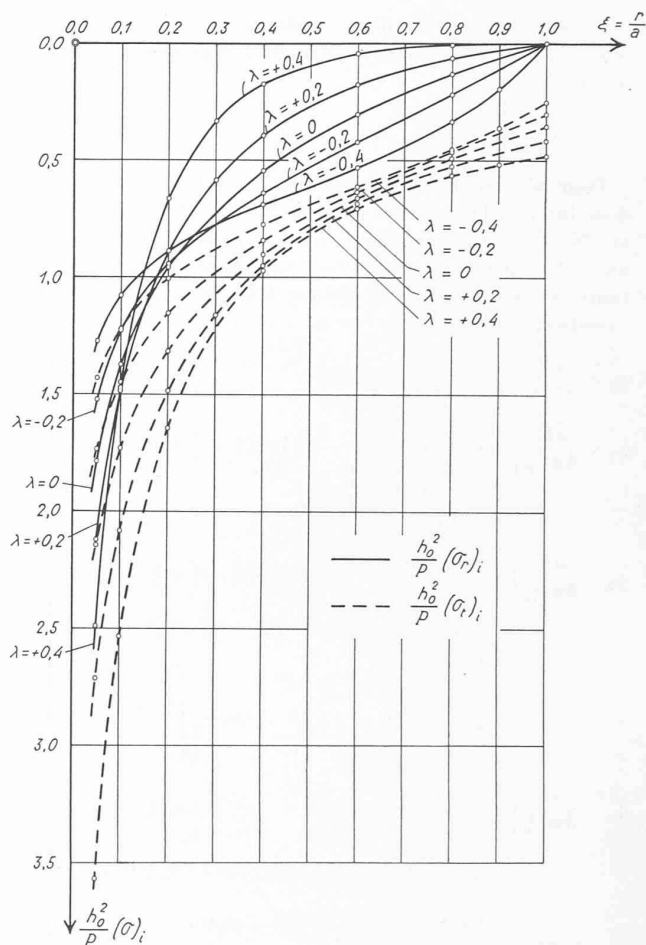


Fig. 14. — Plaque circulaire posée de la figure 11 a ou 11 b. Représentation graphique de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs de λ ($\nu = 0,25$).

figure 11 a ou 11 b sont données par les diagrammes de la figure 14, sauf au voisinage du centre, où la tension dangereuse, qui se produit en B, est donnée par la formule (25).

Zurich, le 29 mars 1951.

Le développement actuel des aménagements hydroélectriques en France¹

L'objet de la conférence de M. Clément a été double :

1^o donner une vue d'ensemble du développement actuel des aménagements hydroélectriques en France,

2^o renseigner sur l'aménagement du Rhin en aval de Bâle, soit en fait, sur le Grand canal d'Alsace et l'usine d'Ottmarsheim, dont la visite était prévue à l'occasion de l'Assemblée générale.

Développement actuel des aménagements hydroélectriques

La production d'énergie électrique en France a augmenté de 60 % de 1938 à 1950, pour atteindre à cette date un total de 33,2 TWh². L'énergie hydraulique et l'énergie thermique ont une part sensiblement égale dans cette production et, en

ce qui concerne l'énergie hydroélectrique, la part des Alpes a été, en 1950, de 59 %, celle du Massif central de 19 % et celle des Pyrénées de 22 %.

L'augmentation de la production durant ces 12 années n'a pas été uniforme (voir tableau I). Pendant la guerre elle est restée approximativement stationnaire, avec un minimum en 1944. Les aménagements nouveaux, lents à s'effectuer, ne compensaient que difficilement les destructions du moment, de sorte que l'indice d'augmentation de 60 % par rapport à

¹ Résumé d'une conférence à l'Assemblée générale de l'UCS, le 22 septembre, à Bâle, par M. Clément, contrôleur général de l'équipement à E. d. F., Paris. Ce texte a paru au n° 26, 1951, du *Bulletin de l'Association suisse des électriciens*.

² 1 TWh (terawatt-heure) = 10^{12} Wh = 10^9 kWh (1 milliard de kilowatt-heures).