**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande
**Band:** 77 (1951)
**Heft:** 10

**Artikel:** Flambage excentrique: application de la théorie de la plasticité
**Autor:** Szecsi, A.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-58150

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

77e année 19 mai 1951 No 10

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

**Abonnements:**
Suisse: 1 an, 24 francs
Etranger: 28 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 20 francs
Etranger: 25 francs
Pour les abonnements s'adresser à:
**Administration du « Bulletin technique de la Suisse romande »,** Case postale Riponne 21, Lausanne
Compte de chèques postaux II. 5775, à Lausanne
Prix du numéro: Fr. 1,40

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; E. Lateltin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; A. Paris, ingénieur; Ch, Thévenaz, architecte — Genève: MM. L. Archinard, ingénieur; Cl. Grosgurin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; G. Furter, ingénieur; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique: A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitaux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

**Tarif des annonces**
Le millimètre (larg. 47 mm) 20 cts
Réclames: 60 cts le mm (largeur 95 mm)
Rabais pour annonces répétées
**Annonces Suisses S.A.**
5, Rue Centrale Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

SOMMAIRE: *Flambage excentrique. Application de la théorie de la plasticité*, par A. Szecsi, ingénieur. — *Suppression du passage à niveau de Territet et route de transit*, par R. Déglon, ingénieur cantonal, Lausanne. — Société suisse des ingénieurs et des architectes: *La formation des ingénieurs*. Rapport de la Commission pour les questions sociales au Comité central de la S. I. A. — Bibliographie. — Les Congrès: *Association internationale des Ponts et Charpentes*. — Service de Placement. — Nouveautés, Informations diverses.

# FLAMBAGE EXCENTRIQUE

## Application de la théorie de la plasticité

par A. SZECSI, ingénieur

### Introduction

Les opinions des constructeurs divergent quant à la méthode à appliquer pour résoudre le problème du flambage excentrique.

Certains le traitent comme un problème de tension du deuxième ordre, d'autres, au contraire, le considèrent comme un problème de stabilité et procèdent de la même manière que pour le flambage axial.

Dans cette étude [1] nous verrons que:

1. La solution du problème du flambage excentrique ne peut être trouvée sans faire appel à la théorie de la plasticité.
2. Il s'agit d'un problème de stabilité qui est une généralisation de celui du flambage axial.
3. La théorie de la plasticité fournit, avec la précision désirée, la solution des problèmes symétriques et asymétriques. Nous appelons problème symétrique celui où l'excentricité est la même aux extrémités de la colonne et asymétrique dans le cas contraire.
4. Nous sommes en mesure de déterminer les déformations et les tensions internes de la colonne, notamment dans son dernier état d'équilibre avant flambage.
5. La flexion apparaît comme un cas particulier de flambage excentrique.
6. Nous donnons enfin les lignes générales permettant de dimensionner des constructions (cela, bien entendu, dans le cadre de la théorie de la plasticité).

Précisons maintenant notre problème: soit une colonne, de section quelconque, en équilibre sous l'action de forces appliquées à ses extrémités au moyen d'articulations. Ces dernières peuvent être appliquées au centre de gravité de la section ou ailleurs (excentriquement). Il s'agit de trouver les déformations de la colonne à l'état critique, c'est-à-dire lorsque l'équilibre passe de la stabilité à l'instabilité. Nous utiliserons le critère suivant pour reconnaître si la colonne est à l'état d'équilibre stable ou instable:

*Envisageons la colonne déjà déformée par les forces appliquées. A l'endroit de la colonne qui présente la plus grande déformation $\eta_{max}$, nous accroissons encore cette déformation d'une quantité $\Delta\eta_{max}$ très petite, mais non infiniment petite, puis nous cessons d'imposer ce supplément de déformation. L'équilibre est stable si la colonne revient à sa déformation primitive. Il est au contraire indifférent si la colonne reste dans son nouvel état d'équilibre (caractérisé par la déformation $\eta_{max} + \Delta\eta_{max}$). C'est le début du flambage et la force appliquée est alors la force critique.*

Il est évident que si les forces appliquées augmentent progressivement, l'équilibre est d'abord stable, puis devient indifférent.

Le critère ci-dessus est tout à fait général et valable pour tous les problèmes d'équilibre. Dans certains matériaux, il existe encore d'autres états d'équilibre indifférent au-delà de la force critique, mais ceux-ci n'ont aucune importance pratique, étant donné qu'ils se produisent pour des déformations trop grandes.

Nous négligerons les déformations dues aux compressions axiales et aux efforts tranchants. Elles sont en fait générale-

[1] Dans l'étude « Flambage par compression axiale » (*Bulletin technique* no 4, 1949), nous avons démontré qu'en appliquant la théorie de la plasticité (prise en considération des déformations réelles), on peut trouver la solution du problème du flambage axial pour section quelconque et tout matériau pour lequel le diagramme déformation-raccourcissement est connu.

ment négligeables devant les déformations produites par les moments fléchissants.

Nous supposerons que la répartition des déformations spécifiques dans toute section reste linéaire, même après déformation de la colonne. Nous supposerons en outre que la section est choisie de façon à ce qu'un flambage partiel d'un de ses éléments ne puisse survenir et, enfin, que les déformations des diverses fibres de la colonne suivent la loi du diagramme déformation-tension du matériau, loi que nous supposons connue.

### 2. — Relation entre le moment et la rotation spécifique de la section

Pour atteindre le but que nous nous sommes assigné, nous devons établir la relation liant, pour toute section de la colonne, le moment et la rotation spécifique, quelle que soit la valeur des sollicitations.

A titre d'exemple, nous déterminerons ici cette relation pour le cas particulier d'une poutre en acier doux.

Afin de simplifier les calculs, nous remplacerons le véritable diagramme tension-déformation par un diagramme idéal-plastique. Ce dernier suppose (fig. 1) que la matière est complètement élastique jusqu'à la limite d'élasticité qui correspond alors à la limite d'écoulement (fluage) ; au-delà de cette limite et jusqu'à un point correspondant à l'accroissement de résistance naturelle, il y aura augmentation des déformations sans augmentation des tensions. Le même phénomène se retrouve du côté de la compression. Ce diagramme correspond bien au comportement d'aciers doux de bonne qualité pour lesquels il y a peu de différence entre les valeurs de $\sigma_p$ et $\sigma_f$.

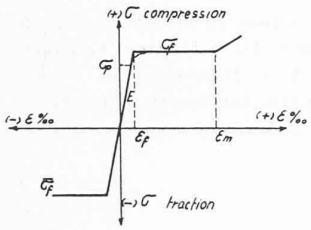



Fig. 1.

Selon la valeur du moment $M$, nous aurons à distinguer les cas suivants :

1. La sollicitation maximum de la section n'atteint nulle part la limite d'élasticité. Alors la formule linéaire

$$k = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EJ}$$

est valable.

2. La sollicitation maximum atteint la limite d'élasticité au côté comprimé de la section.

Soit $P$ la charge. Nous avons :

$$P = \sigma_o F_o.$$

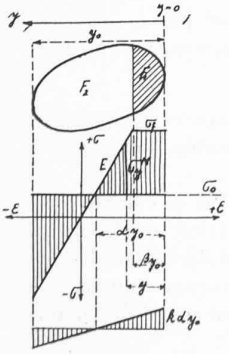



Fig. 2.

Entre les droites $y = 0$ ; $y = \beta y_o$ les sollicitations dans la section, dues au moment fléchissant, ont pour valeur (fig. 2) :

$$\sigma_y = \sigma_f - \sigma_o.$$

Entre les droites $y = \beta y_o$ ; $y = y_o$ elles valent :

$$\sigma_y = \sigma_f - \sigma_o - kE\,(y - \beta y_o).$$

Exprimons que la somme des sollicitations dues au moment fléchissant est nulle (condition d'équilibre) :

$$\int_{F_o} \sigma_y \times d\,F = 0.$$

Après intégration, il vient :

$$F_o\,(\sigma_f - \sigma_o) - k\,E\,(S_2 - \beta y_o\,F_2) = 0. \qquad (1)$$

$S_2$ est le moment statique de la surface $F_2$ par rapport à la droite $y = 0$.

Ecrivons encore que le moment des sollicitations dues au moment fléchissant équilibre ce dernier :

$$\int_{F_o} \sigma_y \times y \times d\,F + M = 0.$$

Intégrons après substitution de l'expression de $\sigma_y$. Nous obtenons :

$$(\sigma_f - \sigma_o)\,S_o - k\,E\,(J_2 - \beta y_o\,S_2) + M = 0. \qquad (2)$$

L'équation (2) est la condition d'équilibre des moments. $S_o$ est le moment statique de la surface $F_o$ par rapport à la droite $y = 0$ et $J_2$ le moment d'inertie de $F_2$ par rapport à cette même droite.

Nous tirons successivement des équations (1) et (2) :

$$k = \frac{1}{E}\,\frac{F_o\,(\sigma_f - \sigma_o)}{S_2 - \beta y_o\,F_2} \qquad (3)$$

et

$$M = k\,E\,(J_2 - \beta y_o\,S_2) - (\sigma_f - \sigma_o)\,S_o. \qquad (4)$$

Ces équations expriment $k$ et $M$ en fonction du paramètre $\beta$. Il en résulte la valeur de la déformation :

$$\eta = \frac{M}{P} = \frac{M}{F_o\,\sigma_o}$$

ainsi que $\frac{dk}{dM} = T_\beta$ qui se calculera en fonction de $\beta$ de la manière suivante :

$$T_\beta = \frac{dk}{dM} = \frac{dk}{d\beta}\,\frac{d\beta}{dM} = \frac{\frac{dk}{d\beta}}{\frac{dM}{d\beta}}.$$

De même :

$$T_\eta = \frac{\frac{dk}{d\beta}}{\frac{1}{F_o\,\sigma_o}\,\frac{dM}{d\beta}} = \frac{dk}{d\eta}.$$

Rappelons que les formules ci-dessus sont absolument générales et valables quelle que soit la forme de la section [1]. Elles sont valables aussi longtemps que les contraintes n'atteignent pas la limite d'élasticité du côté « tendu » de

[1] A titre d'exemple, donnons leur application à une section rectangulaire de dimensions $b.y_o$.

Avec les expressions

$$F_o = b y_o\,;\quad F_2 = b y_o\,(1-\beta)\,;\quad S_2 = \frac{b y_o^2}{2}\,(1-\beta^2)\,;\quad J_2 = \frac{b y_o^3}{3}\,(1-\beta^3)$$

l'équation (1) devient :

$$k = \frac{\sigma_f - \sigma_o}{E y_o}\,\frac{2}{(1-\beta)^2} \qquad (6)$$

et l'équation (2) :

$$M = \frac{b y_o^2}{6}\,(\sigma_f - \sigma_o)\,(1 + 2\beta). \qquad (7)$$

Nous obtenons pour l'ordonnée de la déformation :

$$\eta = \frac{y_o}{6}\,\frac{\sigma_f - \sigma_o}{\sigma_o}\,(1 + 2\beta). \qquad (8)$$

En outre :

$$T_\beta = \frac{12}{(1-\beta)^3\,E\,b\,y_o^3} \qquad (9)$$

$$T_\eta = \frac{\sigma_o}{E}\,\frac{12}{(1-\beta)^3\,y_o^2} \qquad (10)$$

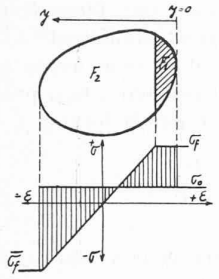


Fig. 3.

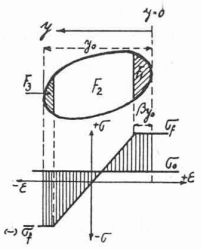


Fig. 4.

la section. Au moment où cette limite est atteinte (fig. 3), le paramètre $\beta$ a une valeur particulière $\beta_o$.

Nous pouvons alors écrire :

$$\sigma_{y_o}^{(M)} = -\sigma_o + \bar{\sigma}_f .$$

Si dans cette équation on introduit l'expression

$$\sigma_{y_o} = \sigma_f - \sigma_o - k_o E (y_o - \beta_o y_o)$$

il vient :

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_f - k_o E (y_o - \beta_o y_o) . \qquad (11)$$

Dans le cas d'une section rectangulaire, (1) et (11) donnent :

$$\beta_o = 1 - 2 \frac{\sigma_f - \sigma_o}{\sigma_f - \bar{\sigma}_f} . \qquad (12)$$

Enfin si $\beta > \beta_o$, la répartition des tensions est celle de la figure 4.

Entre les droites $y = 0$ ; $y = y$, nous avons :

$$\sigma_y^{(M)} = \sigma_f - \sigma_o .$$

puis entre les droites $y = y_1$ ; $y = y_2$ :

$$\sigma_y^{(M)} = \sigma_f - \sigma_o - k E (y - y_1)$$

enfin entre les droites $y = y_2$ ; $y = y_o$ :

$$\sigma_y^{(M)} = \bar{\sigma}_f - \sigma_o .$$

Etant donné que :

$$y_1 = \beta y_o$$

$$y_2 = \beta y_o + \frac{\sigma_f - \bar{\sigma}_f}{kE}$$

l'équation d'équilibre des forces s'écrit :

$$(\sigma_f - \sigma_o) F_1 + (\sigma_f - \sigma_o) F_2 - kE (S_2 - y_1 F_2) + (\bar{\sigma}_f - \sigma_o) F_3 = 0 \qquad (13)$$

et celle des moments :

$$(\sigma_f - \sigma_o) S_1 + (\sigma_f - \sigma_o) S_2 - kE (J_2 - y_1 S_2) + (\bar{\sigma}_f - \sigma_o) S_3 + M = 0 . \qquad (14)$$

Les équations (13), (14) expriment $k$ et $M$ en fonction du paramètre $\beta$.

L'ordonnée de la déformation de l'axe de la colonne sera :

$$\eta = \frac{M}{F_o \sigma_o} .$$

En outre :

$$T_\beta = \frac{dk}{dM} = \frac{\frac{dk}{d\beta}}{\frac{dM}{d\beta}} \qquad T_\eta = \frac{\frac{dk}{d\beta}}{\frac{dM}{d\beta}} F_o \sigma_o .$$

Les formules ci-dessus étant valables pour toute forme de section, nous donnons en note [1] leur application au cas d'une section rectangulaire.

Les équations (13) et (19) sont valables aussi longtemps que n'intervient pas la limite de l'accroissement de résistance naturelle de l'acier doux sur le côté « comprimé » de la section. Ce domaine n'a pratiquement pas grande importance, car seules des colonnes très courtes peuvent avoir un état d'équilibre dans le domaine du raidissement. Du reste le calcul exécuté comme indiqué dans ce travail ne donnerait plus dans ce domaine des résultats exacts. En effet, avec les déformations plastiques apparaissent des tensions de cisaillement non négligeables de part et d'autre de la section. La rotation de la section serait telle que les hypothèses de base du calcul ne seraient plus valables.

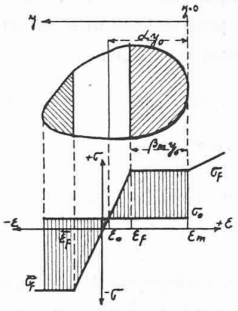


Fig. 5.

Il est cependant intéressant de savoir où se trouve le commencement du raidissement.

Avec les dénominations de la figure 5, nous pouvons écrire :

$$\epsilon_m - \epsilon_o = k \alpha y_o .$$

Mais : $$\alpha y_o = \beta_m \times y_o + \frac{\epsilon_f - \epsilon_o}{k} .$$

Alors : $$\beta_m = \frac{\epsilon_m - \epsilon_f}{k y_o} .$$

$\beta_m$ étant connu, le commencement du raidissement est déterminé.

[1] Pour la section rectangulaire, on a :

$$F_1 = b \beta y_o \qquad F_2 = b \frac{\sigma_f - \bar{\sigma}_f}{kE} \qquad F_3 = b \left[ y_o - \beta y_o - \frac{\sigma_f - \bar{\sigma}_f}{kE} \right]$$

$$S_1 = b \frac{\beta^2 y_o^2}{2} \qquad S_2 = \frac{b}{2} \frac{\sigma_f - \bar{\sigma}_f}{kE} \left( 2 \beta y_o + \frac{\sigma_f - \bar{\sigma}_f}{kE} \right)$$

(13) donne :

$$k = \frac{1}{2 E y_o} \frac{(\sigma_f - \bar{\sigma}_f)^2}{\sigma_o - \bar{\sigma}_f - \beta (\sigma_f - \bar{\sigma}_f)} . \qquad (15)$$

Avec

$$J_2 = \frac{b}{3} (y_2^3 - y_1^3) \qquad S_3 = \frac{b}{2} (y_o^2 - y_2^2)$$

(14) devient :

$$M = \frac{b y_o^2}{6} \left\{ (\sigma_f - \bar{\sigma}_f) \left[ 3 (1 - R^2) - (\beta - R)^2 \right] - 3 (\sigma_f - \sigma_o) \right\} \qquad (16)$$

où nous avons posé, pour simplifier :

$$R = \frac{\sigma_o - \bar{\sigma}_f}{\sigma_f - \bar{\sigma}_f} .$$

La déformation s'écrit :

$$\eta = \frac{M}{b y_o \sigma^o} = \frac{y_o}{6} \left\{ \frac{\sigma_f - \bar{\sigma}_f}{\sigma_o} \left[ 3 (1 - R^2) - (\beta - R)^2 \right] - 3 \frac{\sigma_f - \sigma_o}{\sigma_o} \right\} . \qquad (17)$$

La tangente à la courbe $M(k)$ a pour valeur :

$$T_\beta = \frac{dk}{dM} = \frac{3}{2E \, b y_o^3 (R - \beta)^3} \qquad (18)$$

et celle à la courbe $\eta_1 (k)$ :

$$T_\eta = \frac{3 \sigma_o}{2E \, y_o^2 (R - \beta)^3} . \qquad (19)$$

Dans le cas d'une section rectangulaire, nous connaissons $ky_o$ (équation 15) :

$$ky_o = \frac{1}{2E}\,\frac{\sigma_f - \overline{\sigma}_f}{R - \beta_m} = \frac{\epsilon_m - \epsilon_f}{\beta_m}\,\frac{\triangle\epsilon}{\beta_m}$$

d'où :

$$\beta_m = R\,\frac{1}{\dfrac{\epsilon_f - \overline{\epsilon}_f}{2\,\triangle\,\epsilon} + 1}\,. \qquad (20)$$

**3. — La colonne est chargée excentriquement et la tension maximum ne dépasse pas la limite de proportionnalité (limite d'élasticité avec matière idéale plastique)**

La relation entre la rotation spécifique et le moment fléchissant est $k = -\dfrac{M}{EJ}$ et $\sigma_o$ n'y figure pas !

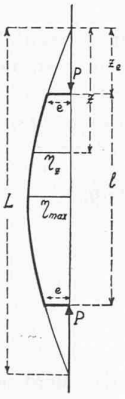



Fig. 6.

Examinons d'abord le cas où l'excentricité est la mêmeaux extrémités de la colonne (fig. 6).

Cherchons $\eta_{max}$ si la charge est $P$. L'équation différentielle donnant la forme de l'axe de la colonne est :

$$\frac{d\eta^2}{dz^2} = -\frac{P\eta_z}{EJ}\,.$$

Elle admet la solution générale :

$$\eta_z = A \sin z\sqrt{\frac{P}{EJ}} + B \cos z\sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

où $A$, $B$ sont des constantes qui se déterminent facilement par les conditions aux limites.

En premier lieu : $B = 0$, car $\eta = 0$ pour $z = 0$. Ensuite, la valeur maximum de

$$\frac{\eta_z}{A} = \sin z\sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

ne peut être que 1, d'où :

$$A = \eta_{max}\,.$$

Par conséquent

$$\eta_z = \eta_{max} \sin z\sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

courbe sinusoïdale de demi-onde $L = \pi\sqrt{\dfrac{EJ}{P}}$. L'équation de l'axe déformé sera donc :

$$\eta_z = \eta_{max} \sin \frac{\pi}{L}\,z. \qquad (21)$$

Comme nous connaissons l'ordonnée $e$ correspondant à l'abscisse $z_e = \dfrac{L - l}{2}$ nous pouvons écrire :

$$e = \eta_{max} \cos \frac{\pi l}{2L}$$

et

$$\eta_{max} = \frac{e}{\cos \dfrac{l}{2\sqrt{\dfrac{EJ}{P}}}}\,. \qquad (I)$$

Il faut maintenant savoir s'il existe une force $P$ pour laquelle l'équilibre de la colonne devient indifférent.

Appliquons le critère du flambage dont nous avons parlé plus haut. Le supplément de flèche maximum $\triangle\eta_{max}$ produit une augmentation de rotation donnée par la formule :

$$\triangle k_{max} = \triangle\eta_{max}\,\frac{P}{EJ}\,.$$

Le déplacement correspondant aura pour valeur

$$\frac{l^2}{\pi^2}\,\triangle\eta_{max}\,\frac{P}{EJ}$$

parce que la différence entre la position nouvelle et initiale de l'axe de la colonne peut être considérée, avec une exactitude très grande, comme une courbe sinusoïdale avec demi-onde $l$ et l'ordonnée maximum $\triangle\eta_{max}$.

La condition d'équilibre indifférent (flambage) s'écrit donc :

$$\triangle\eta_{max} = \frac{l^2}{\pi^2}\,\triangle\eta_{max}\,\frac{P}{EJ}$$

d'où :

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\,.$$

Nous retrouvons la formule d'Euler ! Etant donné que la colonne a été supposée chargée excentriquement et que cette formule ne contient pas l'excentricité, il en résulte que la charge critique ne dépend pas de l'excentricité ! Ceci n'est vrai que pour autant que notre hypothèse de départ soit vraie, c'est-à-dire que la limite d'élasticité ne soit nulle part dépassée.

Les essais vérifient effectivement que, pour des colonnes très élancées, la charge critique ne dépend pas sensiblement de l'excentricité.

On peut retrouver les résultats ci-dessus en exprimant, conformément au critère du flambage, que la dérivée de $P$ par rapport à $\eta_{max}$ est nulle lorsque $P$ est charge critique. En vertu de (I), cette condition s'écrit :

$$\frac{dP}{d\eta_{max}} = \frac{d}{d\eta_{max}}\,\frac{4\,EJ}{l^2}\,\text{arc}^2 \cos \frac{e}{\eta_{max}} = 0\,.$$

Les solutions sont :

$$\eta_{max} = e \qquad P = 0$$

$$\eta_{max} = \infty \qquad P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\,.$$

Bien entendu, la première est sans intérêt et la seconde est le résultat que nous voulions obtenir.

Cherchons maintenant la valeur de la charge qui rend la contrainte maximum de la colonne égale à la contrainte de fluage :

$$\sigma_{max} = \sigma_f\,.$$

Ceci ne peut naturellement avoir lieu que dans la section pour laquelle $\eta = \eta_{max}$. L'équation (I) nous donne :

$$\eta_{max} = \frac{e}{\cos \dfrac{l}{2\sqrt{\dfrac{EJ}{\sigma_o F}}}} = \frac{W\,(\sigma_f - \sigma_o)}{\sigma_o F}$$

et par suite :

$$\cos \frac{l}{2\sqrt{\frac{EJ}{\sigma_o F}}} = \frac{eF}{W} \frac{\sigma_o}{\sigma_f - \sigma_o}. \qquad \text{(II)}$$

Il fournit aisément $\sigma_o$ donc $P$. On peut aussi chercher, dans le même but, $l$, $P$ et l'excentricité étant fixés. L'équation ci-dessus s'écrit, à cet effet :

$$l = 2\sqrt{\frac{EJ}{\sigma_o F}} \text{ arc cos } \frac{eF\,\sigma_o}{W\,(\sigma_f - \sigma_o)}. \qquad \text{(III)}$$

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la longueur de la colonne pour laquelle il y a flambage ; bien entendu nous respectons les conditions ci-dessus ($P$, $e$ donnés et $\sigma_{max} = \sigma_f$). Il suffit de joindre à (III) la condition :

$$P = F\sigma_o = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

formule qui, combinée à (III), donne

$$\frac{\pi}{2} = \text{arc cos } \frac{e\,\frac{\pi^2 EJ}{l^2}}{W\,(\sigma_f - \sigma_o)}$$

ou encore

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = 0.$$

Nous constatons que le flambage n'est possible que pour $l \to \infty$.

Il est intéressant de voir à quel résultat nous conduit le critérium du flambage appliqué au flambage axial.

1er cas : $\sigma_o < \sigma_p$.

Le critère s'écrit :

$$\Delta\eta = \frac{l^2}{\pi^2} \Delta k_{max}$$

avec :

$$\Delta k_{max} = \Delta\eta \frac{P}{EJ}.$$

Il en résulte la formule d'Euler.

2e cas : $\sigma_o > \sigma_p$.

La seule différence avec le premier cas est que $\Delta k_{max} = \frac{\Delta M}{T_k . J}$ c'est-à-dire qu'il faut écrire $T_k$ en lieu et place de $E$. [1]

Généralisons maintenant les résultats précédents pour les rendre valables dans le cas asymétrique.

On a toujours la condition

$$\sigma_{max} = \sigma_f$$

$e_1$ et $e_2$ sont les excentricités comptées algébriquement. $e_1$ est celle qui possède la plus grande valeur absolue.

L'axe a une forme sinusoïdale de demi-période :

$$L = \pi\sqrt{\frac{EJ}{\sigma_o F}}.$$

La figure 7 nous permet d'écrire :

$$l_r = 2\sqrt{\frac{EJ}{\sigma_o F}} \text{ arc cos } \frac{e_1}{\eta_{max}}$$

[1] $T_k$ est connu pour le flambage axial ; voir bibliographie indiquée en dernière page.

si nous rappelons que

$$\eta_{max} = \frac{W\,(\sigma_f - \sigma_o)}{\sigma_o F}$$

puis

$$z_1 = \frac{L - l_r}{2}.$$

Exprimons encore que l'axe passe par $B$ :

$$\eta_{max} \cos\left(\frac{\pi l}{L} - \frac{\pi l_r}{2L}\right) = e_2.$$

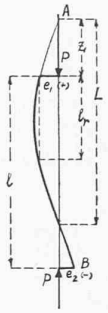


Fig. 7.

Nous en déduisons

$$l = \frac{l_r}{2} + \frac{L}{\pi} \text{ arc cos } \frac{e_2}{\eta_{max}}$$

ou encore

$$l = \left(\text{arc cos } \frac{e_1}{\eta_{max}} + \text{arc cos } \frac{e_2}{\eta_{max}}\right)\sqrt{\frac{EJ}{\sigma_o F}} \qquad \text{(IV)}$$

équation qui est la généralisation cherchée.

### 4. — Le flambage dans le cadre du comportement réel de la matière

Si nous ne nous contentons pas de l'étude du cas particulier où la tension maximum atteint sans la dépasser la tension de fluage, mais cherchons à atteindre l'état d'équilibre indifférent, l'application de la théorie de la plasticité est inévitable. Cette dernière nous permet de connaître les déformations et les tensions des constructions au-delà de la limite d'élasticité.

D'après les résultats acquis aux paragraphes précédents, nous sommes en droit de supposer connues les courbes $k(\eta)$ et $T_\eta(\eta)$. Ces courbes sont faciles à obtenir, avec plus ou moins de travail selon le matériau et la forme de la section. Rappelons que nous avons donné, à titre d'exemple, le calcul détaillé pour une section rectangulaire et matériau idéal plastique (acier doux). Il sera donc possible de confronter les résultats de cette étude avec ceux des essais.

Nous nous proposons ici de trouver la fonction $\sigma_o(\lambda)$, $\sigma_o$ étant la tension de flambage et $\lambda$ l'élancement de la colonne. Ce but peut être atteint par deux chemins : la longueur de la colonne étant donnée on cherche la tension critique ou, la tension $\sigma_o$ étant donnée, on cherche la longueur critique. L'excentricité est donnée dans les deux cas. Nous adopterons cette dernière méthode. Elle est en effet plus simple, du fait que la fonction $M(k)$ varie sensiblement avec $\sigma_o$.

Résolvons d'abord le problème symétrique.

Il nous faut d'abord trouver, pour une déformation $\eta_{max}$ choisie arbitrairement, la longueur $l$ de la colonne en équilibre sous l'action de la force $P$.

Les déformations à l'état d'équilibre sont les déformations réelles, élastiques ou élastoplastiques selon l'endroit.

*Marche à suivre*

Nous adoptons une valeur de $\eta_{max}$ et admettons, à titre de première approximation, que la déformation est sinusoïdale. Cette sinusoïde de demi-période $l$ et d'ordonnée maximum $\eta_{max} - e$ traverse les extrémités de la colonne au centre de gravité des sections (fig. 8).

Puisque nous connaissons $\eta(x)$ et $k(\eta)$ comme nous l'avons remarqué, nous dessinons la courbe $k(x)$. Cette courbe n'est plus une sinusoïde et sa forme dépend sensiblement de $\sigma_o$ et $\eta_{max}$.

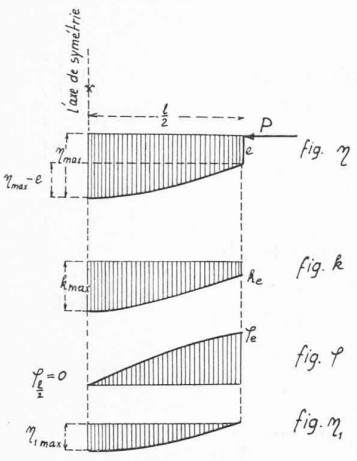



Fig. 8.

Par intégration graphique, nous traçons ensuite la courbe $\varphi(x)$ fournissant les rotations des sections. Puisque nous étudions actuellement le cas symétrique, $\varphi = 0$ pour $\eta = \eta_{max}$.

Par une seconde intégration graphique, nous obtenons la courbe de l'axe déformé $\eta_1(x)$ en seconde approximation.

Nous obtiendrons généralement $\eta_{1max}$ différent de $\eta_{max} - e$. Bien entendu, la bonne valeur de $l$ est celle qui conduira à un $\eta_{1max}$ tel que

$$\eta_{1\,max} = \eta_{max} - e.$$

Cette équation va nous permettre d'éviter des tâtonnements pour trouver $l$. En effet, si au lieu d'une longueur $l$ nous avions adopté une longueur $l_1$, la double intégration graphique changera $\eta_{max}$, dans le rapport $\frac{l_1^2}{l^2}$. Par suite, la condition ci-dessus permet d'écrire :

$$\eta_{1\,max}\,\frac{l_1^2}{l^2} = \eta_{max} - e,$$

ou encore

$$l_1 = l\sqrt{\frac{\eta_{max} - e}{\eta_{1\,max}}},$$

ce qui détermine la longueur $l_1$ cherchée. Nous savons que, pour cette longueur, la colonne est en état d'équilibre ; d'ailleurs $\eta_{max}$ est connu ! $\lambda_1$ est connu également et par suite notre but est atteint.

On peut itérer le procédé ci-dessus pour obtenir des approximations d'ordre supérieur et arriver ainsi à n'importe quel degré de précision.

Nous avons déterminé l'état d'équilibre dans le domaine idéal plastique, mais ignorons encore si l'équilibre est indifférent ou non. Utilisons le critère du flambage pour répondre à cette question : augmentons $\eta_{max}$ d'une quantité $\Delta\eta_{max}$ très petite mais non infiniment petite. Toute la colonne va quitter l'état d'équilibre. On peut tracer la courbe $\Delta\eta(x)$ et constater qu'elle est très voisine d'une sinusoïde, à quelques pour-mille près (fig. 9). Nous adopterons donc la forme sinusoïdale pour la courbe $\Delta\eta(x)$. Puisque nous connaissons la courbe $T_\eta(\eta)$ et que

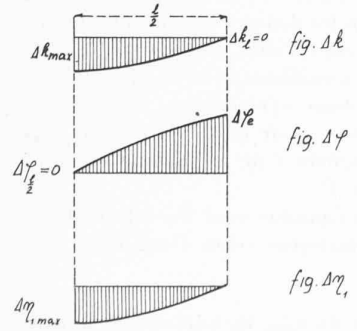



Fig. 9.

$$\Delta k = \Delta\eta \,.\, T_\eta$$

il est facile de tracer la courbe $\Delta k(x)$. Cette dernière n'est plus sinusoïdale. Comme précédemment, nous obtenons successivement $\Delta\varphi(x)$ et $\Delta\eta_1(x)$ par deux intégrations graphiques. Nous corrigeons la longueur de la colonne comme précédemment, de manière que

$$\Delta\eta_1 = \Delta\eta.$$

Ainsi nous trouvons la longueur critique de la colonne. Elle est différente, en général, de $l_{\text{équilibre}}$. Si

$$l_{\text{critique}} > l_{\text{équilibre}},$$

alors le $\eta_{max}$ adopté au début des calculs est inférieur au $\eta_{max}$ qui correspondrait à la charge critique. Dans le cas contraire :

$$l_{\text{critique}} < l_{\text{équilibre}}.$$

Remarquons que pour les intégrations graphiques on peut éviter tout tracé exact des courbes par une orientation judicieuse des calculs (valeurs) numériques. Voir par exemple tableau II.

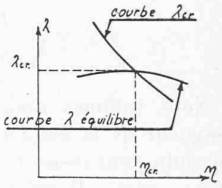



Fig. 10.

Par conséquent, cette méthode peut être considérée comme une méthode de calcul et non comme un procédé graphique.

On peut tracer (fig. 10) les courbes $\lambda_{\text{équi}}(\eta_{max})$ et $\lambda_{cr}(\eta_{max})$ des états d'équilibre et des états critiques. L'intersection fournit les valeurs $\lambda$ et $\mu_{max}$ correspondant à l'état d'équilibre indifférent (flambage). Comme ces valeurs sont déduites de la théorie de la plasticité, et qu'elles correspondent à la réalité, il en résulte un dimensionnement plus économique.

Remarquons que l'intersection en question se trouve au maximum de la courbe $\lambda_{\text{équilibre}}$. Cette propriété découle immédiatement du critère du flambage.

Le problème asymétrique constitue une généralisation aisée du problème symétrique dont nous venons de donner la solution.

Soit $e_1$ l'excentricité qui a la plus grande valeur absolue. La résolution du problème symétrique (fig. 11) pour une telle excentricité permet de déterminer $l_r$. La courbe $\varphi(x)$ détermine $\varphi(e_1)$. Si nous écartons les cas exceptionnels tel que colonnes très courtes, nous pouvons admettre que la région pour laquelle

$$|\eta| < |e_1|$$

est dans la zone élastique. Par suite, la déformation est sinusoïdale dans cette région. Sa tangente au point de raccordement est inclinée de l'angle $\varphi(e_1)$ et son axe est le support de la force $P$. Conformément aux appellations de la figure 11, nous pouvons écrire successivement :

$$\eta_o \sin \pi \frac{z_1}{L_o} = e_1$$

$$\eta_o \sin \frac{\pi z_2}{L_o} = e_2$$

$$\frac{\pi}{L_o}\,\eta_o \cos \frac{\pi z_1}{L_o} = \varphi_{e_1}$$

$$\eta_o \frac{\pi^2}{L_o^2} \sin \frac{\pi z_1}{L_o} = k_1,$$

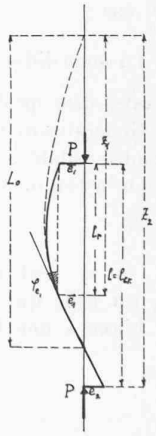



Fig. 11.

équations dont les inconnues sont : $L_o$, $\eta_o$, $z_1$, $z_2$.

Elles admettent la solution

$$L_o = \pi\sqrt{\frac{e_1}{k_1}} = \pi\sqrt{\frac{e_2}{k_2}}$$

$$z_1 = \frac{L_o}{\pi}\,\text{arc tg}\,\frac{L_o}{\pi}\,\frac{k_1}{\varphi e_1}$$

$$\eta_o = \frac{L_o}{\pi}\,\varphi_{e_1}\,\frac{1}{\cos\dfrac{\pi z_1}{L_o}} = \frac{e_1}{\sin\dfrac{\pi z_1}{L_o}}$$

$$z_2 = \frac{L_o}{\pi}\,\text{arc}\sin\frac{e_2}{\eta_o} \quad \text{et} \quad l_{cr} = l = z_2 - z_1 + l_r.$$

$l$ est la longueur critique recherchée, la colonne étant chargée avec les excentricités $e_1$ et $e_2$.

### 5. — Valeurs numériques et conclusions

Le tableau I montre les courbes $k(\eta)$ et $T_\eta(\eta)$ calculées au moyen des formules du chapitre 2. La tension $\sigma = 0{,}5$ t/cm² a été choisie. Ces courbes appellent les remarques suivantes :

$k(\eta)$ est une courbe continue, sans discontinuité, alors que $T_\eta(\eta)$ montre la première discontinuité là où, du côté comprimé de la section, la tension atteint la limite d'élasticité ; la deuxième discontinuité a lieu lorsque la limite d'élasticité est atteinte du côté tendu. Ces discontinuités résultent de l'idéalisation adoptée dans le diagramme idéal plastique. Avec le diagramme exact, il n'y aurait pas d'autre différence qu'un léger arrondi en ces points.

Le tableau II montre les intégrations graphiques pour l'état d'équilibre ainsi que l'application du critère du flambage ($\sigma_o = 0{,}5$ t/cm², excentricité $m = 3$).

Le tableau III contient le résultat de cette étude avec les valeurs $(\sigma_1\,\lambda)$ pour les excentricités $m = 1$ et $m = 3$.

Sur la courbe $(\sigma_1\,\lambda)$, nous avons indiqué les résultats des

TABLEAU II

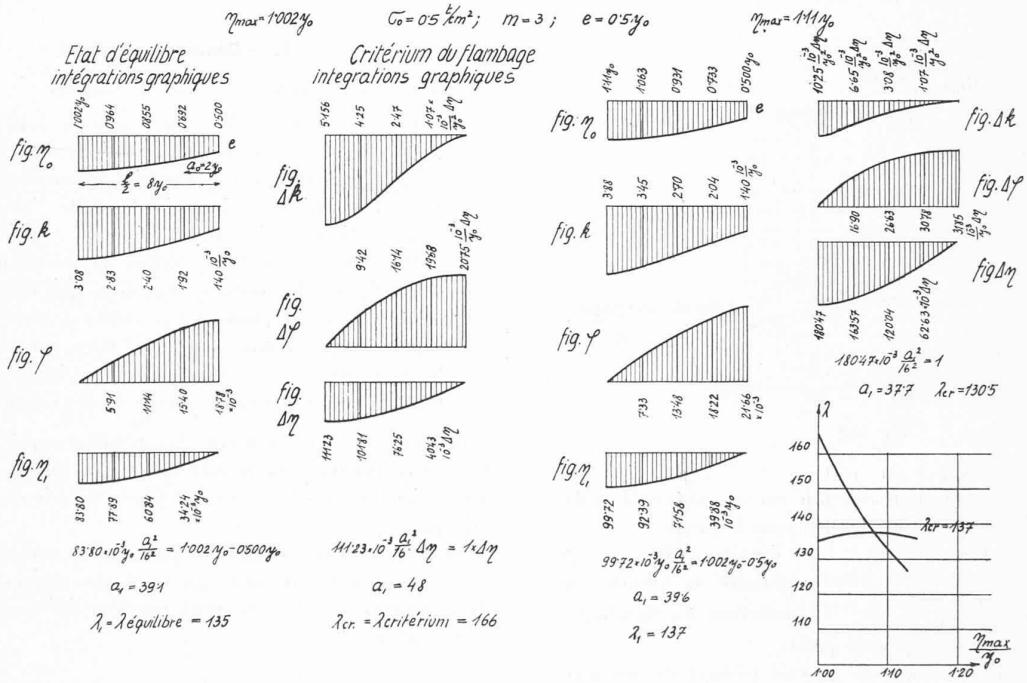



TABLEAU I

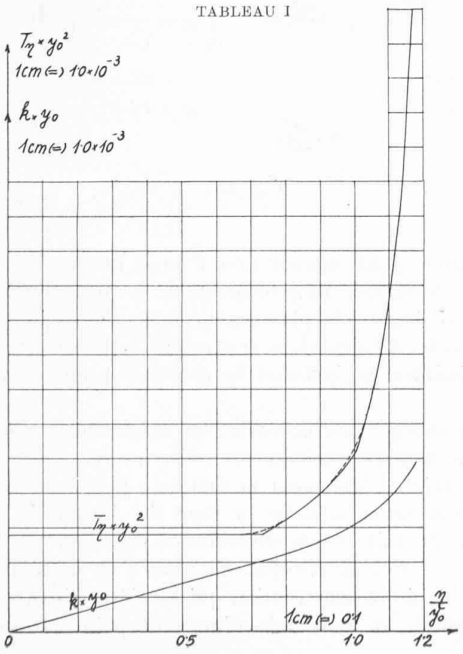
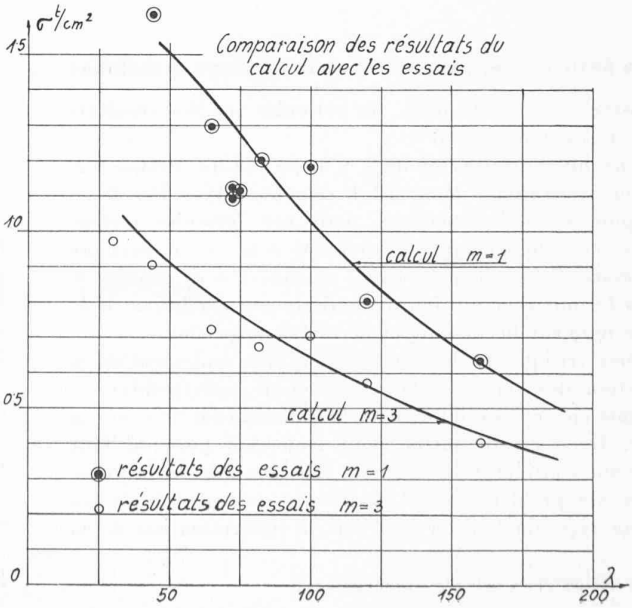



TABLEAU III



essais[1] et, comme on peut voir, ces courbes calculées sont en bon accord avec ceux-ci : elles passent au centre de la surface de dispersion des essais.

Il est maintenant démontré que l'état d'équilibre instable (début du flambage) se trouve dans le domaine élastoplastique s'il y a excentricité.

Si les tensions maximales ne dépassent pas la limite d'élasticité, *le flambage ne se produit pas.*

Par contre, la charge et l'excentricité étant données, il est possible de déterminer la longueur de la colonne pour laquelle :

$$\sigma_{max} = \sigma_f,$$

condition qui exclut tout simplement les déformations permanentes ! Les problèmes de flambage à résoudre dans la pratique comportent généralement cette condition. (La force $P_{eff.}$ multipliée par le facteur de sécurité $n$ ne doit pas provoquer de déformation permanente.)

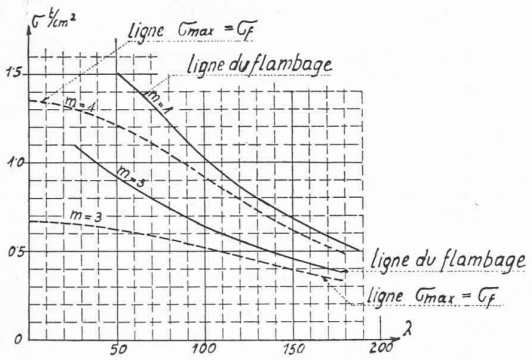



Fig. 12.

La figure 12 montre pour section rectangulaire la différence entre la charge critique et celle pour laquelle $\sigma_{max} = \sigma_f$. Cette différence est visiblement loin d'être négligeable. Si toutefois, au lieu d'une section rectangulaire on adopte une section pratique I, [, etc. (↕ direction du flambage), la différence sera beaucoup plus petite.

La méthode indiquée dans ce travail permet de résoudre tout problème de flambage et cela avec la précision désirée. Rappelons enfin que le premier état d'équilibre indifférent est défini par le critérium du flambage.

### 6. — La flexion pure, cas particulier du flambage excentrique

Si l'excentricité est nulle, on retombe sur les résultats connus de flambage axial.

Faisons, au contraire, tendre $e \to \infty$ en faisant diminuer $P$ de façon à maintenir constant le moment $M = Pe$. Il ne s'agit plus alors de flambage, mais nos formules restent valables et rendent compte des réalités si la limite élastique est dépassée. Il faut bien entendu, puisque $P \to 0$, annuler $\sigma_o$ dans les formules, ce qui fournit notamment la relation $M(k)$ entre le moment fléchissant et la rotation spécifique.

La force critique du flambage dépend non seulement de la distribution des tensions dans la section correspondant à $\eta_{max}$, mais encore notamment de la déformation de toute la colonne. Il en est de même pour la flexion pure : il faut prendre en considération toute la déformation de la construction. Ce problème a été traité auparavant comme un problème type de tension basé sur la détermination de la tension maximum d'une seule section. Le développement de l'idée esquissée ci-dessus conduit à la conclusion qu'il ne saurait y avoir de séparation arbitraire entre les problèmes de stabilité et ceux de tension. Il s'agit en fait d'un seul et même problème et le deuxième groupe n'existe pas !

On vient de voir que la flexion est un cas particulier du flambage excentrique : il s'agit là, économiquement parlant, d'une des applications les plus importantes de la théorie de la plasticité. Nous ne voulons pas entrer dans les détails, d'ailleurs fort intéressants, de ce problème et tenir compte de l'effet des charges stables et alternées. Cette étude dépasserait le cadre de ce travail. Cependant, pour finir, nous aimerions indiquer brièvement comment dimensionner les constructions, dans le cadre de la théorie de la plasticité. Les constructions dimensionnées selon ces indications assureront le même degré de sécurité.

### 7. — Dimensionnement

Les principes suivants sont à observer :

Les dimensions des constructions sont à déterminer de façon à ce que les déformations, multipliées par un ou plusieurs facteurs de sécurité appropriés, ne dépassent pas une limite au-delà de laquelle l'utilisation de la construction serait compromise.

D'autre part, il faut exclure la possibilité de rupture par fatigues alternées. Il faut donc que les fatigues réelles des fibres ne dépassent pas celles tolérées dans le diagramme des tensions alternées. Bien entendu, les charges les plus désavantageuses seront envisagées. Elles seront multipliées au préalable par le ou les facteurs de sécurité.

Ces principes fournissent des résultats qui correspondent beaucoup mieux à la réalité que ceux qui se basent sur la détermination des tensions des fibres extérieures de la section critique.

Pour se rendre compte du fait que la méthode de dimensionnement se basant sur $\sigma_{max}$ n'est pas satisfaisante, il suffit de comparer (fig. 13) les deux poutres ci-dessous (les charges sont stables) :

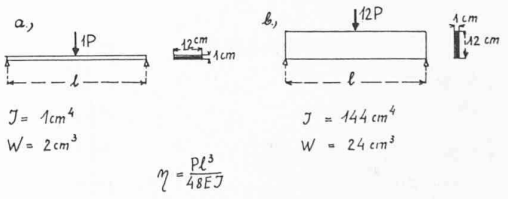



Fig. 13.

La poutre $a$ étant chargée avec $P$ et la poutre $b$ par $12P$, le $\sigma_{max}$ est le même. Mais, cependant, la déformation de la première est douze fois plus grande que celle de la seconde. Par suite, si les déformations et tensions de la seconde poutre sont admissibles de justesse, la première poutre est inutilisable.

*Pour les charges non alternées, les déformations sont déterminantes et non les tensions.*

On doit rejeter également la méthode préconisée par certains auteurs selon laquelle la base de départ du dimensionnement devrait être la déformation spécifique de la fibre extrême d'une section critique. En effet c'est la déformation de l'ensemble de la construction qui est déterminante et non la déformation au voisinage d'un seul point. Il suffit de

[1] Voire bibliographie indiquée en dernière page.

comparer les deux poutres de la figure 14 pour trouver des contradictions dans cette dernière méthode. Comme on sait, la seconde poutre supporte une charge beaucoup plus grande que la première.

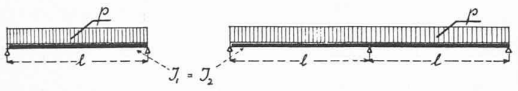



Fig. 14.

Les principes de dimensionnement de la théorie de la plasticité peuvent paraître à première vue osés ou pratiquement pas assez exacts. En fait il n'en est rien et même, après examen approfondi, on s'aperçoit qu'ils sont également applicables à tous les problèmes statiques. Avec une utilisation rationnelle de la théorie de la plasticité, nous pouvons suivre les déformations des constructions aussi dans le domaine élastoplastique.

Cette étude ne cesse pas d'être valable si, en un point de la construction, la tension dépasse la limite élastique. En effet, en négligeant les déformations élastoplastiques, on obtient des résultats erronés pour certaines constructions.

Les méthodes classiques ne respectent pas le principe : « même degré de sécurité pour divers types de constructions ».

Notre méthode de dimensionnement ne contient pas ces fautes et contradictions et permet un dimensionnement plus économique.

Nous espérons que cette étude aidera à placer dans la lumière qu'elle mérite la théorie de la plasticité, qui fut maintes fois attaquée.

BIBLIOGRAPHIE

*Flambage par compression axiale.* Application de la théorie de la plasticité, par A. Szécsi, ingénieur. (« Bulletin technique de la Suisse romande », nº 4, du 12 février 1949.)

*Die Knickfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe*, par Prof. Dr M. Ros et Dr ing. J. Brunner.

# Suppression du passage à niveau de Territet et route de transit

par R. DÉGLON, ingénieur cantonal, Lausanne [1]

La route principale nº 9, de Vallorbe à Brigue, par Lausanne, franchit les voies des chemins de fer fédéraux à Territet, sur territoire de la commune de Montreux-Les Planches. C'est le dernier passage à niveau restant à supprimer sur cette artère de grande communication.

Cette traversée est un obstacle qui n'est plus tolérable sur une route internationale de cette importance et sur laquelle l'intensité de la circulation est une des plus fortes en Suisse. Il y a lieu, en effet, de remarquer que ce passage est fermé plus de six heures sur vingt-quatre, arrêtant ainsi un trafic qui dépasse parfois 5000 véhicules par jour.

La suppression de cette entrave à l'écoulement du trafic a déjà fait l'objet, au cours de ces cinquante dernières années, de très nombreux projets, études, concours d'idées, dont aucun n'a donné de résultat positif jusqu'à ces derniers temps. Une des solutions préconisées consistait à détourner la ligne C. F. F. du Simplon en tunnel entre la gare de Montreux et un point situé à la sortie orientale de Territet, pour laisser la place à la route qui n'avait plus, de ce fait, à franchir les voies.

Mais ce projet, comme les précédents, fut écarté pour des

[1] Article paru au nº 3, 1951, de « La route et la circulation routière », organe officiel de l'*Association suisse des professionnels de la route*, qui a bien voulu mettre à notre disposition les clichés des figures. (Réd.).

Fig. 1. — Situation de la route de transit projetée et du nouveau passage sous voies.