Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 77 (1951)
Heft: 3

Artikel: De la pratique des calculs de compensation
Autor: Ansermet, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58144

L'oscillographe enregistreur des C. F. F. a permis de constater que l'amplitude des vibrations correspondait à une surcharge en plus ou en moins de 10 t environ. La période des oscillations était d'environ 1,8 seconde, dans la position I de la surcharge ; la période semblait être un peu plus courte, de l'ordre de 1,5 seconde lors de la mise en vibration dans la position II de la surcharge (extrémité du porte-à-faux).

Nous devons ajouter encore que les appareils de mesure placés sur des goussets dans les nœuds les plus chargés n'ont donné que des taux de travail très modérés (fig. 10).

Après les essais de résistance, une inspection minutieuse des soudures n'a rien révélé d'anormal et aucune retouche n'a été nécessaire.

Une fois les essais de résistance du tablier terminés, ce dernier a été levé à la hauteur voulue pour permettre le montage des palées articulées et fixes. Ce levage a été fait au moyen de huit treuils électriques travaillant simultanément, frappés à la base de quatre pylônes doubles, de section triangulaire ; les moufles de ces treuils étaient fixés à la partie supérieure des pylônes et à une traverse passant sous le tablier.

Le levage se faisait au droit des nœuds 2 et 17, c'est-à-dire en dehors des points d'attaches des palées.

L'opération de levage a été faite en présence de la Section de Genève de la Société des ingénieurs et architectes et a duré environ quarante minutes (fig 9). Une fois la hauteur nécessaire atteinte, les traverses porteuses du tablier étaient fixées aux pylônes de levage par des boulons. Dès lors il ne restait plus qu'à monter les palées, à les souder et à placer le portique à l'extémité de la voie de roulement, afin de procéder à la mise en place de tous les organes mécaniques.

Les deux ripages, longitudinal et transversal, se sont faits par glissement sur des voies appropriées et sans aucune difficulté.

Pour cela il a fallu naturellement rendre provisoirement rigide la palée articulée, au moyen d'une contrefiche, reliant la partie inférieure de la palée, avec un des nœuds inférieurs des deux poutres principales.

La charpente que nous venons de décrire est une nouvelle preuve des avantages considérables que la soudure électrique permet d'obtenir dans le domaine des constructions métalliques.

Le portique est en service depuis 1949 et donne entière satisfaction (fig. 11 et 12).

Je remercie ici très vivement le Laboratoire d'essais des matériaux de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et son directeur, M. le professeur A. Dumas, ainsi que la Direction des Chemins de fer fédéraux, pour l'aide indispensable qu'ils nous ont apportée lors des essais de résistance de cet ouvrage.

Je remercie aussi les Services industriels de Genève qui ont bien voulu participer aux frais, assez élevés, exigés par ces essais, le reste étant à la charge des constructeurs.

Monthey, le 15 décembre 1950.

DE LA PRATIQUE DES CALCULS DE COMPENSATION

par A. ANSERMET, ingénieur, professeur à l'Ecole polytechnique de Lausanne

Des problèmes de compensation se présentent dans la plupart des domaines de la technique. Il s'agit de déterminer des inconnues en effectuant des mesures ou observations en surnombre. Les équations qui sont à la base de ces calculs sont bien connues (voir par exemple *Bulletin technique 1950*, p. 74) :

$$(1) \qquad L_i + v_i = f_i\,(x, y, z, \ldots) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

où $x, y, z \ldots$ sont les éléments inconnus au nombre de u $(n > u)$; cette surdétermination est à la fois gênante et nécessaire, mais en général elle est voulue. Un point plus ou moins controversé est celui qui consiste à fixer, dans chaque cas, le nombre de mesures ou observations surabondantes. Des considérations d'ordre économique jouent aussi un rôle en pratique. Les quantités L_i sont donc entachées d'erreurs (erreur moyenne quadratique $\pm\, m_i$, poids p_i).

$$(2) \qquad p_i m_i^2 = m^2 = [pvv] : (n - u).$$

En ayant recours à des valeurs provisoires ou approchées $(x_o, y_o, z_o \ldots)$ et en posant : $x = x_o + dx$, $y = y_o + dy$, $z = z_o + dz \ldots$ on obtient, suivant la convention admise pour les signes :

$$(3) \qquad -l_i + v_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz \ldots \text{ ou } + l_i + v_i = = a_i dx + b_i dy + c_i dz \ldots$$

En pratique l'emploi de valeurs provisoires $x_o, y_o, z_o \ldots$ est recommandé même si les équations initiales (1) ont déjà une forme linéaire ; les avantages de ce mode de calcul sont multiples. Les termes l_i jouent le même rôle que les L_i en compensation. On peut choisir les $x_o, y_o, z_o, \ldots$ de manière à rendre nuls jusqu'à u termes l_i.

Il peut y avoir avantage (par exemple si $u = n - 1$) à éliminer les éléments inconnus. Seules subsistent $(n - u)$ équations en l_i et v_i.

La condition de l'extrêmum peut revêtir diverses formes :

$$(4) \qquad [pav] = [pbv] = [pcv] = \ldots = 0$$

$$([\ldots] = \sum(\ldots) = \text{somme})$$

donc en tout $(n + u)$ équations entre les $dx, dy, dz \ldots$ et les v_i $(i = 1,2 \ldots n)$; en combinant les équations (3) et (4) on obtient les équations dites normales, à u inconnues, dont les coefficients sont $[paa], [pbb], [pcc] \ldots [pab], [pac], [pbc] \ldots$ (voir [1], [2]). Les termes absolus de ces équations sont $[pal], [pbl], [pcl] \ldots$

Solution indéterminée des équations normales

Cette solution est intéressante ; elle permet de calculer les poids des inconnues avant de déterminer ces inconnues elles-mêmes ([2] p. 297).

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} dx = [pal]q_{11} + [pbl]q_{12} + [pcl]q_{13} + \ldots = [\alpha l] \\ dy = [pal]q_{21} + [pbl]q_{22} + [pcl]q_{23} + \ldots = [\beta l] \\ dz = [pal]q_{31} + [pbl]q_{32} + [pcl]q_{33} + \ldots = [\gamma l] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} 1 = [paa]q_{11} + [pab]q_{12} + [pac]q_{13} + \ldots \\ 0 = [pba]q_{11} + [pbb]q_{12} + [pbc]q_{13} + \ldots \\ 0 = [pca]q_{11} + [pcb]q_{12} + [pcc]q_{13} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et des systèmes analogues pour $(q_{21}, q_{22}, q_{23}, \ldots)$, $(q_{31}, q_{32}, q_{33} \ldots) \ldots$; le terme absolu 1, dans le membre de gauche, occupe successivement la place de $[pal]$, $[pbl]$, $[pcl] \ldots$ d'un système à l'autre.

Quant aux poids $p_x, p_y, p_z \ldots$ des inconnues ils sont donnés par

$$(7) \qquad \frac{1}{p_x} = q_{11} = \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \quad \frac{1}{p_y} = q_{22} = \left[\frac{\beta\beta}{p}\right], \quad \frac{1}{p_z} = q_{33} = \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] \ldots$$

et en plus

$$q_{12} = \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right], \quad q_{13} = \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right], \quad q_{23} = \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] \ldots$$

Le calcul de ces coefficients $q_{12}, q_{13}, q_{23} \ldots$ ne peut pas être évité ; ces coefficients jouent un rôle lors de la détermination éventuelle du poids d'une fonction des inconnues. On voit bien que le calcul des coefficients de poids $q_{11}, q_{22}, q_{33} \ldots$ peut précéder celui des inconnues ; les L_i (ou l_i) n'ont pas besoin d'être connus pour résoudre le système (6) d'équations.

Une autre solution consiste à combiner u à u soit de $\binom{n}{u}$ manières les n équations (3). Dans le cas où $u = 3$ et $n = 4$, par exemple, le nombre de ces combinaisons est égal à quatre. Il n'y a plus de v_i, donc plus de compensation pour chacun de ces groupes de trois équations. Chacune de ces solutions partielles se voit attribuer un poids exprimé par un déterminant élevé au carré (voir [2] p. 327-329). Ainsi pour l'inconnue dx on a quatre valeurs voisines $dx_{123}, dx_{124}, dx_{134}, dx_{234}$ auxquelles on applique le principe de la moyenne pondérée :

$$(8) \qquad dx = \frac{(a_1b_2c_3)^2 dx_{123} + (a_1b_2c_4)^2 dx_{124} + (a_1b_3c_4)^2 dx_{134} + (a_2b_3c_4)^2 dx_{234}}{(a_1b_2c_3)^2 + (a_1b_2c_4)^2 + (a_1b_3c_4)^2 + (a_2b_3c_4)^2}$$
(pour $p_i = 1$).

Les indices montrent le groupement des équations ; solution analogue pour dy, dz.

Applications

Considérons le cas simple d'un triangle où les trois angles sont mesurés

		Après compensation
$l_1 + v_1 = x$	poids p_1	$P_1 = p_x$
$l_2 + v_2 = y$	» p_2	$P_2 = p_y$
$l_3 + v_3 = 180° - (x + y)$	» p_3	$P_3 = p_{x+y}$

$$[paa] = p_1 + p_3 ; \quad [pab] = p_3 ; \quad [pbb] = p_2 + p_3$$

$$\left.\begin{aligned} (p_1 + p_3)\, q_{11} + p_3 \cdot q_{12} &= 1 \\ p_3 \cdot q_{11} + (p_2 + p_3) q_{12} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

d'où $q_{11} = \dfrac{1}{P_1} = \dfrac{p_2 + p_3}{p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1} = \dfrac{p_2 + p_3}{D}$

de même $\dfrac{1}{P_2} = \dfrac{p_3 + p_1}{D}$, $\quad \dfrac{1}{P_3} = \dfrac{p_1 + p_2}{D}$

et $[p_i : P_i]_1^3 = \dfrac{2D}{D} = 2 = u.$

Les poids des trois angles mesurés sont amplifiés par la compensation ; cette amplification est exprimée par la relation $[p_i : P_i]_{i=1}^{i=n} = u$ qui est générale. Les erreurs moyennes des éléments $x, y, z \ldots$ et de fonctions de ces éléments ont les valeurs les plus favorables lorsque $[p_i : P_i]_1^n = u$. Une compensation n'est vraiment complète que si ce contrôle a été effectué. Les praticiens hésitent parfois devant ce surcroît de calcul.

La station Urirotstock du réseau géodésique suisse fournit un nouvel exemple. De cette station partent 8 directions ; il y a donc 7 inconnues. En combinant deux à deux les 8 directions on obtient 28 angles. Si l'on mesurait et compensait ces angles on aurait pour

$$p_i = 1 \;\; (i = 1, 2, \ldots n) : \quad n = 28 \quad u = 7$$

$$[p_i : P_i]_1^{28} = [1 : P_i]_1^{28} = u = 7 ; \quad P_i = 4$$

Les poids primitifs sont quadruplés par la compensation. Cette méthode est dite parfois « symétrique » parce que les P_i sont égaux, ce qui est aisé à établir. A Urirotstock le Service topographique fédéral a mesuré 11 angles : $n = 11$, $u = 7$ $(x_1, x_2 \ldots x_7)$.

Angles mesurés	*Valeurs compensées*	p_i	P_i	$p_i : P_i$
Rigi-Hundstock	x_1	8	10.7	0.75
Hundstock-Balmeten	x_2	8	11.5	0.69
Balmeten-Krönte	x_3	8	11.5	0.69
Hundstock-Schwarzgrat	x_4	6	12.2	0.49
Schwarzgrat-Krönte	$x_2 + x_3 - x_4$	6	9.9	0.61
Scharti-Hundstock	x_5	6	9.6	0.62
Scharti-Schwarzgrat	$x_4 + x_5$	6	9.6	0.62
Krönte-Schlossberg	x_6	6	9.5	0.63
Schlossberg-Titlis	$x_7 - x_6$	6	9.5	0.63
Krönte-Titlis	x_7	6	11.6	0.52
Titlis-Rigi	$360° - (x_1 + x_2 + x_3 + x_7)$	8	10.7	0.75

$0.49 < p_i : P_i < 0.75$ $\qquad$ $[p_i : P_i]_1^{11} = 7.00 = u$

Il y a encore 17 angles non mesurés directement $(17 = 28 - 11)$ dont on pourrait calculer les poids. Avant de traiter un tel cas, il y a lieu de démontrer l'égalité $[p_i : P_i]_1^n = u$.

Considérons une fonction déjà linéaire

$$F = F_1x + F_2y + F_3z \ldots \quad \text{(poids } P_F\text{)}$$

et le système :

$$l_i + v_i = a_ix + b_iy + c_iz \ldots \quad \text{(poids de } l_i = p_i\text{)}$$

$$(9) \qquad \frac{1}{P_F} = \frac{F_1^2}{[paa]} + \frac{[F_2.1]^2}{[pbb.1]} + \frac{[F_3.2]^2}{[pcc.2]} + \frac{[F_4.3]^2}{[pdd.3]} \cdots$$

(voir [1] p. 148, 182)

$$P_F = P_i \quad \text{pour } F_1 = a_i,\; F_2 = b_i,\; F_3 = c_i \;\ldots$$

$$[F_2.1] = b_i - \frac{[pab]}{[paa]}\, a_i \qquad [F_3.1] = c_i - \frac{[pac]}{[paa]}\, a_i$$

$$[F_3.2] = [F_3.1] - \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\, [F_2.1]$$

Limitons à trois le nombre des inconnues :

$$[p_i : P_i]_1^n = \frac{[p_ia_i^2]_1^n}{[paa]} + \frac{1}{[pbb.1]}\,[p_i[F_2.1]^2]_1^n + \frac{1}{[pcc.2]}\,[p_i[F_3.2]^2]_1^n$$

$$[p_i[F_2.1]^2]_1^n = [(p_ib_i^2 + \frac{[pab]^2}{[paa]^2}\, p_ia_i^2 - 2\,\frac{[pab]}{[paa]}\, p_ia_ib_i)]_1^n = [pbb] - \frac{[pab]}{[paa]}\,[pab] = [pbb.1]$$

De même $[p_i[F_3.1]^2]_1^n = [pcc.1]$

et $[p_i[F_2.1]\,[F_3.1]]_1^n = [pbc.1]$

$$[p_i[F_3.2]^2]_1^n = [pcc.1] + \frac{[pbc.1]^2}{[pbb.1]^2}\,[pbb.1] - 2\,\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\,[pbc.1] = [pcc.2].$$

(10) Finalement $[p_i : P_i]_1^n = \dfrac{[paa]}{[paa]} + \dfrac{[pbb.1]}{[pbb.1]} + \dfrac{[pcc.2]}{[pcc.2]} = u.$

Il y a d'autres solutions (voir [4]).

Traitons succinctement encore un exemple portant sur quatre repères de nivellement R_1, R_2, R_3, R_4 ($u = 3$) reliés deux à deux en épuisant toutes les combinaisons ; il n'y a pas « symétrie », car les poids p_i sont inégaux. Une altitude peut être choisie arbitrairement pour le calcul

Lignes nivelées

($n = 6$)	p_i	$1 : P_i$	$p_i : P_i$
$R_1 - R_2$	0.04	10.7	0.43
$R_1 - R_3$	0.11	6.11	0.67
$R_1 - R_4$	0.035	8.56	0.30
$R_2 - R_3$	0.06	9.0	0.54
$R_2 - R_4$	0.16	4.9	0.78
$R_3 - R_4$	0.025	11.1	0.28
			$[p_i : P_i]_1^6 = 3.00$

$[paa] = 0.125$ $[pbb] = 0.22$

$[pcc] = 0.33$ $[pab] = -0.025$

$[pac] = -0.06$ $[pbc] = -0.16$

$0.28 < (p_i : P_i) < 0.78$

(voir [5] p. 70)

Le quotient $p_i : P_i$ varie beaucoup ici.

Les compensations dans le voisinage de l'extrêmum

Le praticien est parfois amené à s'écarter de la solution théorique ; ces compensations approchées donnent lieu à des calculs plus simples, mais les erreurs moyennes obtenues sont moins favorables. En outre une certaine ambiguïté se manifeste lors de la détermination de ces erreurs moyennes et poids.

Considérons de nouveau les n équations :

$$l_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots$$
$$[pav] = [pbv] = [pcv] = \ldots = 0$$

Admettons pour simplifier $p_i = 1$ ($i = 1,2 \ldots n$)

$$x = [\alpha l], \quad y = [\beta l], \quad z = [\gamma l], \ \ldots \quad \text{(voir [1] p. 107)}$$

$$[a\alpha] = 1 \qquad [b\alpha] = 0 = [c\alpha] \qquad [\alpha v] = 0$$
$$[b\beta] = 1 \qquad [a\beta] = 0 = [c\beta] \qquad [\beta v] = 0$$
$$[c\gamma] = 1 \qquad [a\gamma] = 0 = [b\gamma] \qquad [\gamma v] = 0$$

Limitons à deux le nombre des inconnues et désignons par x' une valeur voisine de x telle que

$$x' = [\alpha' l] \qquad [a\alpha'] = 1 \qquad [b\alpha'] = 0$$

Tandis que la valeur x donne lieu à un système $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bien défini, il n'en sera en général pas de même pour les α'_i ; on peut toutefois vouloir pour x' la plus petite erreur moyenne, ce qui implique pour la fonction φ une valeur minimum

$$\varphi = [\alpha'\alpha'] - 2K_1([a\alpha'] - 1) - 2K_2([b\alpha']) - - 2K_3([\alpha' l] - x')$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i} = 0 \qquad \alpha' = a_i K_1 + b_i K_2 + K_3 l_i \quad (x' \text{ donné})$$

$$v_i = a_i x + b_i y - l_i \qquad [vl] = -[vv]$$

$$[\alpha' v] = [av] K_1 + [bv] K_2 + K_3 [vl] = -K_3 [vv]$$

$$[\alpha' v] = [a\alpha'] x + [b\alpha'] y - [\alpha' l] = x - x' = -K_3 [vv]$$

$$x' = x + K_3 [vv] = x - K_3 [vl] = [al] - K_3 [vl]$$

$$\partial x' : \partial l_i = \alpha_i - K_3 v_i \quad \text{et} \quad [\alpha v] = 0$$

$$M_{x'}^2 = m^2 ([\alpha\alpha] + K_3^2 [vv] - 2K_3 [\alpha v])$$

($M_{x'}$ erreur moyenne)

$$\frac{1}{p_{x'}} = \frac{1}{p_x} + K_3^2 [vv] = \frac{1}{p_x} + \frac{(x - x')^2}{[vv]}$$

où $p_{x'}$ et p_x sont les poids respectifs de x' et x.

De même pour y on trouverait

$$\frac{1}{p_{y'}} = \frac{1}{p_y} + \frac{(y - y')^2}{[vv]} \qquad (p_{x'} < p_x, \quad p_{y'} < p_y).$$

Un calcul analogue peut se concevoir pour des poids p_i inégaux et pour une fonction des inconnues $x, y, z \ldots$

Application. Un cas intéressant est celui de la mesure des angles par la méthode dite des secteurs. Choisissons le cas simple où le tour d'horizon est divisé en trois secteurs comprenant chacun deux sous-secteurs ($n = 9$, $u = 5$). Admettons de plus $p_i = 1$. Des indices $1, 2 \ldots 6$ définiront les sous-secteurs et $7, 8, 9$ les secteurs.

$$(l_7 + v_7) + (l_8 + v_8) + (l_9 + v_9) = 360^\circ \qquad v_7 = v_8 = v_9$$
$$l_7 + v_7 = (l_1 + v_1) + (l_2 + v_2) \qquad v_1 = v_2$$

De même pour $(l_8 + v_8)$ et $(l_9 + v_9)$; combinons les mesures directe l_7 et partielles (l_1, l_2), ce qui donne une moyenne $\dfrac{l_7 + 0{,}5\,(l_1 + l_2)}{1{,}5}$ et pour le tour d'horizon

$$\frac{l_7 + l_8 + l_9 + 0{,}5(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6)}{1{,}5} = 360^\circ + w$$

(w = écart de fermeture)

Cette discordance est répartie uniformément à raison de $^1/_3\ w$ par secteur :

$$l_7 + v_7 = \frac{l_7 + 0{,}5\,(l_1 + l_2)}{1{,}5} - w/_3$$

ce qui donne :

$$l_7 + v_7 = 120^\circ + \frac{1}{9}(4l_7 - 2l_8 - 2l_9 + 2l_1 + 2l_2 - - l_3 - l_4 - l_5 - l_6)$$

et $$l_1 + v_1 = 60^\circ + \frac{1}{18}(4l_7 - 2l_8 - 2l_9 + 11l_1 - 7l_2 - - l_3 - l_4 - l_5 - l_6)$$

$$\frac{1}{P_7} = \frac{1}{2.25} = \frac{1}{P_8} = \frac{1}{P_9}; \quad \frac{1}{P_1} = \frac{11}{18} = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_3} = \frac{1}{P_4} = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{P_6}$$

$$[p_i : P_i]_1^9 = [1 : P_i]_1^9 = 3 \times \frac{1}{2{,}25} + 6 \, . \, \frac{11}{18} = 5 = u$$

Sur les quinze angles compris entre les six directions, il y en a *neuf* qui sont mesurés directement. Considérons un des six autres angles :

$$(l_1 + v_1) + (l_9 + v_9) = 180^\circ + \frac{1}{18}(6l_9 - 6l_8 + 3l_5 + + 3l_6 + 9l_1 - 9l_2 - 3l_3 - 3l_4)$$

et pour le poids P_{1+9} :

$$\frac{1}{P_{1+9}} = \frac{270}{324} = \frac{1}{1{,}20} \, .$$

Solution approchée. La compensation est plus simple si l'on fait abstraction provisoirement des sous-secteurs :

$$v_7 = v_8 = v_9 = \frac{1}{3}(360^\circ - l_7 - l_8 - l_9) = 120^\circ - - \frac{1}{3}(l_7 + l_8 + l_9)$$

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{2}\left\{(l_7 + v_7) - (l_1 + l_2)\right\}$$

$$l_7 + v_7 = 120^\circ + \frac{1}{3}(2l_7 - l_8 - l_9) \, ;$$

$$l_1 + v_1 = 60^\circ + \frac{1}{6}(2l_7 - l_8 - l_9 + 3l_1 - 3l_2)$$

finalement $[1 : P_i]_1^9 = 9 \times \dfrac{1}{1{,}5} = 6$ (au lieu de 5)

Cas où les équations initiales ont une forme périodique

De telles compensations se présentent dans la technique instrumentale, la météorologie, l'hydraulique, etc.

Les équations aux erreurs auront la forme

$$l_i + v_i = A_o + \sum_{K=1}^{K=m} A_K \cos iKp + \sum_{K=1}^{K=m} B_K \sin iKp$$

(voir [1], p. 410)

où $i = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$, K est entier, $p = \frac{2\pi}{n}$, $p_i = 1$.

Il y a $u = 2m + 1$ inconnues (A_o, A_K, B_K). Le calcul est simple car les coefficients quadratiques des équations normales et aux coefficients de poids sont seuls différents de zéro. La valeur de m ne dépasse pas $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n}{2}$ suivant que n est impair ou pair.

Les coefficients des inconnues sont :

		$K = 1$	2	3	4	5	6	
$i = 0$	1	$\cos 0$	$\sin 0$	$\cos 0$	$\sin 0$	$\cos 0$	$\sin 0$	...
1	1	$\cos p$	$\sin p$	$\cos 2p$	$\sin 2p$	$\cos 3p$	$\sin 3p$	...
2	1	$\cos 2p$	$\sin 2p$	$\cos 4p$	$\sin 4p$	$\cos 6p$	$\sin 6p$	...
3	1	$\cos 3p$	$\sin 3p$	$\cos 6p$	$\sin 6p$	$\cos 9p$	$\sin 9p$	...
4	1	$\cos 4p$	$\sin 4p$	$\cos 8p$	$\sin 8p$	$\cos 12p$	$\sin 12p$	...
5	1	.	.	.	.	.	.	
..		.	.	.	.	.	.	
..		.	.	.	.	.	.	
..		.	.	.	.	.	.	
$n-1$								

Il est possible d'éliminer au préalable A_o car $[v] = 0$

$$[l_i]_o^{n-1} = n \, . \, A_o \qquad A_o = \frac{1}{n} [l_i]$$

$$[aa] = n \qquad [bb] = [cc] = [dd] \ldots = \frac{n}{2}$$

$$q_{11} = \frac{1}{n} \qquad q_{22} = q_{33} = q_{44} \ldots = \frac{2}{n} .$$

Le contrôle $[1 : P_i]_o^{n-1}$ se présente comme suit :

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} (\cos^2 0 + \sin^2 0 + \cos^2 0 + \sin^2 0 \ldots) = $$
$$= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} . m$$

$$\frac{1}{P_2} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} (\cos^2 p + \sin^2 p + \cos^2 2p + \sin^2 2p \ldots) =$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} m$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} (\cos^2 2p + \sin^2 2p + \cos^2 4p + \sin^2 4p \ldots) =$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} m$$

. . . .

$$[1 : P_i]_o^{n-1} = n \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} m \right) = 1 + 2m = u$$

$$A_K = \frac{2}{n} [l_i \cos iKp] \qquad B_K = \frac{2}{n} [l_i \sin iKp]$$

Ellipses d'erreur isolées ou groupées

La détermination d'ellipses d'erreur est fréquente en pratique ; la solution la plus simple consiste à calculer ces ellipses individuellement, c'est-à-dire successivement et non pas simultanément. Il faut parfois les grouper par paires ; ce cas sera traité plus loin.

L'ellipse d'erreur peut être engendrée ponctuellement ou tangentiellement ; elle est d'essence géométrique mais fut étudiée surtout par voie analytique (voir [3] p. 205-248). L'ellipse est souvent définie comme étant l'enveloppe d'un rectangle inscrit dans le cercle dit orthoptique ; le paramètre est l'orientation du rectangle.

Considérons un point (x, y) déterminé par des mesures linéaires $L_1, L_2 \ldots L_n$ d'égale précision $(p_i = 1)$

$$L_i + v_i = f_i (x, y) \qquad i = 1, 2 \ldots n, \ u = 2$$

ou $\quad l_i + v_i = a_i dx + b_i dy \qquad a_i = \sin \alpha_i \quad b_i = \cos \alpha_i$

En géodésie moderne les mesures de longueurs tendent à jouer un grand rôle, ce qui justifie l'hypothèse faite. L'orientation des axes de coordonnées est arbitraire ; cette orientation peut être choisie pour que

$$a_i = 0 \quad \text{ou} \quad b_i = 0 \qquad (b_i^2 = 1 \quad \text{ou} \quad a_i^2 = 1)$$

Les erreurs moyennes des y ou des x donnent alors celles des $(l_i + v_i)$; la longueur L_i coïncide en effet avec une parallèle à l'un des axes de coordonnées. Pour chaque direction α_i on aura une paire de tangentes à l'ellipse définie par l'erreur $\pm M_{l_i + v_i}$. De plus on peut éliminer les x et y ; par exemple pour $n = 3$ on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & v_1 + l_1 \\ a_2 & b_2 & v_2 + l_2 \\ a_3 & b_3 & v_3 + l_3 \end{vmatrix} = 0$$

L'ellipse est définie par des paires de tangentes respectivement normales aux directions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Le problème peut être traité par la géométrie synthétique. Aux erreurs moyennes $M_{l_i + v_i}$ correspondent les poids $P_{l_i + v_i} = P_i$ tels que $[p_i : P_i]_1^n = u = 2$.

Ce contrôle est aisé même si la compensation est basée sur des observations conditionnelles où les v_i et l_i sont liés par des équations telles que :

$$[av]_1^n + w_1 = 0, \qquad [bv]_1^n + w_2 = 0, \qquad [cv]_1^n + w_3 = 0$$

les l_i étant contenus dans les w :

$$[p_i : P_i]_1^n = \left[1 - p_i \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - p_i \frac{\left[\frac{b_i}{p_i} . 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} . 1\right]} - p_i \frac{\left[\frac{c_i}{p_i} . 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} . 2\right]} \right]_1^n$$

(voir [4])

les a_i, b_i, c_i n'étant plus les mêmes qu'auparavant.

Le cas où l'ellipse d'erreur a une forme circulaire intéresse plus particulièrement le praticien ; il suffit que l'expression donnant l'erreur moyenne $(M_{l_i + v_i})$ soit indépendante du gisement α_i.

Les cas où les L_i sont des mesures angulaires et non plus linéaires sont traités de façon analogue.

Calcul par paires d'ellipses. Désignons par A (x, y) et B (x', y') la paire de points à compenser ensuite de mesures linéaires L_i effectuées en surnombre ; il y a deux groupes d'équations :

$$l_i + v_i = a_i \, dx + b_i \, dy \qquad \text{(pour } A\text{)}$$
$$l_K + v_K = c_K \, dx' + d_K . dy' \qquad \text{(pour } B\text{)}$$

et en plus : $\quad l + v = adx + b.dy + c.dx' + d.dy'$ (pour A-B)

où $\quad a = -c \quad$ et $\quad b = -d \quad (u = 4)$

soit en tout n équations ; le calcul est plus long et surtout la recherche de la forme circulaire des ellipses est assez malaisée. En revanche la valeur $m^2 = [vv] : (n - u)$, dont dépend l'échelle des courbes, est commune, ce qui est un avantage. Le calcul non simultané des ellipses donne lieu parfois à des valeurs assez différentes pour m.

Une compensation complète fournit aussi les coefficients de poids

$$[\alpha\alpha], [\beta\beta] \ldots [\alpha\beta], [\alpha\gamma] \ldots [\gamma\delta] \ ;$$

les éléments des deux courbes seront donc connus. Le cas peut se présenter où l'on désire tracer les ellipses avant de connaître la valeur de $[vv]$; il faut admettre une valeur provisoire, c'est-à-dire une échelle arbitraire, en attendant de posséder tous les éléments nécessaires à l'achèvement du calcul.

Solutions indéterminées

Considérons des mesures ou observations d'égale précision ($p_i = 1$) au nombre de six ($n = 6$) et le cas où $u = n - u = 3$. Le raisonnement qui suit est d'ailleurs applicable au cas où $u \neq (n - u)$.

$$l_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$[av] = [bv] = [cv] = 0$$

Le même problème peut aussi revêtir la forme :

$$[Av]_1^n + w_1 = [Bv]_1^n + w_2 = [Cv]_1^n + w_3 = 0$$

où les w sont des fonctions des l_i

on a en plus :

$$v_i = A_i K_1 + B_i K_2 + C_i K_3 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

donc en tout $(n + u) = 9$ équations dans les deux éventualités. Le praticien hésite parfois entre les deux formes de compensation, surtout si $u = n - u$. Ce cas a été choisi à dessein, car le nombre d'équations normales est le même quelle que soit la solution choisie.

Ce problème d'indétermination fut déjà traité dans le *Bulletin technique* (1950, p. 266 ou aussi dans [2] p. 326-329). On peut considérer soit le système d'équations normales en x, y, z (ou K_1, K_2, K_3), soit le système des $(n + u)$ équations en v_i, x, y, z (ou v_i, K_1, K_2, K_3). Le résultat est le même en ce sens que le dénominateur des inconnues est égal à :

$$\sum_1^N (a_g\, b_h\, c_K)^2 \quad \text{ou} \quad \sum_1^N (A_g\, B_h\, C_K)^2 \quad \left(N = \binom{n}{u}\right)$$

les indices g, h, K s'obtenant en combinant 3 à 3 les n indices. Les déterminants $(a_g\, b_h\, c_K)$ et $(A_g\, B_h\, C_K)$ sont du même ordre dans le cas particulier, parce que $u = n - u$; en général $u \neq (n - u)$. Si un seul de ces déterminants est différent de zéro le problème est susceptible d'une solution ; cela résulte aussi de la formule (8). Une autre manière de traiter ces cas d'indétermination est due à M. le professeur Hopf, de l'Ecole polytechnique fédérale (voir *Revue suisse des mensurations*, juin 1948).

La substitution d'éléments fictifs aux quantités mesurées l_i et aux poids p_i

Le cas se présente où les équations initiales ont la forme :

$$F_i\,(x, y, z, l_i + v_i, r_i, s_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

où r_i et s_i désignent des paramètres. En ayant recours à des valeurs provisoires x_o, y_o, z_o des inconnues ($x = x_o + dx$, $y = y_o + dy$, $z = z_o + dz$) et en posant :

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial l_i}\right)_o = \lambda_i \qquad F_i\,(x_o, y_o, z_o, l_i, r_i, s_i) = f_i$$

on obtient le développement linéaire :

$$f_i + a_i\,dx + b_i\,dy + c_i\,dz + \lambda_i\,v_i = 0$$

ou

$$-\,v_i = \frac{1}{\lambda_i}\,(a_i\,dx + b_i\,dy + c_i\,dz + f_i) \qquad \text{(poids } p_i\text{).}$$

Une solution peut être trouvée en substituant aux quantités l_i et p_i des éléments fictifs. Ce n'est pas la valeur observée l_i qui subit une correction mais, par exemple, le paramètre r_i :

$$F_i\,(x, y, z, l_i, r_i + v'_i, s_i) = 0$$

et, en posant :

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial r_i}\right)_o = \rho_i$$

on aboutit à la forme :

$$f_i + a_i\,dx + b_i\,dy + c_i\,dz + \rho_i\,v'_i = 0$$

ou

$$-\,v'_i = \frac{1}{\rho_i}\,(a_i dx + b_i dy + c_i dz + f_i) \quad \text{(poids fictif } p'_i\text{)}$$

Considérons d'abord le cas simple où $u = n - 1$ ($n = 4$) et éliminons les inconnues dans le système v_i non fictif :

$$\begin{vmatrix} a_1\, b_1\, c_1\ \ \lambda_1 v_1 + f_1 \\ a_2\, b_2\, c_2\ \ \lambda_2 v_2 + f_2 \\ a_3\, b_3\, c_3\ \ \lambda_3 v_3 + f_3 \\ a_4\, b_4\, c_4\ \ \lambda_4 v_4 + f_4 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$A_1 \lambda_1 v_1 + A_2 \lambda_2 v_2 + A_3 \lambda_3 v_3 + A_4 \lambda_4 v_4 + w = 0$$

et en plus

$$[pvv]_1^n = \text{minimum}$$

ce qui se traduit par l'équation normale :

$$\left[\frac{AA}{p}\,\lambda^2\right]_1^n K + w = 0 \qquad [pvv] = -\,wK$$

où K est le coefficient indéterminé (corrélatif).

Le système fictif donne lieu à l'équation

$$\left[\frac{AA}{p'}\,\rho^2\right]_1^n K' + w = 0 \qquad [p'v'v'] = -\,wK'$$

Par la comparaison de ces résultats on obtient

$$\frac{\lambda_i^2}{p_i} = \frac{\rho_i^2}{p'_i} \quad \text{ou} \quad p'_i = \frac{\rho_i^2}{\lambda_i^2}\,p_i \qquad (p' = \text{poids fictif}).$$

Ce résultat a une portée générale pour n quelconque, ce qui est aisé à établir (voir aussi *Revue suisse des mensurations*, mai-juin 1948). On verrait sans peine qu'on peut substituer aux quantités observées l_i non seulement un paramètre r_i mais encore une fonction d'un paramètre ou d'une inconnue. Dans chaque cas on calculera le poids fictif à attribuer. La solution de certains problèmes de compensation est facilitée par l'emploi de poids et observations fictifs.

Conclusions

Le but de cette note est de mettre en évidence certains aspects des calculs de compensation ; la littérature sur la matière n'est pas toujours très explicite quant aux applications de la méthode. L'accent a été mis ici surtout sur les valeurs obtenues pour les erreurs quadratiques moyennes après compensation (poids des $l_i + v_i$). Ce calcul est parfois relativement long et les praticiens y renoncent. Ils n'ont ainsi pas le bénéfice du contrôle $[p_i : P_i]_1^n = u$; ce résultat est un extrêmum au même titre que $[pvv]$. Une compensation ne peut être considérée comme complète qu'une fois ce contrôle effectué.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Helmert, R. : *Die Ausgleichungsrechnung*. 1924.

[2] Czuber, E. : *Theorie der Beobachtungsfehler*. 1891.

[3] Baeschlin, C. F. : *Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung* (I, II).

[4] Ansermet, A. : *Schweiz. Zeitschrift für Vermessung* (Nr. 8, 1945).

[5] — *Géodésie élémentaire*. 1945.