

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 77 (1951)
Heft: 22

Artikel: Calcul de la déformation de l'image plastique en photogrammétrie
Autor: Bachmann, W.K.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58167>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Abonnements:

Suisse: 1 an, 24 francs

Etranger: 28 francs

Pour sociétaires:

Suisse: 1 an, 20 francs

Etranger: 25 francs

Pour les abonnements

s'adresser à:

Administration

du « Bulletin technique
de la Suisse romande »,
Case postale Riponne 21,
Lausanne

Compte de chèques pos-
taux II. 8775, à Lausanne

Prix du numéro: Fr. 1,40

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitoux, archi-
tecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye,
professeur; E. Latelin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; E. d'Okolski, architecte;
A. Paris, ingénieur; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. L. Archinard, ingénieur; Cl. Grosgrin,
architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte;
G. Furter, ingénieur; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique: A. Stucky, ingénieur, président;
M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

Tarif des annonces

Le millimètre

(larg. 47 mm) 20 cts

Réclames: 60 cts le mm

(largeur 98 mm)

Rabais pour annonces

répétées

Annonces Suisses S.A.



5, Rue Centrale Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

SOMMAIRE: *Calcul de la déformation de l'image plastique en photogrammétrie*, par W. K. BACHMANN, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. — **DIVERS:** *Forces Motrices du Mauvoisin*. — **NÉCROLOGIE:** *François Ræssinger, ingénieur*. — **LES CONGRÈS:** *Association suisse des Electriciens et Union des Centrales suisses d'Electricité; 15^e Journée de la haute fréquence de l'Association suisse des Electriciens*. — **BIBLIOGRAPHIE.** — **CARNET DES CONCOURS.** — **SERVICE DE PLACEMENT.** — **NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES.**

CALCUL DE LA DÉFORMATION DE L'IMAGE PLASTIQUE EN PHOTOGRAMMÉTRIE

Par W. K. BACHMANN, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

Lorsqu'il s'agit de dresser des plans topographiques précis à l'aide de photographies aériennes, on utilise des appareils de restitution automatiques, appelés autographes. Quoique ceux-ci soient de véritables chefs-d'œuvre de la mécanique de précision, les résultats obtenus ne sont jamais parfaits; pour cette raison les constructeurs et hommes de science n'ont cessé de faire des recherches en vue d'une augmentation de la précision.

Durant ces trente dernières années, la photogrammétrie a fait d'immenses progrès grâce à ces recherches et à l'heure actuelle on ne pourrait plus se passer de cette science dans de très nombreux domaines. Qu'on pense seulement aux services qu'elle rend à l'ingénieur civil, et notamment aux hydrauliciens dans la construction des barrages. Là où le géomètre relevait autrefois péniblement quelques points à la planchette, la photogrammétrie permet aujourd'hui de restituer les régions les plus inaccessibles, telles que parois rocheuses, etc. Mais aussi pour la mensuration cadastrale et le relever de cartes topographiques à toutes échelles, la photogrammétrie rend de grands services.

Les appareils de restitution dont on dispose actuellement permettant d'obtenir une très grande précision, la photogrammétrie est de plus en plus utilisée pour l'établissement de plans à grande échelle (1 : 500 à 1 : 2000). Mais comme dans tous les domaines de la technique, en photogrammétrie aussi toute application nouvelle pose des problèmes nouveaux. Ainsi, l'établissement de plans à grande échelle par photogrammétrie aérienne présente encore certaines difficultés.

Lorsqu'on effectue de tels travaux, on est toujours amené au même problème: il faut éliminer les déformations de l'image plastique. Rappelons brièvement ce que l'on entend par là.

Dans les appareils de restitution précis (autographes), les deux vues conjuguées d'un couple sont placées dans les deux chambres de restitution et orientées comme au moment de leur exposition. Mais si les vues ont été prises par avion, la position et l'orientation de la chambre au moment de la prise de vue ne sont connues qu'approximativement. Il s'ensuit que les éléments d'orientation doivent être déterminés empiriquement dans l'appareil de restitution. Dans ce but, on procède tout d'abord à l'orientation relative et ensuite à l'orientation absolue des clichés en se servant de trois points connus, bien visibles sur les plaques photographiques. Normalement, on dispose cependant d'au moins cinq points, bien répartis sur l'ensemble de la région commune aux deux vues. Il ne faut en effet jamais perdre de vue que la photogrammétrie n'est qu'une méthode d'interpolation.

Si l'on fait abstraction de quelques cas particuliers, au point de vue mathématique, les orientations relative et absolue sont rigoureusement déterminées par les données du problème. Mais comme la solution réalisée à l'autographe est obtenue par des moyens mécaniques et optiques, elle est nécessairement entachée d'erreurs d'observation et instrumentales. Il en résulte que la solution n'est plus unique puisqu'elle dépend de ces erreurs résiduelles, le plus souvent inobservables. Nous avons donc une infinité de solutions qui

sont toutes voisines les unes des autres. En effet, pour établir l'orientation relative, nous devons éliminer les parallaxes verticales dans l'ensemble de l'image plastique ou du moins en cinq points indépendants de celle-ci. Mais comme l'erreur moyenne d'observation d'une parallaxe verticale est d'environ $\pm 0,02$ mm, toute parallaxe verticale inférieure en valeur absolue à cette valeur passera en moyenne inaperçue. Nous constatons donc qu'au point de vue pratique le problème de l'orientation relative admet toujours une infinité de solutions, toutes comprises dans un petit domaine d'un espace à cinq dimensions, l'orientation relative dépendant de cinq variables. La théorie des erreurs permet d'étudier de plus près ce domaine et l'on peut ainsi déterminer en particulier la précision obtenue, en calculant les coefficients de poids et de corrélation des variables d'orientation.

De même, l'orientation absolue est influencée par les erreurs accidentelles et instrumentales. Nous en concluons que l'image plastique est entachée aussi bien des erreurs provenant de l'orientation relative que de celles ayant leur origine dans l'orientation absolue. La distinction entre l'orientation relative et l'orientation absolue a du reste un caractère plutôt théorique que pratique, car une fois le problème dégrossi, on ne peut plus les traiter séparément, en ce sens que toute modification de l'orientation relative change aussi l'orientation absolue. Cette dépendance se fait surtout sentir quand il s'agit de dresser des plans à grande échelle. C'est précisément pour cette raison que l'établissement photogrammétrique de ce dernier genre de plans s'est révélé si difficile.

Nous venons de voir que nous pouvons faire varier dans une certaine mesure l'orientation relative de deux clichés sans faire apparaître des parallaxes verticales gênantes. Mais cette variation des éléments d'orientation entraîne forcément des déformations de l'image plastique. Nous constatons ainsi que nous pouvons déformer l'image plastique dans certaines

limites. Une telle déformation se présente du reste toujours indépendamment de la volonté de l'opérateur et est éliminée partiellement par l'orientation absolue. Ces déformations deviennent surtout apparentes, et hélas aussi gênantes, lorsqu'on dresse des plans à grande échelle. Ce phénomène provient essentiellement du fait que les vues pour de tels levés doivent être prises à basse altitude (800 à 1200 mètres sur le sol), ce qui donne un certain flou aux clichés. On est dès lors constamment amené à se demander si l'on peut éliminer — ou du moins réduire — les erreurs résiduelles de l'image plastique en modifiant convenablement les éléments d'orientation sans introduire de parallaxes verticales gênantes. Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord savoir calculer la déformation de l'image plastique en fonction des accroissements attribués aux éléments d'orientation. Notre première tâche consistera donc précisément dans l'établissement de ces relations.

Les erreurs résiduelles de l'image plastique se manifestent tant en planimétrie qu'en altimétrie, mais pratiquement on n'attachera que très rarement la même importance à ces deux catégories d'erreurs. Lorsqu'il s'agit de levés cadastraux, la planimétrie seule étant restituée, on portera toute son attention à l'élimination des erreurs planimétriques. Pour les plans topographiques à grande échelle, on exigera généralement une plus grande précision dans l'altimétrie que dans la planimétrie et ceci surtout pour des terrains relativement peu inclinés. Dans ce dernier cas, on s'efforcera avant tout de réduire les erreurs altimétriques. Il est entendu que le cas général, où les deux genres d'erreurs ont la même importance, se présente également dans la pratique. Nous le rencontrons notamment en photogrammétrie terrestre où le terrain à restituer est souvent très incliné.

Nous n'avons pas la prétention d'épuiser ce problème. Il est vrai que nous établirons des formules tout à fait générales. Mais nous étudierons ensuite tout particulièrement la déformation altimétrique de l'image plastique, où nous avons quelques expériences pratiques grâce aux travaux effectués à l'Institut de photogrammétrie de notre Ecole.

Les formules que nous allons développer furent publiées pour la première fois par O. v. Gruber dans son *Traité de Photogrammétrie*. Malgré tout le respect que nous avons pour cet éminent photogrammètre, une certaine prudence s'impose lorsqu'on veut appliquer ses relations, car elles ne conduisent pas toujours à des résultats corrects. En 1943 déjà, nous attirions l'attention du lecteur dans [1], où nous reprenions cette question en basant nos calculs uniquement sur les opérations et observations qu'on effectue à l'appareil de restitution.

Ces nouveaux résultats, publiés en 1943, n'ont sans doute guère été remarqués par les photogrammètres puisque nous n'avions pas la possibilité de les vérifier pratiquement. Si nous les reprenons aujourd'hui, c'est parce que les travaux pratiques que nous avons pu effectuer entre-temps nous permettent de dire qu'il ne s'agit nullement d'une pure spéculation théorique, mais que les dites formules sont quasi indispensables pour l'établissement de plans à grande échelle par photogrammétrie aérienne.

§ 1. Formules différentielles fondamentales

En établissant les formules pour le calcul de la déformation de l'image plastique, il est indispensable de préciser le type d'appareil de restitution qu'on veut considérer. Si l'on ne

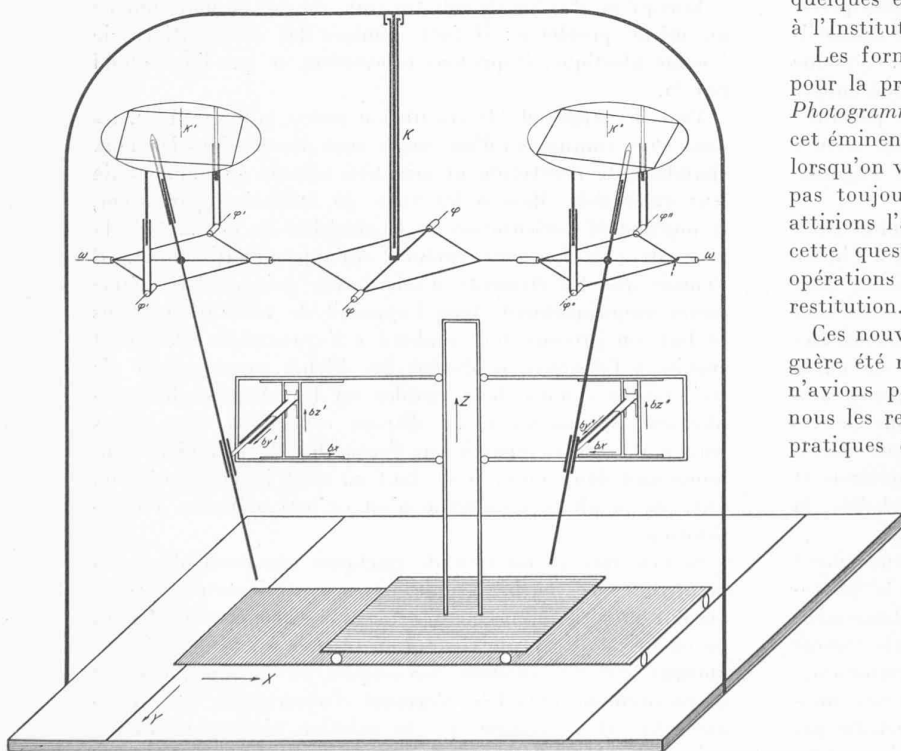


Fig. 1.1. — Schéma de l'autographe Wild A5.

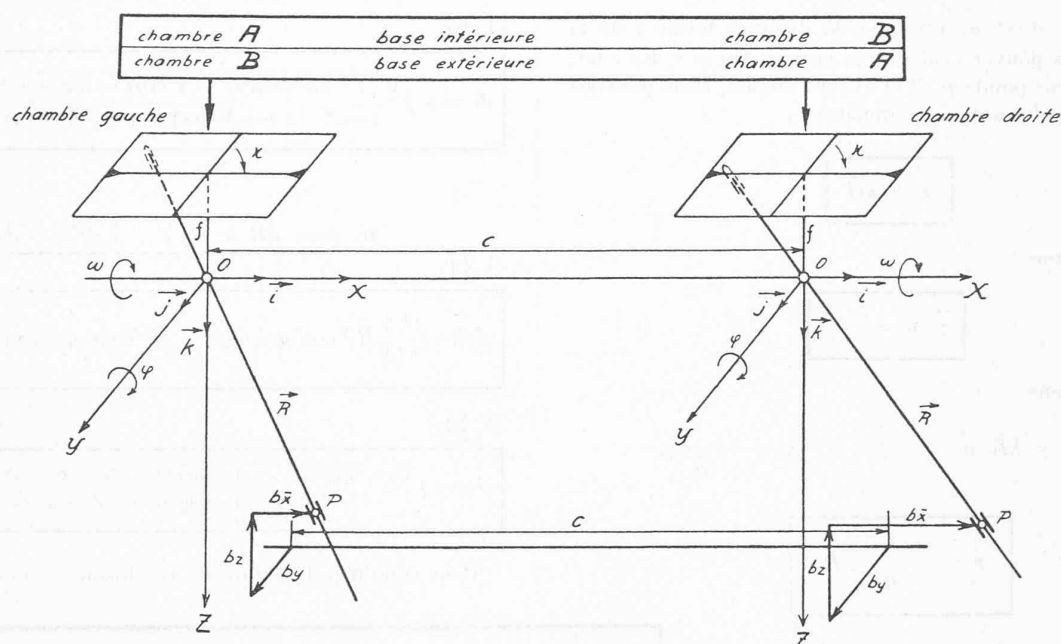


Fig. 1.2. — Systèmes de coordonnées et sens positif des variables pour un observateur placé devant l'autographe.

tient pas compte de cette nécessité, on risque de s'égarer dans des calculs purement formels qui n'ont plus rien de commun avec les opérations et observations qu'on effectue à l'autographe lors de la restitution. Nous allons considérer un appareil de restitution à projection mécanique du type le plus utilisé (constructions Santoni ou Wild, par exemple). Pour éviter toute confusion, nous adapterons nos formules à l'autographe Wild A5, mais il va de soi qu'elles resteront encore valables pour tous les autres appareils de restitution du même type. D'une façon générale, on peut dire qu'elles s'appliqueront à tous les appareils de restitution à projection mécanique. Si l'on observe par contre directement l'image plastique (Multiplex), ces formules doivent être quelque peu modifiées.

Le fonctionnement de l'autographe Wild A5 étant bien connu, nous nous bornerons à en donner le schéma; voir figure 1.1.

Le lecteur non initié trouvera tous renseignements utiles dans la publication [2]. Les systèmes de coordonnées, ainsi que le sens positif des variables, que nous adopterons dans cet exposé, sont indiqués à la figure 1.2.

Cette figure montre que nous désignons la chambre gauche (pour un observateur placé devant l'autographe et regardant dans les lunettes d'observation) par A et la chambre droite par B lorsque la base est introduite vers l'intérieur. Par contre, si la base est à l'extérieur, la chambre gauche est désignée par B et la chambre droite par A. Moyennant cette convention, les formules que nous établirons seront valables pour les deux cas, ce qui est très appréciable pour les travaux de triangulation aérienne.

Considérons l'une quelconque des deux chambres de restitution. Par définition, on entend par « axe de chambre » la droite qui passe par le centre (mécanique) de projection O et le point principal S du cliché. En désignant le vecteur unité, porté par l'axe de la chambre, par \vec{n} , nous avons d'après la figure 1.3

$$(1.1) \quad \vec{n} = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi \sin \omega + \vec{k} \cos \varphi \cos \omega.$$

Lorsque l'opérateur observe dans l'autographe un point quelconque de l'image plastique, les deux marques repères sont projetées en deux points conjugués des clichés. Soient P la douille conductrice de l'une des chambres et p le point image observé. En faisant abstraction de quelques particularités d'ordre constructif de l'autographe, qui sont ici sans importance, nous pouvons dire que les points p, O et P sont alignés. Si (X, Y, Z) sont les coordonnées cartésiennes du point P, nous avons, en posant $\vec{OP} = \vec{R}$

(1.2)

$$\vec{R} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z.$$

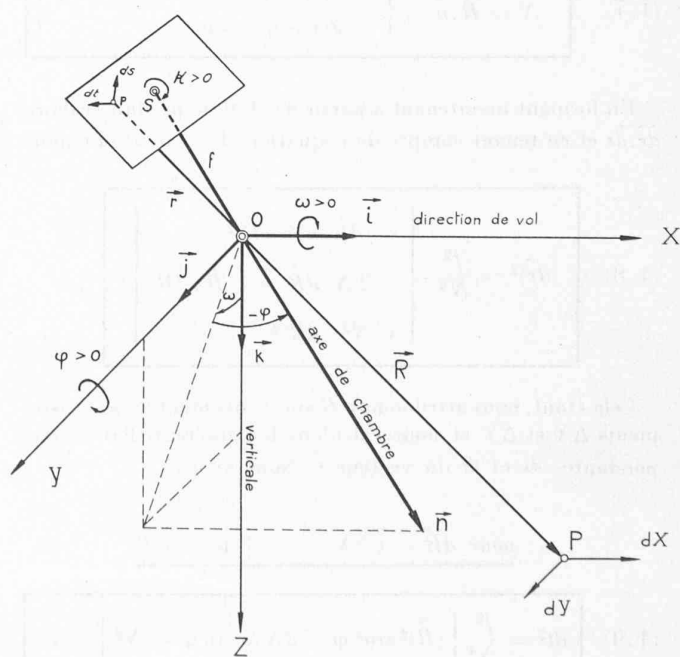


Fig. 1.3.

Connaissant \vec{R} et \vec{n} , ainsi que la distance focale f de la chambre, nous pouvons calculer le vecteur $\vec{Op} = \vec{r}$. En effet, puisque les trois points p , O et P sont alignés, nous pouvons écrire, en introduisant un paramètre λ :

$$(1.3) \quad \boxed{\vec{r} = \lambda \vec{R}}$$

mais nous avons

$$(1.4) \quad \boxed{\vec{r} \cdot \vec{n} = -f}$$

d'où nous tirons

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{R} \cdot \vec{n} = -f \quad \lambda = -\frac{f}{\vec{R} \cdot \vec{n}}$$

$$(1.5) \quad \boxed{\vec{r} = -\frac{f}{\vec{R} \cdot \vec{n}} \vec{R}}$$

En considérant dans cette formule f et \vec{n} comme constantes et \vec{R} comme variable, nous pouvons calculer la variation du vecteur \vec{r} en fonction d'un accroissement $d\vec{R}$, attribué à \vec{R} . La différentiation de la formule (1.5) nous donne

$$(1.6) \quad \boxed{dr = -\frac{f}{\vec{R} \cdot \vec{n}} \left\{ \frac{d\vec{R} \cdot \vec{n}}{\vec{R} \cdot \vec{n}} \vec{R} - d\vec{R} \right\}}$$

Désignons le produit scalaire $\vec{R} \cdot \vec{n}$ par N ; les équations (1.1) et (1.2) nous donnent alors

$$(1.7) \quad \boxed{N = \vec{R} \cdot \vec{n} = \begin{Bmatrix} -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \sin \omega \\ + Z \cos \varphi \cos \omega \end{Bmatrix}}$$

En formant maintenant à partir de (1.6) le produit scalaire $\vec{dr} \cdot \vec{dr}$ et en tenant compte de l'équation (1.7), nous obtenons

$$(1.8) \quad \boxed{(\vec{dr})^2 = \frac{f^2}{N^4} \cdot \begin{Bmatrix} + (\vec{dR} \cdot \vec{n})^2 \cdot (\vec{R})^2 \\ - 2N (\vec{dR} \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{R} \cdot \vec{dR}) \\ + N^2 \cdot (\vec{dR})^2 \end{Bmatrix}}$$

Cela étant, nous attribuons à \vec{R} successivement les accroissements ΔX et ΔY et nous calculons les différentielles correspondantes ds et dt du vecteur \vec{r} . Nous avons

$$(1.9) \quad \begin{aligned} & \text{a) pour } d\vec{R} = \vec{i} \Delta X \quad |d\vec{r}| = dt \\ & dt^2 = \frac{f^2}{N^4} \left\{ (\vec{R})^2 \sin^2 \varphi + 2NX \sin \varphi + N^2 \right\} \Delta X^2 \end{aligned}$$

(1.10)

$$dt = +f \frac{\sqrt{(Y^2 + Z^2) \sin^2 \varphi + (Y \sin \omega + Z \cos \omega)^2 \cos^2 \varphi}}{(-X \sin \varphi + Y \cos \varphi \sin \omega + Z \cos \varphi \cos \omega)^2} \Delta X$$

b) pour $d\vec{R} = \vec{j} \Delta Y \quad |d\vec{r}| = ds$

(1.11)

$$ds^2 = \frac{f^2}{N^4} \left\{ (\vec{R})^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \omega - 2NY \cos \varphi \sin \omega + N^2 \right\} \Delta Y^2$$

(1.12)

$$ds = +f \frac{\sqrt{(-X \sin \varphi + Z \cos \varphi \cos \omega)^2 + (X^2 + Z^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \omega}}{(-X \sin \varphi + Y \cos \varphi \sin \omega + Z \cos \varphi \cos \omega)^2} \Delta Y$$

Pour simplifier l'écriture de ces formules, nous posons

(1.13)

$$\Phi = \frac{\sqrt{(Y^2 + Z^2) \sin^2 \varphi + (Y \sin \omega + Z \cos \omega)^2 \cos^2 \varphi}}{(-X \sin \varphi + Y \cos \varphi \sin \omega + Z \cos \varphi \cos \omega)^2}$$

(1.14)

$$\Psi = \frac{\sqrt{(-X \sin \varphi + Z \cos \varphi \cos \omega)^2 + (X^2 + Z^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \omega}}{(-X \sin \varphi + Y \cos \varphi \sin \omega + Z \cos \varphi \cos \omega)^2}$$

et nous trouvons ainsi

(1.15)

$$dt = +f \Phi \cdot \Delta X$$

(1.16)

$$ds = +f \Psi \cdot \Delta Y$$

Ces deux dernières formules, qui définissent un système de coordonnées (s, t) sur les clichés, permettent de calculer le déplacement différentiel (ds, dt) de la marque repère sur le cliché en fonction du déplacement $(\Delta X, \Delta Y)$ de la douille conductrice dans un plan horizontal de l'espace de l'image plastique.

Ce résultat étant acquis, nous considérons de nouveau le vecteur $\vec{Op} = \vec{r}$ (voir figure 1.3), que nous supposons *solidaire de la chambre*. Imprimons maintenant les rotations différentielles $d\kappa$, $d\omega$ et $d\varphi$ à la chambre et soit $d\vec{u}$ le vecteur représentant la rotation résultante. La figure 1.4 nous donne

$$(1.17) \quad d\vec{u} = \begin{Bmatrix} + \vec{i} (-d\kappa \sin \varphi - d\omega) \\ + \vec{j} (d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) \\ + \vec{k} (d\kappa \cos \varphi \cos \omega + d\varphi \sin \omega) \end{Bmatrix}$$

Le vecteur \vec{R} étant par hypothèse *solidaire de la chambre*, il subit un accroissement $d\vec{R}$, qui est donné par la formule

(1.18)

$$d\vec{R} = d\vec{u} \wedge \vec{R}$$

En tenant compte de (1.17), nous obtenons

$$(1.19) \quad d\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (-d\kappa \sin \varphi - d\omega) & (d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) & (d\kappa \cos \varphi \cos \omega + d\varphi \sin \omega) \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Soit $(\vec{R} + d\vec{R})$ ce nouveau vecteur. Déterminons son intersection avec le plan horizontal $Z = \text{constante}$. Dans ce but, nous introduisons un paramètre λ et nous formons l'expression $\lambda(\vec{R} + d\vec{R})$, qui devient :

$$(1.20) \quad \lambda(\vec{R} + d\vec{R}) = \left\{ \vec{i} \lambda \begin{vmatrix} X + Z(d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) \\ -Y(d\kappa \cos \varphi \cos \omega + d\varphi \sin \omega) \end{vmatrix} + \vec{j} \lambda \begin{vmatrix} Y + X(d\kappa \cos \varphi \cos \omega + d\varphi \sin \omega) \\ +Z(d\kappa \sin \varphi + d\omega) \end{vmatrix} + \vec{k} \lambda \begin{vmatrix} -X(d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) \\ Z + Y(-d\kappa \sin \varphi - d\omega) \end{vmatrix} \right\}.$$

Nous obtenons le point d'intersection cherché lorsque la composante du vecteur $\lambda(\vec{R} + d\vec{R})$ dans la direction de \vec{k} est égale à Z , ce qui nous donne la condition

$$\lambda \begin{vmatrix} Z + Y(-d\kappa \sin \varphi - d\omega) \\ -X(d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) \end{vmatrix} = Z$$

ou bien

$$(1.21) \quad \lambda = \frac{1}{1 + \frac{Y}{Z}(-d\kappa \sin \varphi - d\omega) - \frac{X}{Z}(d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega)}.$$

Nous pouvons développer cette expression en série ; en négligeant les termes supérieurs au premier ordre, nous obtenons

$$(1.22) \quad \lambda = \begin{vmatrix} 1 + \frac{Y}{Z}(d\kappa \sin \varphi + d\omega) \\ + \frac{X}{Z}(d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) \end{vmatrix}$$

En introduisant cette valeur de λ dans la formule (1.20), on obtient, toujours aux termes du second ordre près

$$(1.23) \quad \lambda(\vec{R} + d\vec{R}) = \begin{vmatrix} \vec{i} \begin{vmatrix} X + Z(d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) - Y(d\kappa \cos \varphi \cos \omega + d\varphi \sin \omega) \\ + \frac{XY}{Z}(d\kappa \sin \varphi + d\omega) + \frac{X^2}{Z}(d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) \end{vmatrix} \\ \vec{j} \begin{vmatrix} Y + X(d\kappa \cos \varphi \cos \omega + d\varphi \sin \omega) + Z(d\kappa \sin \varphi + d\omega) \\ + \frac{Y^2}{Z}(d\kappa \sin \varphi + d\omega) + \frac{XY}{Z}(d\kappa \cos \varphi \sin \omega - d\varphi \cos \omega) \end{vmatrix} \\ \vec{k} \cdot Z \end{vmatrix}.$$

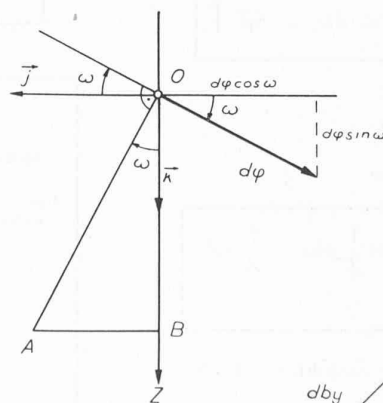
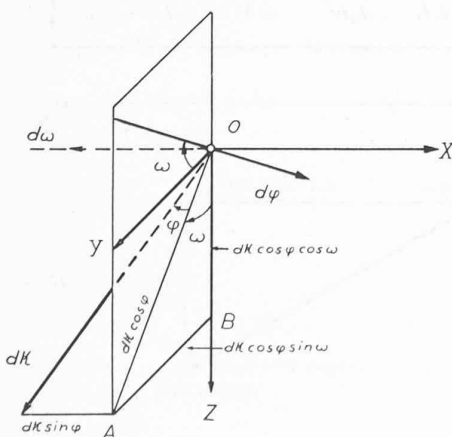
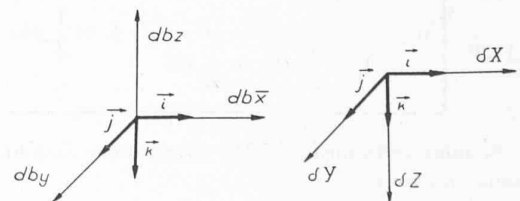


Fig. 1.4.



En posant

$$(1.24) \quad \lambda(\vec{R} + d\vec{R}) = \vec{i}(X + d_1K) + \vec{j}(Y + d_1L) + \vec{k}Z$$

nous obtenons finalement

$$(1.25) \quad d_1 K = \left\{ \begin{array}{l} + \left\{ Z \cos \varphi \sin \omega - Y \cos \varphi \cos \omega + \frac{XY}{Z} \sin \varphi + \frac{X^2}{Z} \cos \varphi \sin \omega \right\} d\kappa \\ - \left\{ Z \cos \omega + Y \sin \omega + \frac{X^2}{Z} \cos \omega \right\} d\varphi + \frac{XY}{Z} d\omega \end{array} \right\}$$

$$(1.26) \quad d_1 L = \left\{ \begin{array}{l} + \left\{ X \cos \varphi \cos \omega + Z \sin \varphi + \frac{Y^2}{Z} \sin \varphi + \frac{XY}{Z} \cos \varphi \sin \omega \right\} d\kappa \\ + \left\{ X \sin \omega - \frac{XY}{Z} \cos \omega \right\} d\varphi + Z \left\{ 1 + \frac{Y^2}{Z^2} \right\} d\omega \end{array} \right\}$$

Avant de continuer ces développements, rappelons la signification géométrique des formules (1.25) et (1.26). Supposons qu'on ait un rayon lumineux partant du point image p et passant par le centre de projection O . Ce rayon coupe le plan horizontal $Z = \text{constante}$ en un point P dont les coordonnées sont (X, Y, Z) . Lorsqu'on imprime les rotations $d\varphi, d\omega, d\kappa$ à la chambre, le rayon les subit également et intercepte le plan horizontal $Z = \text{constante}$ en un point \bar{P} de coordonnées $X + d_1 K, Y + d_1 L, Z$.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque nous imprimons un déplacement différentiel à la douille conductrice; attribuons aux composantes de base les accroissements $(db\bar{x}, db y, db z)$ et imprimons au chariot de base une translation de composantes $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$. Le signe positif de ces variables est indiqué à la figure 1.4. En désignant le déplacement résultant de la douille conductrice par $d_2 \vec{R}$, nous avons

(1.27)

$$d_2 \vec{R} = \vec{i}(db\bar{x} + \delta X) + \vec{j}(db y + \delta Y) + \vec{k}(-db z + \delta Z).$$

Cherchons l'intersection de cette nouvelle position de la tige conductrice avec le plan horizontal $Z = \text{constante}$. Les calculs sont les mêmes que précédemment. En introduisant un paramètre μ , nous formons l'expression

$$(1.28) \quad \mu (\vec{R} + d_2 \vec{R}) = \left\{ \begin{array}{l} + \vec{i} \mu (X + db\bar{x} + \delta X) \\ + \vec{j} \mu (Y + db y + \delta Y) \\ + \vec{k} \mu (Z - db z + \delta Z) \end{array} \right\}$$

et nous obtenons ainsi pour μ

$$(1.29) \quad \mu(Z - db z + \delta Z) = Z$$

ou bien aux termes du second ordre près

$$(1.30) \quad \mu = \frac{1}{1 - \frac{1}{Z} db z + \frac{1}{Z} \delta Z} = 1 + \frac{1}{Z} db z - \frac{1}{Z} \delta Z.$$

Si nous introduisons cette valeur dans l'équation (1.28), nous trouvons

$$(1.31) \quad \mu (\vec{R} + d_2 \vec{R}) = \left\{ \begin{array}{l} + \vec{i} (X + db\bar{x} + \delta X) \\ + \vec{j} (Y + db y + \delta Y) \\ + \vec{k} (Z - db z + \delta Z) \end{array} \right\}$$

ou, en négligeant les termes supérieurs au premier ordre,

(1.32)

$$\mu (\vec{R} + d_2 \vec{R}) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{i} \left\{ X + db\bar{x} + \delta X + \frac{X}{Z} db z - \frac{X}{Z} \delta Z \right\} \\ \vec{j} \left\{ Y + db y + \delta Y + \frac{Y}{Z} db z - \frac{Y}{Z} \delta Z \right\} \\ \vec{k} \cdot Z \end{array} \right\}$$

Si nous posons

$$(1.33) \quad \mu (\vec{R} + d_2 \vec{R}) - \vec{R} = \vec{i} d_2 K + \vec{j} d_2 L$$

l'équation (1.32) nous donne

$$(1.34) \quad d_2 K = db\bar{x} + \delta X + \frac{X}{Z} db z - \frac{X}{Z} \delta Z$$

$$(1.35) \quad d_2 L = db y + \delta Y + \frac{Y}{Z} db z - \frac{Y}{Z} \delta Z.$$

Considérons maintenant simultanément les intersections du rayon \vec{pO} et de la tige conductrice avec le plan horizontal $Z = \text{constante}$ et formons la différence entre les coordonnées de ces points (voir fig. 1.5); nous avons

$$(1.36) \quad \Delta X = d_1 K - d_2 K \quad \Delta Y = d_1 L - d_2 L$$

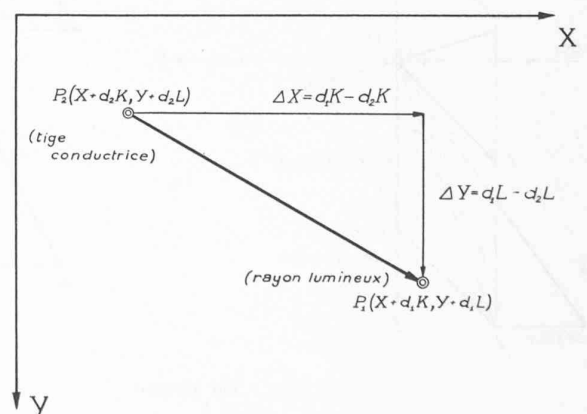


Fig. 1.5.

En introduisant deux nouvelles grandeurs dL et dK au moyen des équations

$$(1.37) \quad dK = \left\{ \begin{array}{l} + \left\{ Z \cos \varphi \sin \omega - Y \cos \varphi \cos \omega + \frac{XY}{Z} \sin \varphi + \frac{X^2}{Z} \cos \varphi \sin \omega \right\} d\kappa \\ - \left\{ Z \cos \omega + Y \sin \omega + \frac{X^2}{Z} \cos \omega \right\} d\varphi + \frac{XY}{Z} d\omega - d\bar{x} - \frac{X}{Z} dbz \end{array} \right\}$$

$$(1.38) \quad dL = \left\{ \begin{array}{l} + \left\{ X \cos \varphi \cos \omega + Z \left(1 + \frac{Y^2}{Z^2} \right) \sin \varphi + \frac{XY}{Z} \cos \varphi \sin \omega \right\} d\kappa \\ + \left\{ X \sin \omega - \frac{XY}{Z} \cos \omega \right\} d\varphi + Z \left\{ 1 + \frac{Y^2}{Z^2} \right\} d\omega - dby - \frac{Y}{Z} dbz \end{array} \right\}$$

les relations (1.36) deviennent

$$(1.39) \quad \Delta X = dK - \delta X + \frac{X}{Z} \delta Z$$

$$(1.40) \quad \Delta Y = dL - \delta Y + \frac{Y}{Z} \delta Z.$$

En vertu des équations (1.15) et (1.16), les différences correspondantes Δs et Δt des coordonnées sur les clichés sont

$$(1.41) \quad \Delta t_A = + j\Phi_A \left\{ dK_A - \delta X + \frac{X_A}{Z} \delta Z \right\}$$

$$(1.42) \quad \Delta s_A = + j\psi_A \left\{ dL_A - \delta Y + \frac{Y_A}{Z} \delta Z \right\}$$

Chambre B

$$(1.43) \quad \Delta t_B = + j\Phi_B \left\{ dK_B - \delta X + \frac{X_B}{Z} \delta Z \right\}$$

$$(1.44) \quad \Delta s_B = + j\psi_B \left\{ dL_B - \delta Y + \frac{Y_B}{Z} \delta Z \right\}$$

où nous avons introduit les indices A et B suivant que les grandeurs mentionnées se rapportent à l'une ou à l'autre des deux chambres de restitution.

Arrêtons-nous un instant à ces formules, afin de bien nous rendre compte de leur signification géométrique. Supposons qu'on ait introduit deux vues conjuguées quelconques dans l'autographe et qu'elles aient été orientées correctement. Nous voyons alors une image plastique du terrain dans l'autographe et la marque repère spatiale peut être placée en un point quelconque de cette image. L'opérateur voit la marque spatiale en un point de l'image plastique, lorsque les deux marques repères coïncident avec les points image conjugués sur les clichés. Il les y amène en déplaçant convenablement le chariot de base.

Cette orientation initiale correcte des deux clichés étant par hypothèse réalisée, nous imprimons aux deux chambres les rotations $(d\varphi_A, d\omega_A, d\kappa_A)$ et $(d\varphi_B, d\omega_B, d\kappa_B)$. De plus, nous modifions les composantes de base respectivement de $(d\bar{x}_A, dby_A, dbz_A)$ $(d\bar{x}_B, dby_B, dbz_B)$ tout en imprimant au chariot de base une translation de composantes $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$. L'introduction de ces accroissements a naturellement pour effet d'éloigner sur les clichés les marques repères des points image sur lesquels elles reposaient précédemment; ces écarts

sont donnés par les formules (1.41) à (1.44) qui se rapportent aux systèmes de coordonnées (t_A, s_A) et (t_B, s_B) introduits sur les deux clichés. La question qui se pose maintenant est la suivante:

Est-il possible d'imprimer au chariot de base une translation $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$ telle que les écarts $\Delta t_A, \Delta s_A, \Delta t_B, \Delta s_B$ s'annulent simultanément?

Pour y répondre, il suffit de considérer les différentielles $\delta X, \delta Y, \delta Z$ comme variables dans les formules (1.41) à (1.44), tandis que les autres grandeurs figurant dans le membre de droite de ces équations ont des valeurs fixes. Nous voyons que les quatre écarts $\Delta t_A, \Delta s_A, \Delta t_B, \Delta s_B$ s'annulent simultanément lorsqu'on a

$$(1.45) \quad \Delta t_A = \Delta s_A = \Delta t_B = \Delta s_B = 0 \quad (1.46)$$

$$\delta X - \frac{X_A}{Z} \delta Z = dK_A \quad \delta Y - \frac{Y_A}{Z} \delta Z = dL_A$$

$$\delta X - \frac{X_B}{Z} \delta Z = dK_B \quad \delta Y - \frac{Y_B}{Z} \delta Z = dL_B.$$

Rappelons que (X_A, Y_A, Z) et (X_B, Y_B, Z) désignent les coordonnées des points d'intersection des tiges conductrices et du plan horizontal $Z = \text{constante}$. En négligeant les différentielles du premier ordre — ce qui est permis ici puisque ces grandeurs seront ensuite à multiplier par les différentielles $\delta X, \delta Y, \delta Z$ — nous obtenons $Y_A = Y_B = Y$. De plus, la figure 1.2 nous permet d'écrire la relation

$$c + X_B - b\bar{x}_B - c + b\bar{x}_A - X_A = 0$$

d'où nous tirons

$$X_A - X_B = b\bar{x}_A - b\bar{x}_B.$$

La différence $b\bar{x}_A - b\bar{x}_B$ s'introduisant directement dans l'autographe, nous la désignons par bx et obtenons ainsi les relations

$$(1.47)$$

$$Y_B = Y_A = Y \quad X_A - X_B = bx \quad bx = b\bar{x}_A - b\bar{x}_B > 0.$$

Que pouvons-nous alors dire au sujet de la résolution des équations (1.45) et (1.46) par rapport à $\delta X, \delta Y, \delta Z$? Le déterminant principal du système (1.45) est toujours différent de zéro puisque nous avons $X_A \neq X_B$. Il en résulte que nous pouvons calculer les valeurs de δX et de δZ . Par contre, le déterminant du système (1.46) est toujours nul puisqu'on a $Y_A = Y_B$. De plus, nous avons deux équations à satisfaire, tandis que nous ne disposons plus que d'une seule variable qui est δY . Il s'ensuit que ce second système n'admet en général pas de solution, à moins qu'on n'ait $dL_A = dL_B$. Si nous admettons $dL_A \neq dL_B$, les systèmes (1.45) et (1.46)

n'ont pas de solution commune, ce qui veut dire qu'il y a impossibilité de trouver un déplacement ($\delta X, \delta Y, \delta Z$) du chariot de base tel que les deux marques repères coïncident à nouveau avec les deux points image conjugués; l'orientation relative est dans ce cas inexacte. On peut donc développer la théorie de l'orientation relative avec les formules ci-dessus. Pour observer la parallaxe verticale en un point quelconque de l'image plastique, on annule tout d'abord à peu près Δt_A et Δt_B en se servant de δX et de δZ , mais nous verrons que ceci est sans importance pour la suite des opérations. On peut alors amener la marque repère de la chambre B en coïncidence avec le point image en se servant de δY . Cette coïncidence a lieu lorsqu'on a $\Delta t_B = \Delta s_B = 0$. Elle peut être obtenue en choisissant convenablement δY et δZ ; désignons les valeurs introduites par δY_1 et δZ_1 . Les équations (1.43) et (1.44) nous donnent dans ce cas

$$(1.48) \quad dK_B - \delta X + \frac{X_B}{Z} \delta Z_1 = 0 \quad dL_B - \delta Y_1 + \frac{Y}{Z} \delta Z_1 = 0. \quad (1.49)$$

Notons que la valeur de δX reste encore arbitraire et que nous pouvons en profiter pour annuler Δt_A . L'équation (1.42) devient maintenant, quel que soit δX

$$\Delta s_A = + f \cdot \psi_A \left\{ dL_A - \delta Y_1 + \frac{Y}{Z} \delta Z_1 \right\}$$

ou bien, si nous tenons compte de (1.49)

$$(1.50) \quad \begin{array}{l} \Delta s_B = \Delta t_B = 0 \\ \Delta s_A = p_{vA} = + f \cdot \psi_A (dL_A - dL_B). \end{array}$$

Nous avons désigné cette expression par p_{vA} parce que c'est la parallaxe verticale qu'on observe dans la chambre A lorsque la marque repère de la chambre B coïncide avec le point image. De la même façon, nous pouvons aussi calculer la parallaxe verticale p_{vB} qu'on observe dans la chambre B lorsque la marque repère de la chambre A est en coïncidence avec le point image; on obtient dans ce cas

$$(1.51) \quad \begin{array}{l} \Delta s_A = \Delta t_A = 0 \\ \Delta s_B = p_{vB} = + f \cdot \psi_B (dL_B - dL_A). \end{array}$$

On constate ainsi que les deux parallaxes verticales n'ont

pas la même valeur absolue lorsqu'on a $\psi_A \neq \psi_B$, résultat que nous avons déjà indiqué en 1943 dans [1].

Mais revenons au problème de la déformation de l'image plastique et reprenons les formules (1.41) à (1.44). Si l'orientation relative n'est pas rigoureusement correcte, on ne peut avoir simultanément $\Delta s_A = \Delta s_B = \Delta t_A = \Delta t_B = 0$. Mais elle est comme que comme toujours entachée de petites erreurs résiduelles, vu qu'il s'agit d'opérations physiques et non pas d'un problème de mathématiques. L'opérateur travaille donc à l'autographe avec des parallaxes résiduelles, perceptibles ou non, et a par conséquent toujours affaire à une image plastique plus ou moins déformée. Si le nombre de points de contrôle est suffisant, on peut déterminer cette déformation avec assez de précision pour envisager une correction moyennant une petite variation des éléments d'orientation sans introduire de parallaxes verticales gênantes. C'est précisément là la valeur pratique de ces développements: savoir comment il faut faire varier les éléments d'orientation des chambres de restitution pour donner à l'image plastique une déformation déterminée.

Mais comment l'opérateur place-t-il les marques repères sur l'image plastique lorsque celle-ci est entachée de petites parallaxes résiduelles? Une chose est certaine, c'est qu'il les place aussi près que possible des points image et que l'écart — puisque écart il y a nécessairement — est réparti uniformément sur les deux vues. Nous avons introduit cette façon de voir pour la première fois en 1943 dans [1] sous la dénomination *principe de symétrie*. En appliquant ce principe, nous obtenons

$$(1.52) \quad \begin{array}{l} \Delta t_A = \Delta t_B = 0 \quad \Delta s_A = - \Delta s_B \end{array}$$

et la résolution des formules (1.41) à (1.44) nous donne

$$(1.53) \quad \begin{array}{l} \delta X = \frac{1}{bx} \left\{ X_A dK_B - X_B dK_A \right\} \quad \delta Z = \frac{Z}{bx} \left\{ dK_B - dK_A \right\} \\ \delta Y = \frac{Y}{bx} (dK_B - dK_A) + \frac{\psi_A \cdot dL_A + \psi_B \cdot dL_B}{\psi_A + \psi_B} \end{array}$$

Avec les formules (1.53) nous pouvons calculer la déformation de l'image plastique pour des accroissements différentiels quelconques attribués aux variables d'orientation.

(A suivre.)

DIVERS

Forces Motrices du Mauvoisin

Les Forces motrices du Mauvoisin utiliseront, en deux paliers sur une chute totale de 1480 m, les eaux de la Dranse de Bagnes entre Mauvoisin situé en amont de Fionnay dans la partie supérieure du val de Bagnes (1950 m s. m.) et Riddes dans la plaine du Rhône (470 m s. m.). En raison du vaste bassin versant qui comporte de nombreux glaciers, le lac d'accumulation, aménagé dans une région entièrement inhabitée et improductive, pourra être rempli sans pompage. A l'achèvement complet des travaux, le barrage-voûte projeté à Mauvoisin atteindra une hauteur de 180 m au-dessus du fond de la vallée et permettra l'accumulation de 157 millions

de m³ d'eau. Au cours d'une année hydrologique moyenne, les usines pourront produire 756 millions de kWh, dont 531 millions en hiver et 225 millions en été. Elles seront donc en mesure de fournir une contribution appréciable à l'approvisionnement de la Suisse en énergie électrique. Les travaux préparatoires ont commencé en automne 1949 et la mise en chantier des travaux principaux a eu lieu en janvier 1951.

Le groupe d'usines est caractérisé par les particularités suivantes:

		Dont recouverts de glaciers
Bassin versant naturel	113,5 km ²	45 %
Bassin versant additionnel rive gauche (torrents de Séry, Corbassière et Bocheresse)	40,2 km ²	59 %