

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 77 (1951)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Calcul des tubes cylindriques de révolution d'épaisseur variable, sollicités à la flexion circulaire  
**Autor:** Paschoud, Jacques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58142>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

**Abonnements:**Suisse: 1 an, 24 francs  
Etranger: 28 francs**Pour sociétaires:**Suisse: 1 an, 20 francs  
Etranger: 25 francsPour les abonnements  
s'adresser à la librairie**F. Rouge & Cie**  
à Lausanne

Prix du numéro: Fr. 1,40

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; E. Latelin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; A. Paris, ingénieur; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. L. Archinard, ingénieur; Cl. Groscurin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; G. Furter, ingénieur; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique: A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

**Tarif des annonces**Le millimètre  
(larg. 47 mm) 20 ctsRéclames: 60 cts le mm  
(largeur 95 mm)Rabais pour annonces  
répétées**Annonces Suisses S.A.**5, Rue Centrale Tél. 22 33 26  
Lausanne et succursales

**SOMMAIRE:** Calcul des tubes cylindriques de révolution d'épaisseur variable, sollicités à la flexion circulaire, par JACQUES PASCHOUD, ingénieur E. I. L. — **BIBLIOGRAPHIE.** — Société suisse des ingénieurs et des architectes: Communiqué du Comité central. — **SERVICE DE PLACEMENT.** — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES: Dalles Stahlton.

## CALCUL DES TUBES CYLINDRIQUES DE RÉVOLUTION D'ÉPAISSEUR VARIABLE, SOLLICITÉS A LA FLEXION CIRCULAIRE

par JACQUES PASCHOUD, ingénieur E. I. L.

**Introduction**

Le calcul des déformations et des contraintes d'un tube cylindrique de révolution d'épaisseur variable, sollicité par des efforts circulaires, a été effectué de diverses manières par plusieurs auteurs (bibliographie n° 1, 2, 3, 4); les méthodes proposées conduisent à des calculs beaucoup plus compliqués et plus longs que dans le cas particulier du tube cylindrique de révolution à épaisseur constante.

Le présent travail tend à donner la possibilité de calculer les tubes cylindriques de révolution d'épaisseur variable avec la même facilité et la même rapidité que les tubes à épaisseur constante; son but étant essentiellement pratique, la justification de la méthode est placée en fin d'article (paragraphe 8) et réduite au strict nécessaire.

La méthode est tout d'abord expliquée brièvement, puis illustrée par des exemples de calcul numérique.

**La méthode de calcul****1. Notations et signes**

La figure 1 indique les sens positifs adoptés.

$h$  épaisseur du tube, variable ou constante, comptée radialement.

$h' = \frac{dh}{dx}$  dérivée de  $h$  par rapport à  $x$ , c'est le taux de variation de l'épaisseur le long de l'axe.

$l$  longueur du tube.

$r$  rayon moyen du tube, perpendiculairement à l'axe.

$s = h' \sqrt{\frac{r}{h}} = \text{Cte.}$  facteur de forme du tube (voir parag. 2).

$x$  abscisse comptée sur l'axe du tube, à partir d'une des sections limites du tube.

$y$  déplacement radial d'un point de la fibre moyenne.

$y' = \frac{dy}{dx}$  rotation de la fibre moyenne.

$E$  module d'élasticité monoaxial.

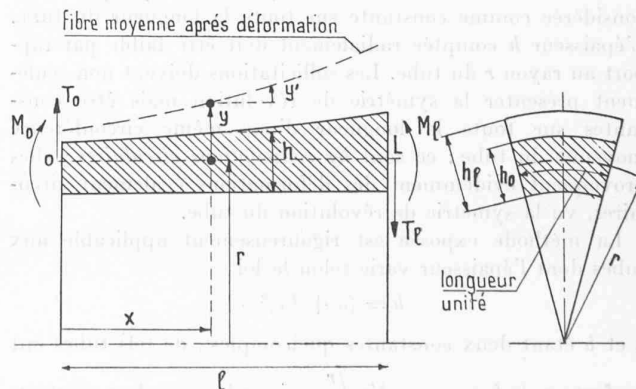


Fig. 1. — Notations et sens positifs adoptés  
(en réalité les moments et efforts tranchants positifs  
provoqueraient des rotations  $y'$  négatives).

$M$  moment fléchissant, uniformément réparti sur la circonférence du tube, et rapporté à l'unité de longueur de la circonférence moyenne.

$T$  effort tranchant dirigé radialement et réparti comme  $M$ .

$\lambda$  longueur d'amortissement: c'est l'abscisse  $x$  pour laquelle, dans le tube illimité, les valeurs de  $\bar{y}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $M$  et  $\bar{T}$  sont le  $1/25$  des valeurs respectives à l'origine. La désignation « croissant » ou « décroissant » mise en indice sert à indiquer le sens dans lequel le tube est considéré (tube à épaisseur croissante ou décroissante).

$\nu$  coefficient de Poisson, pris égal à 0,3.

$\Delta = d.z.\xi$  angle en radians sans signification spéciale  
rappel: 1 radian = 57,3°.

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{Eh^3}{10,92} \cdot \frac{y}{rh} \text{ extension radiale réduite} \\ \bar{\theta} &= \frac{Eh^3}{10,92} \cdot \frac{y'}{\sqrt{rh}} \text{ rotation réduite} \end{aligned} \right\} \text{ où } 10,92 = 12 (1-\nu^2)$$

$$\bar{T} = T \cdot \sqrt{rh} \text{ effort tranchant réduit.}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{rh_0}} \text{ longueur d'amortissement réduite.}$$

$$\xi = \frac{x}{20\sqrt{rh_0}} \text{ abscisse réduite.}$$

$m, m', t, t', Y, Y', Z, Z'; m_0, m'_0, t_0, t'_0, Y_0, Y'_0, Z_0, Z'_0; \beta, d, z$  sont des facteurs n'intervenant que numériquement, et sont donnés par leurs courbes représentatives (voir fig. 3, 4 et 5 et paragraphe 6).

« o » indice de la section origine du tube.

« l » indice de la section terminale limite du tube.

« f » indice rappelant qu'il s'agit de grandeurs se rapportant aux « tubes fictifs » (voir paragraphe 5).

**Remarque:** Les tubes seront répartis en trois catégories suivant leur longueur:

1° tubes longs:  $l > \lambda_{\text{croissant}} > 0$ ; ce sont les tubes dont la longueur est plus grande que la longueur d'amortissement comptée dans le sens de l'épaisseur min. à l'épaisseur max. (sens croissant), lorsque cette longueur d'amortissement est positive;

2° tubes courts:  $l < \lambda_{\text{croissant}}$ ;

3° tubes très courts:  $l < \lambda_{\text{décroissant}}$  ou  $\lambda_{\text{croissant}} < 0$ .

## 2. Limites d'application de la méthode

Un tube cylindrique de révolution est un corps creux présentant la symétrie de révolution autour de l'axe du tube et dont la couche moyenne (qui est la surface radialement équidistante des surfaces intérieure et extérieure du tube) est à une distance radiale  $r$  de l'axe, distance qui peut être considérée comme constante sur toute la longueur du tube. L'épaisseur  $h$  comptée radialement doit être faible par rapport au rayon  $r$  du tube. Les sollicitations doivent non seulement présenter la symétrie de révolution mais être constantes sur toute la longueur d'une même circonférence moyenne du tube: ce sont les sollicitations circulaires; elles provoquent évidemment des déformations également circulaires, vu la symétrie de révolution du tube.

La méthode exposée est rigoureusement applicable aux tubes dont l'épaisseur varie selon la loi

$$h = (a + bx)^2$$

$a$  et  $b$  étant deux constantes quelconques; de tels tubes ont

un facteur de forme  $s = h' \sqrt{\frac{r}{h}}$  qui garde une valeur constante en toutes sections du tube. Pour toute autre loi de variation de l'épaisseur, le facteur de forme  $s$  varie le long du tube.

La méthode sera cependant encore applicable, par extension, à des lois quelconques de variation régulière de l'épaisseur<sup>1</sup>; en particulier elle permettra de calculer les tubes à variation linéaire de l'épaisseur, à condition de prendre alors, pour le facteur de forme  $s$ , la valeur résultant de la figure 2 qui

donne la courbe représentative du rapport  $\frac{s}{s_0}$  (où  $s_0$  est la valeur de  $h' \sqrt{\frac{r}{h}}$  à l'origine du tube linéaire) en fonction du

rapport  $\frac{h_l}{h}$  de l'épaisseur  $h_l$  dans la section terminale limite

du tube à l'épaisseur  $h_0$  dans la section origine; étant spécifié que pour la détermination de  $h_l$  la longueur à considérer du tube doit être au plus égale à la longueur d'amortissement  $\lambda$  dont la valeur résulte de la figure 3 ou de l'expression du paragraphe 6 et qui est différente suivant le sens croissant ou décroissant dans lequel le tube est parcouru. Comme la figure 3 et l'expression du paragraphe 6 donnent  $\lambda$  en fonction de  $s$  qui n'est pas encore connu, la valeur de  $s_0$  sera prise en première approximation et corrigée successivement ainsi que la valeur de  $\lambda$  correspondante.

Ceci revient à assimiler le tube à variation linéaire de l'épaisseur à un tube équivalent de même  $h_0$  et  $r$  et ayant cette valeur de  $s$ . Lorsque le tube est court ( $l < \lambda$  ou  $\lambda < 0$ ), il conviendra de noter que la valeur absolue de  $s$  n'est alors pas nécessairement la même pour les deux tubes fictifs dont il sera question au paragraphe 5.

## 3. Relations entre les forces intérieures et les déformations dans une section quelconque du tube axialement illimité.

En faisant usage des notations précédentes (paragraphe 1), ces relations sont les suivantes:

$$\left. \begin{aligned} M &= -m \cdot \bar{y} - m' \cdot \bar{\theta} & \bar{y} &= \frac{1}{10} Y \cdot M + \frac{1}{10} Y' \cdot \bar{T} \\ \bar{T} &= 2t \cdot \bar{y} + t' \cdot \bar{\theta} & \bar{\theta} &= -\frac{1}{5} Z \cdot M - \frac{1}{10} Z' \cdot \bar{T} \end{aligned} \right\} I$$

<sup>1</sup> Voir bibliographie n° 3, paragraphe 12.

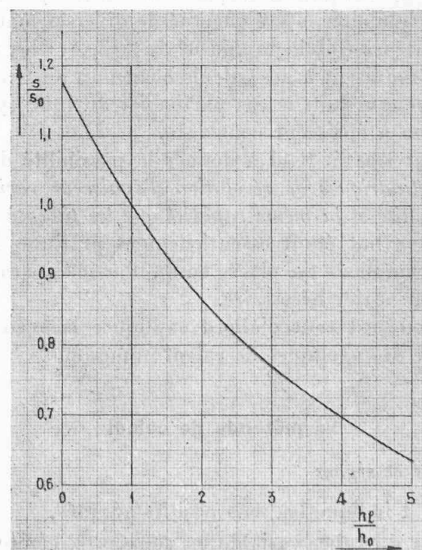


Fig. 2. — Pour le facteur de forme du tube à variation linéaire de l'épaisseur.

$s_0 = h' \sqrt{\frac{r}{h_0}}$  = valeur à l'origine du facteur de forme du tube à variation linéaire de l'épaisseur.

Les coefficients  $m, m', t, t', Y, Y', Z, Z'$  sont donnés numériquement par leurs courbes représentatives en fonctions du facteur de forme (voir paragraphe 2)  $s = h' \sqrt{\frac{r}{h}}$  pour les valeurs les plus fréquemment utiles  $-0,6 \leq s \leq +0,6$  (voir fig. 3); pour d'autres valeurs exceptionnelles de  $s$ , ces coefficients seront calculés au moyen des expressions données plus loin au paragraphe 6.

Ces relations I permettent le calcul immédiat des hyperstatiques à l'origine d'un tube assez long ( $l \geq \lambda > 0$ ).

Elles servent également au calcul des tubes courts ( $l < \lambda$  ou  $\lambda < 0$ ) selon le procédé indiqué plus loin au paragraphe 5.

#### 4. Lois de variation des forces intérieures et des déformations d'une section à une autre du tube axialement illimité.

Avec les notations du paragraphe 1, les relations exprimant ces lois sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} M &= e^{-\beta z \xi} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} m_o \sin \Delta + \cos \Delta \right) \cdot M_o + \left( \frac{1}{2} m'_o \sin \Delta \right) \cdot \bar{T}_o \right] \\ \bar{T} &= e^{-\beta z \xi} \cdot \left[ \left( -t_o \sin \Delta \right) \cdot M_o + \left( -\frac{1}{2} t'_o \sin \Delta + \cos \Delta \right) \cdot \bar{T}_o \right] \\ \bar{y} &= e^{-\beta z \xi} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} Y_o \sin \Delta + \cos \Delta \right) \cdot \bar{y}_o + \left( \frac{1}{2} Y'_o \sin \Delta \right) \cdot \bar{\theta}_o \right] \\ \bar{\theta} &= e^{-\beta z \xi} \cdot \left[ \left( -Z_o \sin \Delta \right) \cdot \bar{y}_o + \left( -\frac{1}{2} Z'_o \sin \Delta + \cos \Delta \right) \cdot \bar{\theta}_o \right] \end{aligned} \right\} \text{ II}$$

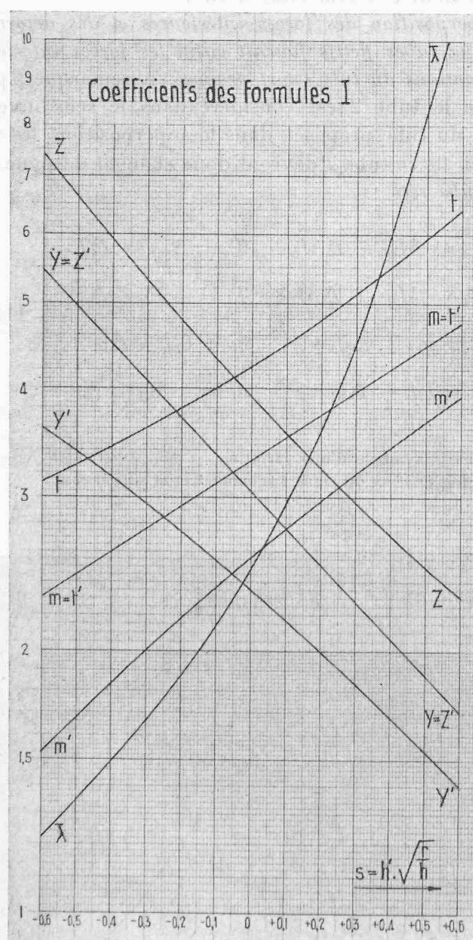


Fig. 3. — Coefficients des formules I ; longueur  $\lambda$  d'amortissement réduite.

les coefficients  $m_o, m'_o, t_o, t'_o, Y_o, Y'_o, Z_o, Z'_o, \beta, d$  sont donnés numériquement par leurs courbes représentatives en fonctions du facteur de forme (voir paragraphe 2)  $s = h' \sqrt{\frac{r}{h}}$  pour les valeurs les plus fréquemment utiles  $-0,6 \leq s \leq +0,6$  (voir fig. 4); pour d'autres valeurs exceptionnelles de  $s$ , ces coefficients seront calculés au moyen des expressions données plus loin au paragraphe 6;

le coefficient  $z$  est donné numériquement par sa courbe représentative en fonction du produit ( $\xi \cdot s$ ), de l'abscisse réduite  $\xi = \frac{x}{20\sqrt{r h_o}}$  par le facteur de forme  $s$  (voir fig. 5);

la valeur de l'exponentielle  $e^{-\beta z \xi}$  est donnée par sa courbe représentative en fonction du produit ( $\beta z \xi$ ) (voir fig. 6);

enfin l'angle  $\Delta$ , exprimé en radians, est égal au produit ( $d z \xi$ ). Il est rappelé que 1 radian = 57,3°.

Ces relations II permettent le calcul rapide des déformations et des forces intérieures dans une section quelconque d'un tube assez long ( $l \geq \lambda > 0$ ), en fonction de leurs valeurs dans la section origine de ce tube.

Elles servent également au calcul des mêmes lois dans les tubes courts ( $l < \lambda$  ou  $\lambda < 0$ ) selon le procédé indiqué au paragraphe 5.

#### 5. Calcul des tubes courts

Le calcul des tubes courts ( $l < \lambda_{\text{croissant}}$ ), c'est-à-dire

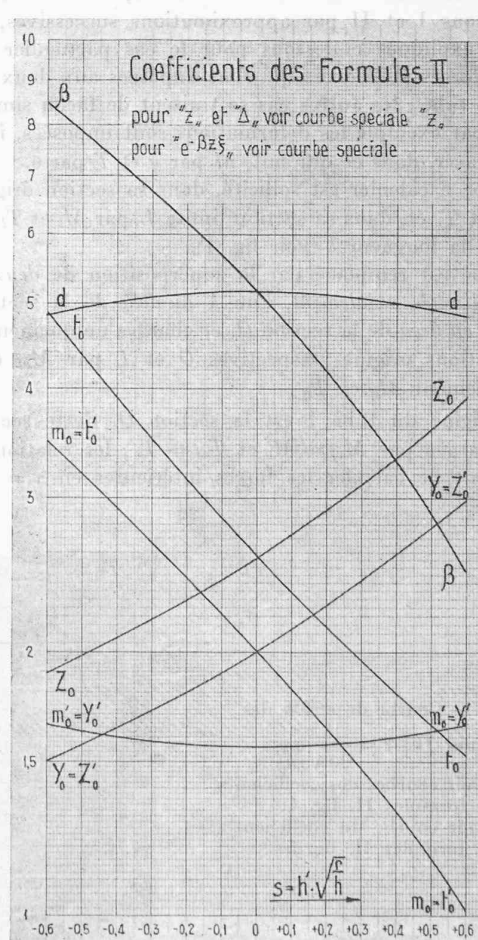


Fig. 4. — Coefficients des formules II. Pour  $z$  et  $\Delta$  voir courbe spéciale du coefficient  $z$ , fig. 5. Pour  $e^{-\beta z \xi}$  voir courbe spéciale, fig. 6.



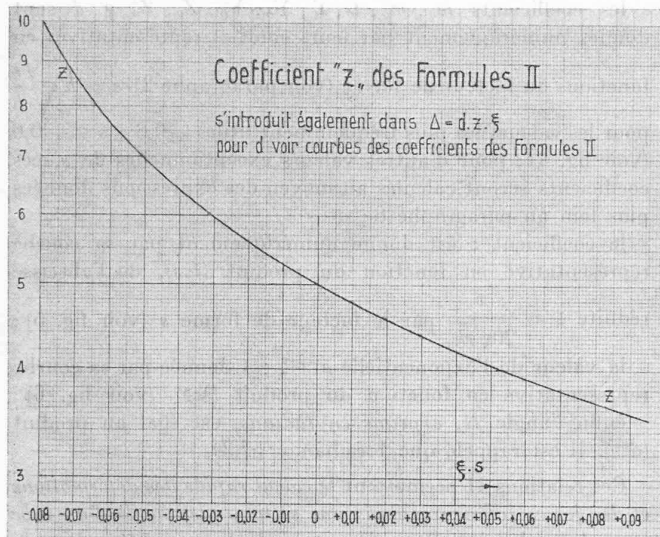


Fig. 5. — Coefficient  $z$  des formules II ;  $\xi = \frac{x}{20 \sqrt{r h_0}}$   
s'introduit également dans  $\Delta = d.z.\xi$   
Pour  $d$ , voir courbes des coefficients des formules II, fig. 4.

tels qu'il ne soit pas possible de négliger l'influence d'une extrémité du tube sur l'autre extrémité, s'effectuera selon les relations I et II par approximations successives, de la manière expliquée ci-dessous pour le cas particulier où ce sont les forces intérieures qui sont imposées aux deux extrémités du tube ; les autres cas se traitent de façon similaire ; lorsque par exemple les déformations sont imposées, il suffit de remplacer, dans ce qui suit,  $M$  par  $\bar{y}$  et  $\bar{T}$  par  $\bar{\theta}$ .

Le tube à calculer est sollicité, dans sa section origine  $O$ , par  $M_o$  et  $\bar{T}_o$  et, dans sa section limite  $L$ , par  $M_l$  et  $\bar{T}_l$  imposés ; il a la longueur  $l$  (voir fig. 1).

Ce tube est remplacé par la superposition de deux tubes fictifs, illimités axialement, l'un 1 au-delà de la section  $L$ , l'autre 2 en deçà de la section  $O$ , et chargés uniquement dans leurs sections origines respectives  $O$  et  $L$  par  $M_{of}$  et  $\bar{T}_{of}$ , respectivement  $M_{lf}$  et  $\bar{T}_{lf}$ .

1) l'origine du tube 1 est la section  $O$ . Cette section  $O$  étant chargée par  $M_{of} = M_o$  et  $\bar{T}_{of} = \bar{T}_o$ , les relations II<sub>1,2</sub> permettent de calculer les forces intérieures en  $x = l$  (sec-

tion  $L$ ) de ce tube fictif ; elles seront notées  $\Delta M_l$  et  $\Delta \bar{T}_l$ .

2) l'origine du tube 2 est la section  $L$ . Cette section  $L$  étant chargée par  $M_{lf} = M_l - \Delta M_l$  et  $\bar{T}_{lf} = -\bar{T}_l + \Delta \bar{T}_l$ , les relations II<sub>1,2</sub>, où l'on introduit  $M_{lf}$  et  $\bar{T}_{lf}$  à la place de  $M_o$  et  $\bar{T}_o$ , permettent de calculer les forces intérieures en  $x = l$  (section  $O$ ) de ce tube fictif ; elles seront notées  $\Delta M_o$  et  $\Delta \bar{T}_o$ .

1') refaisant le calcul 1) à partir de  $M_{of} = M_o - \Delta M_o$  et  $\bar{T}_{of} = \bar{T}_o + \Delta \bar{T}_o$ , il vient en  $x = l$  (section  $L$ ) :  $\Delta M'_l$  et  $\Delta \bar{T}'_l$  ;

2') refaisant le calcul 2) à partir de  $M_{lf} = M_l - \Delta M'_l$  et  $\bar{T}_{lf} = -\bar{T}_l + \Delta \bar{T}'_l$ , il vient en  $x = l$  (section  $O$ ) :  $\Delta M''_o$  et  $\Delta \bar{T}''_o$  qui permettent de répéter le calcul 1') d'où  $\Delta M'''_l$  et  $\Delta \bar{T}'''_l$  qui permettent de répéter le calcul 2')... et ainsi de suite jusqu'à des résultats invariables à la précision désirée, résultats correspondant aux valeurs de :

pour le tube 1 :  $M_{of}$  et  $\bar{T}_{of}$  dans la section origine  $O$  et  $\Delta M_l$  et  $\Delta \bar{T}_l$  en  $x = l$ .

pour le tube 2 :  $M_{lf}$  et  $\bar{T}_{lf}$  dans la section origine  $L$  et  $\Delta M_o$  et  $\Delta \bar{T}_o$  en  $x = l$ .

Les relations I<sub>3,4</sub> permettent alors de calculer

pour le tube 1 :  $\bar{y}_{of}$  et  $\bar{\theta}_{of}$  en  $x = O$  puis  $\Delta \bar{y}_l$  et  $\Delta \bar{\theta}_l$  en  $x = l$   
pour le tube 2 :  $\bar{y}_{lf}$  et  $\bar{\theta}_{lf}$  en  $x = O$  puis  $\Delta \bar{y}_o$  et  $\Delta \bar{\theta}_o$  en  $x = l$

Les relations II permettraient également de trouver les forces intérieures et les déformations dans toutes les sections des tubes fictifs, si cela était désiré.

La superposition des forces intérieures et des déformations de ces deux tubes fictifs fournit enfin les forces intérieures et les déformations du tube court proposé. A remarquer, pour ce faire, que le tube 2 est considéré dans le sens inverse du tube 1 et du tube proposé ; dans la superposition, les valeurs de  $\bar{T}_f$  et  $\bar{\theta}_f$  de ce tube 2 devront donc changer de signe ; d'où :

$$\left. \begin{aligned} M_o &= M_{of} + \Delta M_o ; & \bar{T}_o &= \bar{T}_{of} - \Delta \bar{T}_o \\ M_l &= M_{lf} + \Delta M_l ; & \bar{T}_l &= -\bar{T}_{lf} + \Delta \bar{T}_l \\ \bar{y}_o &= \bar{y}_{of} + \Delta \bar{y}_o ; & \bar{\theta}_o &= \bar{\theta}_{of} - \Delta \bar{\theta}_o \\ \bar{y}_l &= \bar{y}_{lf} + \Delta \bar{y}_l ; & \bar{\theta}_l &= -\bar{\theta}_{lf} + \Delta \bar{\theta}_l \end{aligned} \right\} \text{III}$$

<sup>1</sup>  $\Delta$  est ici le symbole d'une variation, et non pas l'angle  $\Delta = d.z.\xi$  qui n'apparaît que précédé du signe trigonométrique  $\sin$  ou  $\cos$ .

Fig. 6. — Courbe de  $e^{-\beta z \xi}$  des formules II ;  $\xi = \frac{x}{20 \sqrt{r h_0}}$ .  
Pour  $\beta$ , voir courbes des coefficients des formules II, fig. 4.  
Pour  $z$ , voir courbe du coefficient  $z$  des formules II, fig. 5.

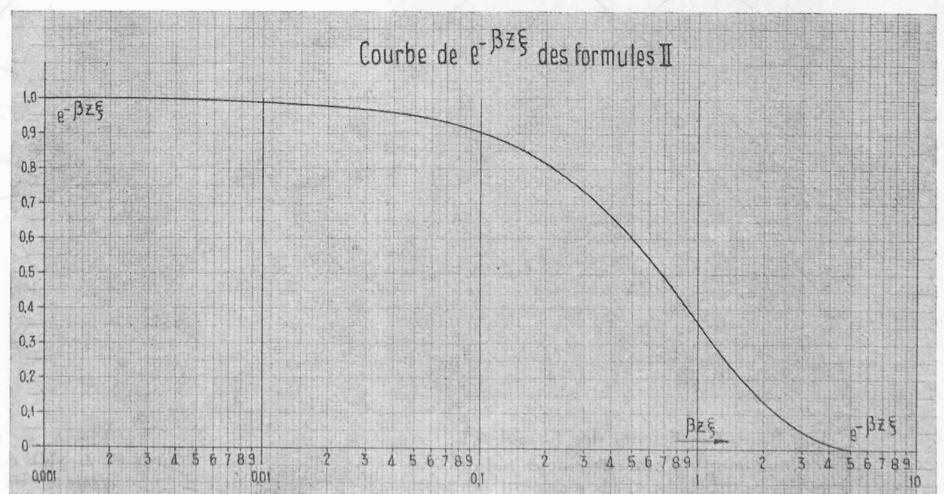


TABLEAU DES VALEURS NUMÉRIQUES

$s$	- 0,6	- 0,5	- 0,4	- 0,2	0	+ 0,2	+ 0,4	+ 0,5	+ 0,6
$m = l'$	2,299		2,607	2,939	3,305	3,715	4,189		4,749
$m'$	1,522		1,837	2,187	2,571	2,987	3,437		3,922
$t$	3,129		3,438	3,802	4,248	4,807	5,524		6,463
$Y = Z'$	5,426		4,466	3,676	3,026	2,491	2,051		1,688
$Y'$	3,591		3,148	2,736	2,354	2,003	1,683		1,394
$Z$	7,385		5,889	4,755	3,890	3,223	2,704		2,297
$m_o = t_o'$	3,483		2,904	2,417	2,000	1,634	1,307		1,008
$m_o' = Y_o'$	1,650		1,597	1,566	1,556	1,566	1,597		1,650
$t_o$	4,888		3,893	3,143	2,571	2,130	1,788		1,520
$Y_o = Z_o'$	1,503		1,627	1,791	2,000	2,261	2,585		2,988
$Z_o$	1,897		2,081	2,301	2,571	2,909	3,344		3,917
$\beta$	8,444		7,275	6,175	5,142	4,175	3,275		2,444
$d$	4,849		5,010	5,109	5,142	5,109	5,010		4,849
$\lambda$	1,222	1,344	1,491	1,870	2,505	3,600	6,07	8,34	13,02
$\xi.s$	-0,080	-0,075	-0,070	-0,065	-0,060	-0,055	-0,050	-0,045	-0,040
$z$	10,059	9,242	8,600	8,075	7,636	7,260	6,931	6,643	6,385
$\xi.s$	+0,010	+0,015	+0,020	+0,025	+0,030	+0,035	+0,040	+0,045	+0,050
$z$	4,765	4,659	4,558	4,463	4,373	4,287	4,206	4,129	4,054
$\beta.z.\xi$	0,001	0,002	0,004	0,007	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$e^{-\beta z \xi}$	0,999	0,998	0,996	0,993	0,990	0,980	0,970	0,961	0,951
$\beta.z.\xi$	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,0	1,2
$e^{-\beta z \xi}$	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3012

Dans le cas des tubes très courts ( $l < \lambda_{\text{décroissant}}$  ou  $\lambda_{\text{croissant}} < 0$ ), qui, cela doit être noté, ne présentent qu'exceptionnellement un intérêt industriel vu leurs sollicitations généralement défavorables, le procédé précité d'approximations successives ne converge que lentement, et il peut y avoir intérêt à résoudre directement le système des quatre équations III précédentes avec  $M_{of}$ ,  $\bar{T}_{of}$ ,  $M_{lf}$ ,  $\bar{T}_{lf}$  comme inconnues,  $\Delta M_o$ ,  $\Delta \bar{T}_o$  et  $\Delta M_l$ ,  $\Delta \bar{T}_l$  étant liés par les relations II à  $M_{lf}$ ,  $\bar{T}_{lf}$  et respectivement  $M_{of}$ ,  $\bar{T}_{of}$ ; cette résolution est aisée car chaque équation ne contient que trois inconnues. Cette manière de faire, si elle est jugée préférable, est d'ailleurs applicable pour toutes les longueurs de tubes.

#### 6. Expressions analytiques des coefficients des relations I et II

Les courbes des figures 3 et 4 donnent les valeurs de ces coefficients lorsque le facteur de forme (voir paragraphe 2)  $s = h' \sqrt{\frac{r}{h}}$  est compris entre -0,6 et +0,6 ce qui correspond aux valeurs les plus fréquemment utiles; ces courbes, ainsi que celles des figures 5 et 6, ne sont que la traduction graphique du tableau suivant des valeurs numériques qui permettront, au lecteur qui le désirerait, de tracer ces courbes à une échelle supérieure à celle des reproductions ci-jointes, pourtant le plus souvent suffisante (voir le tableau des valeurs numériques au haut de la page).

Pour toutes autres valeurs de  $s$ , qui correspondent d'ailleurs à des formes de tubes moins couramment réalisées, les coefficients seront calculés, en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\tau = \frac{2,571}{s} \cdot \sqrt{\sqrt{1+0,0805.s^4} \pm 0,3215.s^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{signe + pour } 2\tau \\ \text{signe - pour } 2\delta \end{array} \right. \\ \epsilon = 1,5 + 2\tau \end{array} \right.$$

au moyen des expressions suivantes :

$$\bar{\lambda} = \frac{2}{s} \left( \sqrt[4]{25} - 1 \right), \text{ longueur d'amortissement réduite }^1$$

$$m = \frac{1}{4} \cdot (\epsilon^2 + 4\delta^2) \cdot s^2 \quad m' = \frac{1}{2} \cdot (2\epsilon + 1) \cdot s$$

$$t = \frac{1}{4} \cdot (2\epsilon - 3) \cdot m \cdot s \quad t' = m$$

$$Y = \frac{10}{m + \frac{1}{2} m' \cdot s} \quad Y' = \frac{m'}{m} \cdot Y$$

$$Z = \frac{t}{t'} \cdot Y \quad Z' = Y$$

$$m_o = 2 \frac{\epsilon - 4}{2\delta} \quad m_o' = \frac{4}{2\delta \cdot s}$$

$$t_o = -\frac{1}{2} \frac{8(\epsilon - 2) - (\epsilon^2 + 4\delta^2)}{2\delta} \cdot s \quad t_o' = m_o$$

$$Y_o = 2 \frac{\epsilon}{2\delta} \quad Y_o' = m_o'$$

$$Z_o = \frac{1}{2} m \cdot m_o' \quad Z_o' = Y_o$$

$$\beta = 2(\epsilon - 4) \cdot s \quad d = 2 \cdot 2\delta \cdot s$$

Enfin, dans le cas exceptionnel où ( $\xi.s$ ) n'est pas compris dans l'intervalle -0,080 à +0,095, la valeur de  $z$  sera calculée par l'expression :

$$z = \frac{1,151}{\xi \cdot s} \cdot \log_{10} (1 + 10 \cdot \xi \cdot s)$$

<sup>1</sup> Lorsque la valeur de  $\bar{\lambda}$  est infinie (pour  $s = +1,341$ ) il n'y a aucun amortissement dans le sens considéré (croissant) du tube, c'est dire que dans ce sens les lois de  $y$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $M$  et  $\bar{T}$  sont alors purement sinusoïdales.

Lorsque la valeur de  $\bar{\lambda}$  est négative, au lieu d'amortissement il y a au contraire amplification dans le sens considéré (croissant) du tube.

## 7. Exemples numériques

Les exemples numériques maintenant développés permettent de préciser la marche des calculs.

1<sup>er</sup> exemple : tubes longs :  $l \geq \lambda_{\text{croissant}} > 0$ .

Il s'agit du même exemple précédemment traité par les auteurs cités en bibliographie nos 2, 3 et 4.

Calculer les déformations, origines, flèches et rotations, des deux tubes cylindriques, croissant et décroissant linéairement, donnés par :

$r = 50$  cm,  $h_o = 5$  cm,  $h' = \pm 0,02$ ,  $l = 200$  cm  
sous les deux cas de charges origines suivants :

$$a) M_o = \frac{E \cdot h_o^3}{12(1-\nu^2)}, \bar{T}_o = 0$$

$$b) M_o = 0, \bar{T}_o = \frac{E \cdot h_o^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{r h_o}.$$

En voici le calcul complet fait à la règle (les valeurs supérieures sont celles du tube croissant, les valeurs inférieures sont celles du tube décroissant) :

selon le paragraphe 2 :  $s_o = h' \sqrt{\frac{r}{h_o}} = \pm 0,0632$

selon la figure 3, avec  $s \cong s_o$  :  $\bar{\lambda} = \begin{cases} 2,77 \\ 2,25 \end{cases}$  d'où  $\lambda = \begin{cases} 43,7 \text{ cm} \\ 35,6 \text{ cm} \end{cases}$

alors  $\frac{h_\lambda}{h_o} = \begin{cases} 1,17 \\ 0,86 \end{cases}$

et d'après la figure 2 :  $\frac{s}{s_o} = \begin{cases} 0,976 \\ 1,024 \end{cases}$  d'où  $s = \begin{cases} +0,062 \\ -0,065 \end{cases}$

les courbes de la figure 3 permettent de relever :

$$Y = \begin{cases} 2,84 \\ 3,23 \end{cases}, Y' = \begin{cases} 2,24 \\ 2,47 \end{cases}, Z = \begin{cases} 3,65 \\ 4,14 \end{cases}, Z' = \begin{cases} 2,84 \\ 3,23 \end{cases}.$$

Les relations I donnent alors immédiatement :

$$a) \text{ Tubes sollicités par } M_o = \frac{E \cdot h_o^3}{12(1-\nu^2)} \text{ et } \bar{T}_o = 0$$

en multipliant par  $\frac{12(1-\nu^2)}{E \cdot h_o^3}$  :

$$\frac{y_o}{r h_o} = \begin{cases} 0,284 \\ 0,323 \end{cases} \text{ d'où } y_o = \begin{cases} 71,0 \text{ cm} \\ 80,7 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\frac{y'_o}{\sqrt{r h_o}} = \begin{cases} -0,730 \\ -0,828 \end{cases} \text{ d'où } y'_o = \begin{cases} -11,54 \\ -13,09 \end{cases}$$

$$b) \text{ Tubes sollicités par } M_o = 0 \text{ et } \bar{T}_o = \frac{E \cdot h_o^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{r h_o}$$

en multipliant par  $\frac{12(1-\nu^2)}{E \cdot h_o^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{r h_o}}$  :

$$\frac{y_o}{r h_o \cdot \sqrt{r h_o}} = \begin{cases} 0,224 \\ 0,247 \end{cases} \text{ d'où } y_o = \begin{cases} 881 \text{ cm} \\ 976 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\frac{y'_o}{r h_o} = \begin{cases} -0,284 \\ -0,323 \end{cases} \text{ d'où } y'_o = \begin{cases} -71,0 \\ -80,7 \end{cases}$$

Le tube à épaisseur constante conduit à des calculs en tous points semblables à partir de  $s = 0$ .

$\{ a) \bar{y}_{of} = 1000 ;$	$\bar{\theta}_{of} = 0$	d'où par $a_2) : \Delta \bar{y}_l = + 20,32 ; \Delta \bar{\theta}_l = - 109,1$
$\{ b) \bar{y}_{yl} = 0 - 20,32 = - 20,32 ;$	$\bar{\theta}_{yl} = 0 - 109,1 = - 109,1$	d'où par $b_2) : \Delta \bar{y}_o = - 26,31 ; \Delta \bar{\theta}_o = + 64,1$
$\{ a') \bar{y}_{of} = 1000 + 26,31 = 1026,31 ;$	$\bar{\theta}_{of} = 0 + 64,1 = + 64,1$	d'où par $a_2) : \Delta \bar{y}_l = + 23,53 ; \Delta \bar{\theta}_l = - 116,1$
$\{ b') \bar{y}_{yl} = 0 - 23,53 = - 23,53 ;$	$\bar{\theta}_{yl} = 0 - 116,1 = - 116,1$	d'où par $b_2) : \Delta \bar{y}_o = - 28,41 ; \Delta \bar{\theta}_o = + 69,8$
$\{ a'') \bar{y}_{of} = 1000 + 28,41 = 1028,41 ;$	$\bar{\theta}_{of} = 0 + 69,8 = + 69,8$	d'où par $a_2) : \Delta \bar{y}_l = + 23,81 ; \Delta \bar{\theta}_l = - 116,7$
$\{ b'') \bar{y}_{yl} = 0 - 23,81 = - 23,81 ;$	$\bar{\theta}_{yl} = 0 - 116,7 = - 116,7$	d'où par $b_2) : \Delta \bar{y}_o = - 28,59 ; \Delta \bar{\theta}_o = + 70,3$
$\{ a''') \bar{y}_{of} = 1000 + 28,59 = 1028,59 ;$	$\bar{\theta}_{of} = 0 + 70,3 = + 70,3$	d'où par $a_2) : \Delta \bar{y}_l = + 23,84 ; \Delta \bar{\theta}_l = - 116,8$
$\{ b''') \bar{y}_{yl} = 0 - 23,84 = - 23,84 ;$	$\bar{\theta}_{yl} = 0 - 116,8 = - 116,8$	

2<sup>e</sup> exemple : tube court :  $l < \lambda_{\text{croissant}}$  (par approximations successives)

Calculer les moments fléchissants aux extrémités d'un tube à épaisseur variable donné par :

$r = 100$  cm,  $h_o = 7,5$  cm,  $h_l = 4$  cm,  $h'_o = -0,1098$ ,  $l = 37$  cm  
l'épaisseur variant selon la loi  $h = (a + bx)^2$ ,

et dont les déformations sont imposées aux extrémités :

$$\bar{y}_o = 1000, \bar{\theta}_o = 0 \text{ et } \bar{y}_l = \bar{\theta}_l = 0.$$

C'est intentionnellement qu'un tel tube, à considérer comme déjà très court puisque  $l < \lambda_{\text{décroissant}}$ , a été pris comme exemple du procédé d'approximations successives qui est alors suffisamment développé pour que le lecteur puisse s'en faire une idée exacte. Dans les cas les plus courants de tubes moins courts, le procédé est beaucoup plus rapide parce que la deuxième approximation est alors suffisante.

Voici le calcul complet fait à la règle (selon le paragraphe 5) :

a) sens décroissant :  $s = -0,40$  ; tube fictif 1

selon figure 3 :  $\bar{\lambda} = 1,49$  d'où  $\lambda = 41$  cm  $> l$ ,

les courbes figures 3, 4, 5 et 6 permettent de relever :

$$m = 2,60, m' = 1,835, Y_o = 1,627, Y'_o = 1,595, Z_o = 2,08, Z'_o = 1,627, \beta = 7,27, d = 5,01.$$

Le calcul donne  $\xi_l$  (en  $x = l$ ) = 0,0676,  $\xi_l \cdot s = -0,02704$  à quoi correspond (fig. 5)  $z = 5,83$ . Alors  $\beta z \xi_l = 2,865$

ce qui donne (fig. 6)  $e^{-\beta z \xi_l} = 0,057$  ; puis  $\Delta_l = dz \xi_l = 1,974$  d'où  $\sin \Delta_l = +0,920$  et  $\cos \Delta_l = -0,391$ .

Les relations I et II permettent d'écrire (en remplaçant comme expliqué  $\bar{y}_o, \bar{\theta}_o, \bar{y}_l, \bar{\theta}_l$  respectivement par  $\bar{y}_{of}, \bar{\theta}_{of}, \Delta \bar{y}_l, \Delta \bar{\theta}_l$ ) :

$$a_1) M = -2,60 \cdot \bar{y} - 1,835 \cdot \bar{\theta}$$

$$a_2) \Delta \bar{y}_l = 0,02032 \cdot \bar{y}_{of} + 0,0418 \cdot \bar{\theta}_{of} ; \Delta \bar{\theta}_l = -0,1091 \cdot \bar{y}_{of} - 0,0650 \cdot \bar{\theta}_{of}$$

sollicitations réelles à l'origine  $\bar{y}_o = 1000, \bar{\theta}_o = 0$  ; ce sont les valeurs à prendre en première approximation pour  $\bar{y}_{of}$  et  $\bar{\theta}_{of}$  du tube fictif 1.

b) sens croissant :  $s = +0,40$  ; tube fictif 2

$\bar{\lambda} = 6,07$  d'où  $\lambda = 121,5$  cm  $> l$  ;

de la même façon que précédemment, il vient successivement :

(à noter que  $Y'_o, d$  et  $\Delta_l$  restent inchangés)

$$m = 4,20, m' = 3,43, Y_o = 2,58, Y'_o = 1,595, Z_o = 3,34$$

$$Z'_o = 2,58, \beta = 3,27 ; \xi_l = 0,0925, \xi_l \cdot s = +0,03700,$$

$$z = 4,25, \beta z \xi_l = 1,286, e^{-\beta z \xi_l} = 0,273 ;$$

d'où (en remplaçant comme expliqué  $\bar{y}_o, \bar{\theta}_o, \bar{y}_l, \bar{\theta}_l$  respectivement par  $\bar{y}_{yl}, \bar{\theta}_{yl}, \Delta \bar{y}_o, \Delta \bar{\theta}_o$ ) :

$$b_1) M = -4,20 \cdot \bar{y} - 3,43 \cdot \bar{\theta}$$

$$b_2) \Delta \bar{y}_o = 0,2182 \cdot \bar{y}_{yl} + 0,2005 \cdot \bar{\theta}_{yl} ; \Delta \bar{\theta}_o = -0,840 \cdot \bar{y}_{yl} - 0,431 \cdot \bar{\theta}_{yl}$$

sollicitations réelles à l'extrémité :  $\bar{y}_l = \bar{\theta}_l = 0$  ; ce sont les valeurs à prendre en première approximation pour les sollicitations origines du tube fictif 2.

Procédé d'approximations successives :

Les valeurs encadrées sont les valeurs définitives à la précision de la règle (il aurait d'ailleurs été suffisant de s'en tenir à la troisième approximation).

Il vient donc :

Tube fictif 1 :

$$\bar{y}_{of} = 1028,59; \quad \bar{\theta}_{of} = + 70,3$$

$$\text{d'où par } a_1) : M_{of} = - 2804 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

$$\Delta \bar{y}_l = + 23,84; \quad \Delta \bar{\theta}_l = - 116,8$$

$$\text{d'où par } a_1) : \Delta M_l = + 152,3 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

Tube fictif 2 :

$$\bar{y}_{ly} = - 23,84; \quad \bar{\theta}_{ly} = - 116,8$$

$$\text{d'où par } b_1) : M_{ly} = + 501 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

$$\Delta \bar{y}_o = - 28,59; \quad \Delta \bar{\theta}_o = + 70,3$$

$$\text{d'où par } b_1) : \Delta M_o = - 121,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

La superposition des deux tubes fictifs (comme expliqué, les signes de  $\bar{\theta}_{ly}$  et  $\Delta \bar{\theta}_o$  doivent être changés) donne les valeurs du tube réel :

$$\bar{y}_o = + 1000; \quad \bar{\theta}_o = 0; \quad M_o = - 2925 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

$$\bar{y}_l = 0; \quad \bar{\theta}_l = 0; \quad M_l = + 653 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

Ici encore le calcul serait le même pour le tube à épaisseur constante; une simplification s'introduit cependant par le fait que les relations  $a_{1,2})$  et  $b_{1,2})$  sont identiques pour  $s = 0$ .

Cet exemple pourrait également se traiter par la méthode d'élimination du tube très court (voir paragraphe 5 et troisième exemple).

3<sup>e</sup> exemple : tube très court :  $l < \lambda_{\text{décroissant}}$  ou  $\lambda_{\text{croissant}} < 0$ .

Il s'agit d'un exemple déjà traité par les auteurs cités en bibliographie nos 3 et 4.

Un tube cylindrique à épaisseur variable selon la loi  $h = (a + bx)^2$ , donné par

$h_o = 56$  mm,  $r = 1150$  mm,  $s = - 2,355$ ;  $l = 90$  mm,  $h_l = 19$  mm, est sollicité dans la section origine par

$$M_o = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{et} \quad T_o = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \text{et à l'autre extrémité par}$$

$$M_l = 26,49 \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{et} \quad T_l = - 0,0717 \cdot \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad \text{Calculer la flèche } y_o \text{ à l'origine.}$$

La valeur de  $s$  étant extérieure à l'intervalle  $- 0,6$  à  $+ 0,6$ , les coefficients seront calculés par les expressions du paragraphe 6; le calcul suit la marche indiquée au paragraphe 5 :

a) sens décroissant :  $s = - 2,355$   
selon le paragraphe 6 :  $\bar{\lambda} = 0,429$  d'où  $\lambda = 109$  mm  $> l$   
 $Y = 26,81$ ,  $Y' = 8,80$ ,  $m_o = 29,49$ ,  $m'_o = 5,46$ ,  $t_o = 80,0$   
 $t'_o = 29,49$ ,  $\beta = 24,59$ ,  $d = 1,464$ ,  $\xi_l = 0,01773$ ,  
 $\xi_l \cdot s = - 0,0418$ ,  $z = 6,47$ ,  $\beta z \xi_l = 2,478$ ,  $\Delta_l = dz \xi_l =$   
 $= 0,1680$  radians,  $e^{-\beta z \xi_l} = 0,0839$ ,  $\sin \Delta_l = 0,1672$ ,  
 $\cos \Delta_l = 0,986$ ,

d'où :

$$a_1) \quad \bar{y} = 2,681 \cdot M + 0,880 \cdot \bar{T}$$

$$a_2) \quad \Delta M_l = 0,2896 \cdot M_{of} + 0,03832 \cdot \bar{T}_{of};$$

$$\Delta \bar{T}_l = - 1,122 \cdot M_{of} - 0,1242 \cdot \bar{T}_{of}$$

sollicitations réelles à l'origine :

$$M_o = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{et} \quad \bar{T}_o = + 253,8 \cdot \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

b) sens croissant :  $s = + 2,355$

$\bar{\lambda} < 0$  : il n'y a donc pas d'amortissement dans ce sens, il y a au contraire « amplification ».

$Y = 0,3415$ ,  $Y' = 0,1830$ ,  $m_o = - 2,671$ ,  $m'_o = 5,46$ ,  
 $t_o = 1,019$ ,  $t'_o = - 2,671$ ,  $\beta = - 1,956$ ,  $d = 1,464$ ,  
 $\xi_l = 0,03044$ ,  $\xi_l \cdot s = + 0,0717$ ,  $z = 3,77$ ,  $\beta z \xi_l = - 0,2245$ ,  
 $\Delta_l = 0,1680$  radians,  $e^{-\beta z \xi_l} = 1,252$ ,  $\sin \Delta_l = 0,1672$ ,  
 $\cos \Delta_l = 0,986$ ,

d'où :

$$b_1) \quad \bar{y} = 0,03415 \cdot M + 0,01830 \cdot \bar{T}$$

$$b_2) \quad \Delta M_o = + 0,956 \cdot M_{ly} + 0,573 \cdot \bar{T}_{ly};$$

$$\Delta \bar{T}_o = - 0,2138 \cdot M_{ly} + 1,517 \cdot \bar{T}_{ly}$$

sollicitations réelles à l'extrémité :

$$M_l = 26,49 \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{et} \quad \bar{T}_l = - 10,60 \cdot \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Pour un tube aussi court, le procédé d'approximations successives converge trop lentement; les équations III (voir le paragraphe 5) s'écrivent donc, au moyen de  $a_2)$  et  $b_2)$  (tout est multiplié par  $\frac{1 - \nu^2}{E}$ ) :

$$M_o = M_{of} + \Delta M_o = 1 \cdot M_{of} + 0,956 \cdot M_{ly} + 0,573 \cdot \bar{T}_{ly} = + 1$$

$$\bar{T}_o = \bar{T}_{of} - \Delta \bar{T}_o = 1 \cdot \bar{T}_{of} + 0,2138 \cdot M_{ly} - 1,517 \cdot \bar{T}_{ly} = + 253,8$$

$$M_l = M_{ly} + \Delta M_l = 0,2896 \cdot M_{of} + 0,03832 \cdot \bar{T}_{of} + 1 \cdot M_{ly} = + 26,49$$

$$-\bar{T}_l = \bar{T}_{ly} - \Delta \bar{T}_l = 1,122 \cdot M_{of} + 0,1242 \cdot \bar{T}_{of} + 1 \cdot \bar{T}_{ly} = + 10,60$$

Par substitution de  $M_{of}$  et  $\bar{T}_{of}$  tirés des deux premières équations et élimination de  $M_{ly}$ , il vient successivement et aisément :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{T}_{ly} = + 8,77, \quad \Delta \bar{T}_l = - 1,83 \\ M_{ly} = + 24,38, \quad \Delta M_l = + 2,11 \\ M_{of} = - 27,35, \quad \Delta M_o = + 28,35 \\ \bar{T}_{of} = + 261,85, \quad \Delta \bar{T}_o = + 8,05 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{le facteur } \frac{E}{1 - \nu^2} \\ \text{est sous-entendu !} \end{array}$$

Ces valeurs introduites dans  $a_1)$  et  $b_1)$  donnent :

$$\text{tube fictif 1 : } \bar{y}_{of} = + 156,9$$

$$\text{tube fictif 2 : } \Delta \bar{y}_o = + 1,116$$

et par superposition :

$$\text{tube réel : } \bar{y}_o = + 158,0 \quad \text{d'où } y_o = \frac{12 \cdot r}{h_o^2} \cdot \bar{y}_o = + 696 \text{ mm.}$$

Calculs effectués à la règle.

Ici encore les calculs seraient les mêmes pour un tube à épaisseur constante, les équations  $a_{1,2})$  et  $b_{1,2})$  étant cependant alors identiques puisque  $s = 0$ .

## 8. Justification de la méthode

Dans une précédente étude (voir bibliographie n° 3, en particulier le paragraphe 8), l'auteur avait montré que l'équation différentielle de l'élastique du tube cylindrique de révolution à épaisseur variable, soumis à des sollicitations circulaires,

$$(h^3 \cdot y'')'' + 12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{h}{r^2} \cdot y = 0$$



était satisfaite, lorsque  $h = (a + bx)^2$ , par l'expression

$$y = h^{-(\gamma + \frac{3}{4})} \cdot [A_1 \cos(\delta \operatorname{Log} h) + B_1 \sin(\delta \operatorname{Log} h)] + \\ + h^{(\gamma - \frac{3}{4})} \cdot [A_2 \cos(\delta \operatorname{Log} h) + B_2 \sin(\delta \operatorname{Log} h)],$$

Log étant le symbole du logarithme népérien,  $\gamma$  et  $\delta$  ayant la même signification qu'au paragraphe 6.

Le paragraphe 10 de l'étude précitée donnait la méthode générale de calcul des constantes  $A$  et  $B$  en fonction des conditions aux limites; cette méthode s'exprimait par une suite d'écritures symboliques, à développer numériquement dans chaque cas. S'il avait été possible de traduire analytiquement jusqu'au bout les écritures symboliques, des expressions analytiques auraient été trouvées, en fonction des données, pour les constantes  $A$  et  $B$ . La complication inextricable de ces développements analytiques a conduit à n'envisager alors que les cas beaucoup plus simples des tubes axialement illimités. C'est le développement analytique complet de la méthode générale symbolique, dans le cas des tubes axialement illimités, qui conduit aux relations I et II et aux expressions de leurs coefficients données précédemment.

Le calcul des tubes courts à partir des lois des tubes illimités se justifie aisément:

L'expression de la flèche  $y$ , rappelée ci-dessus, est *linéaire et homogène* en les  $A_1, B_1, A_2, B_2$ . Le tube illimité a deux constantes nulles:  $A_1$  et  $B_1$  si le tube est décroissant,  $A_2$  et  $B_2$  s'il est croissant. Ainsi le terme en  $A_1$  et  $B_1$  correspond à la loi du tube illimité croissant et le terme en  $A_2$  et  $B_2$  correspond à la loi du tube illimité décroissant de mêmes données. Les constantes  $A_1$  et  $B_1$  d'une part,  $A_2$  et  $B_2$  d'autre part s'expriment donc en fonction des sollicitations limites inconnues respectives de ces deux tubes illimités. En additionnant les deux termes, c'est-à-dire *en superposant les deux lois des tubes illimités*, on revient à l'expression initiale complète de la loi du tube court, à laquelle *correspondent* les sollicitations limites imposées de ce tube. Ecrire cette corres-

pondance conduit à déterminer les sollicitations limites inconnues des tubes illimités dits « tubes fictifs », ce qui donne les relations III. Le fait que ces relations peuvent *généralement* être résolues par approximations successives est si naturel, vu l'amortissement des lois des tubes illimités, qu'il est superflu d'insister sur ce point.

Enfin l'étude précitée donnait déjà un moyen de déterminer le tube équivalent — dont l'épaisseur varie selon la loi  $h = (a + bx)^2$  — remplaçant le tube à calculer dont la loi de variation de l'épaisseur peut être quelconque. La détermination de très nombreux tubes équivalents a conduit à la solution pratique rapide donnée au début de la présente note pour les tubes à variations linéaires de l'épaisseur.

#### 9. Remarque

Il est intéressant de souligner en terminant que le tube correspondant à  $|s| = 1,341$  ne provoque aucun amortissement des lois de  $\bar{y}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $M$  et  $\bar{T}$  dans le sens croissant et au contraire un amortissement très rapide dans le sens opposé (3,6 fois plus rapide que pour le tube à épaisseur constante correspondant); les tubes dont le facteur de forme  $s$  est plus grand, en valeur absolue, que 1,341 provoquent même une amplification des lois susdites dans le sens croissant; ce fait n'est pas sans signification pratique.

#### 10. Bibliographie

1. W. FLÜGGE: *Statik und Dynamik der Schalen*. Springer, Berlin.
2. A. DUMAS: *Sur le régime des déformations et des contraintes d'une enveloppe cylindrique de révolution, d'épaisseur variable, sollicitée par des efforts circulaires*. « Bulletin technique » n°s 15 et 16, 28 juillet 1945.
3. J. PASCHOUD: *Recherche de l'élasticité d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur variable*. « Bulletin technique » n°s 15 et 16, 28 juillet 1945.
4. J. TACHE: *Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable*. « Bulletin technique », n°s 21 et 22, 12 et 26 octobre 1946.

## BIBLIOGRAPHIE

**Résistance des matériaux et élasticité** (cours professé à l'Ecole des Ponts et Chaussées), par Gaston Pigeaud, inspecteur général des Ponts et Chaussées, chef du Service central d'études techniques du Ministère des travaux publics. Troisième édition. Librairie-imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris (6<sup>e</sup>). — Tome I: un volume 16×25 cm de xv + 510 pages, avec nombreuses figures; 1948. Prix: broché, 2000 fr. français. — Tome II: un volume 16×25 cm de 522 pages, avec nombreuses figures; 1950. Prix: broché, 3000 fr. français.

Voici la troisième édition — et même la quatrième, si l'on tient compte que l'une d'elles a donné lieu à deux tirages — d'un cours, enseigné pendant plus de vingt ans aux élèves de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées.

L'auteur, outre ses fonctions de professeur, dirigeait en même temps le Service d'études techniques du Ministère des travaux publics, et à ce titre a eu soit à faire, soit à faire faire, soit à connaître la plupart des projets d'ouvrages, tant métalliques qu'en béton armé, exécutés pendant cette période.

C'est dire que le traité, dont voici l'édition définitive, a subi les deux sanctions redoutables et de l'enseignement et des réalisations pratiques, et il est devenu, au moins pour les pays de langue française, un véritable classique en la matière.

Il a été conçu pour un auditoire spécial, celui des élèves de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, dont la culture scientifique est élevée et dont l'activité professionnelle aura

surtout à s'exercer dans le domaine des ponts et charpentes. Il leur faut surtout des notions générales et des méthodes d'ensemble, reposant sur des bases aussi larges et aussi bien assurées que possible, à la fois souples et fécondes, afin de s'adapter facilement à l'immense variété des cas concrets de la pratique, et avec toutes les réserves nécessaires quant aux frontières d'un domaine d'application légitime. Les ingénieurs, qui ont des besoins analogues aux leurs, peuvent sans doute se soumettre avec profit aux mêmes disciplines.

Dans une première partie, on trouve un exposé complet et élevé de la théorie mathématique de l'élasticité, ce qui permet d'en faire ensuite le support des théories plus simplistes et beaucoup plus assouplies de la résistance des matériaux, dans le domaine qui leur est commun, celui qui est appelé domaine élastique et qui répond aux grandes hypothèses de continuité et de proportionnalité.

Les différents cas qui peuvent se présenter à l'ingénieur constructeur sont, après une discussion minutieuse des hypothèses de base, examinés en détail et poussés assez loin pour permettre leur utilisation pratique et réelle dans les bureaux d'étude.

La 3<sup>e</sup> édition comporte des remaniements importants, notamment sur les deux problèmes de Boussinesq, sur les principes théoriques et pratiques des fondations sur pieux, sur le calcul des ponts suspendus à une ou plusieurs travées et à poutre de rigidité, et enfin une discussion minutieuse de l'application de la résistance des matériaux à l'étude des matériaux non continus ou non isotropes, avec une considération particulière pour les ouvrages en béton armé.