

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 76 (1950)  
**Heft:** 9

**Artikel:** Contribution à l'étude des barrages-voûtes: effet de l'élasticité des appuis  
**Autor:** Stucky, A. / Panchaud, F. / Schnitzler, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57427>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE

## DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

**ABONNEMENTS :**Suisse : 1 an, 20 francs  
Etranger : 25 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 17 francs  
Etranger : 22 francsPour les abonnements  
s'adresser à la librairie**F. ROUGE & Cie**  
à LausannePrix du numéro :  
1 fr. 25

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. — Membres : Fribourg : MM. P. JOYE, professeur ; E. LATELTIN, architecte — Vaud : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; Genève : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; CL. GROSGURIN, architecte ; E. MARTIN, architecte ; V. ROCHAT, ingénieur. — Neuchâtel : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; Valais : MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGNER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

**TARIF DES ANNONCES**Le millimètre  
(larg. 47 mm) 20 cts  
Réclames : 60 cts le mm  
(largeur 95 mm)Rabais pour annonces  
répétées**ANNONCES SUISSES S.A.**5, Rue Centrale  
Tél. 2 33 26LAUSANNE  
et Succursales**CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE**

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

**SOMMAIRE :** Contribution à l'étude des barrages-voûtes (suite), par A. STUCKY, professeur à l'Ecole Polytechnique de Lausanne, F. PANCHAUD, professeur, et E. SCHNITZLER, chargé de cours. — DIVERS : Comment abaisser le prix de revient de la construction. — NÉCROLOGIE : Maurice Arbella, ingénieur. — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT.

## CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES BARRAGES-VOÛTES

### Effet de l'élasticité des appuis

par A. STUCKY, professeur à l'Ecole polytechnique de Lausanne,  
F. PANCHAUD, professeur, et E. SCHNITZLER, chargé de cours(Suite).<sup>1</sup>**III. Arc élastique mince sur appuis élastiques déformables.**

On suppose que le module d'élasticité des deux parois rocheuses dans lesquelles s'encastre l'arc a la même valeur, de manière à pouvoir raisonner sur un système parfaitement symétrique.

Cet encastrement de l'arc dans des appuis élastiques déformables empêche — comme lorsque les appuis rocheux sont supposés indéformables, mais dans une mesure plus faible — les raccourcissements et les allongements tels qu'ils se produiraient dans l'« arc-élément de tube ». Des efforts hyperstatiques prennent naissance, dont l'effet est de créer des déplacements (translation et rotation) identiques pour les extrémités de l'arc et pour la fondation rocheuse de contact.

Pour analyser le mécanisme des forces et des déplacements qui entrent en jeu, isolons par la pensée l'arc de ses deux fondations :

1. Dans le cas de la *pression hydrostatique uniforme*, la ligne moyenne de l'« arc-élément de tube » subit sa déformation homothétique sous l'effet combiné de cette pression et des deux réactions d'appui  $R$  ; chacune des deux sections de naissance ne subit qu'une translation, sans rotation, dont la composante suivant la corde de l'arc a pour valeur :

$$\Delta x_o = \Delta r \cdot \sin \alpha = \frac{R\lambda}{E_b} \cdot \sin \alpha.$$

<sup>1</sup> Voir le *Bulletin technique* du 8 avril 1950, page 81.

Sous l'effet de la réaction  $R$ , la fondation rocheuse subit un tassement dans la direction de cette force, tassement qui, comme nous le verrons, se réduit dans le cas particulier à une translation sans rotation. La translation de la section de naissance de l'arc est différente de celle de la fondation rocheuse : la première se rapproche de la clé tandis que la seconde s'en éloigne. Les efforts hyperstatiques à introduire doivent être tels qu'appliqués successivement aux extrémités de l'arc (déformé homothétiquement) et aux fondations (déplacées sous l'effet de  $R$ ), ils impriment à ces sections de nouveaux déplacements qui les ramènent en coïncidence. En raison de la symétrie, ces efforts hyperstatiques sont égaux à chaque extrémité de l'arc ; ils se composent d'une force  $\Delta X$  parallèle à la corde de l'arc et d'un moment fléchissant  $\Delta M$ .

Appliqués au centre de gravité des sections de naissance de l'arc et aux points correspondants des sections de fondation, la force  $\Delta X$  et le moment  $\Delta M$  déterminent des translations et des rotations de ces sections. Puisque les extrémités de l'arc (supposé isolé de ses fondations) et les fondations (supposées isolées de l'arc) n'ont subi, antérieurement à l'application de la force  $\Delta X$  et du moment  $\Delta M$ , que des translations sans rotation, les rotations provoquées par ces efforts hyperstatiques doivent être égales en valeur absolue pour permettre la coïncidence des sections. Or, nous le verrons plus loin, la force  $\Delta X$  peut être appliquée en un point,

supposé lié rigidement à la section de naissance de l'arc puis à la section correspondante de la fondation, tel que les rotations de ces sections soient précisément égales en valeur absolue ou que leur différence soit nulle. Ce point constitue le centre élastique du système arc-fondation.

Dans le cas de la pression hydrostatique uniforme, la coïncidence des sections peut donc être obtenue en faisant agir sur chaque naissance de l'arc une seule force hyperstatique  $\Delta X$  convenablement choisie, parallèle à la corde de l'arc et passant par le centre élastique du système arc-fondation; le moment hyperstatique  $\Delta M$  est nul en ce point.

2. Une variation uniforme de température imprime à l'arc-élément de tube une déformation homothétique sans développer de réaction aux naissances. Le déplacement de chacune des sections de naissance de l'arc se réduit à une translation dont la composante suivant la corde de l'arc a pour valeur :

$$\Delta x_{ot} = \Delta r_t \cdot \sin \alpha = r \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \sin \alpha.$$

Les déplacements des sections correspondantes des fondations rocheuses (supposées isolées de l'arc) sont nuls puisque les réactions de naissance sont nulles. Comme dans le cas de la pression hydrostatique uniforme, les efforts hyperstatiques nécessaires pour ramener en coïncidence les sections de naissance de l'arc et celles des fondations se réduisent à une seule force  $\Delta X_t$  (par naissance) parallèle à la corde de l'arc et passant par le centre élastique du système arc-fondation.

3. Dans le cas d'un état de température variant linéairement d'un parement à l'autre de l'arc, de la valeur  $-\Delta\tau$  à la valeur  $+\Delta\tau$ , les sections de naissance de l'arc-élément de tube ne subissent aucun déplacement (translation et rotation nulles). Par contre, l'arc exerce sur les fondations un moment fléchissant de valeur  $M = \frac{1}{6} \cdot \beta \cdot \Delta\tau \cdot E_b \cdot e^2$  qui provoque une translation et une rotation des sections d'encastrement. Les efforts hyperstatiques se composent non seulement d'une force  $\Delta X_\tau$  pour corriger les translations, mais aussi d'un moment  $\Delta M_\tau$  nécessaire pour compenser la différence des rotations initiales des deux sections.

Avant d'aborder le calcul des efforts hyperstatiques correspondant aux trois cas de charge envisagés, il convient d'établir certaines relations exprimant les déplacements des naissances de l'arc et des fondations ainsi que la position du centre élastique du système arc-fondation.

Les déplacements des fondations rocheuses seront caractérisés par la lettre  $\delta$  et ceux des naissances de l'arc par la lettre  $\Delta$ .

#### Déplacements des fondations rocheuses

Soit  $E_r$  le module d'élasticité du rocher. Il va sans dire que  $E_r$  se rapporte non pas à un échantillon de rocher, mais à l'ensemble des couches sur lesquelles s'appuie l'arc du barrage et doit faire l'objet de mesures sur place.  $E_r$  est le module d'élasticité d'un sol homogénéisé dont les déformations élastiques seraient identiques à celles des fondations réelles des arcs, en tenant compte de la largeur d'emprise de l'appui.

Partant de la théorie de Boussinesq<sup>1</sup>, F. Vogt<sup>2</sup> a établi les expressions des déformations d'un massif élastique soumis à une force normale  $N$ , un effort tranchant  $T$  et un couple de moment fléchissant  $M$  (fig. 9). Ces expressions assez compliquées et développées dans l'ouvrage de Vogt<sup>2</sup>, peuvent se mettre sous la forme :

<sup>1</sup> BOUSSINESQ. — Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris, 1885.

<sup>2</sup> F. VOGT. — Ueber die Berechnung der Fundamentdeformation, Oslo, 1925.

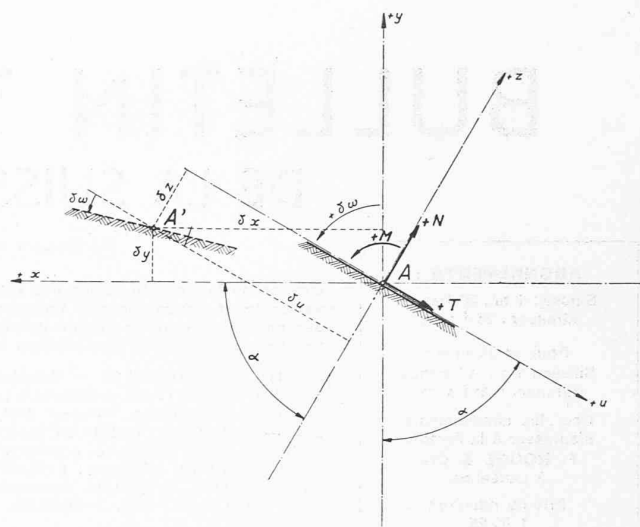


Fig. 9. — Déformations d'un massif élastique soumis à des efforts  $N$ ,  $T$  et  $M$ .

Translation :

$$\begin{cases} \delta z = \frac{1}{E_r} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot k_1 \cdot N \\ \delta u = \frac{1}{E_r} \cdot \left( \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot n \cdot k_1 \cdot T - \frac{(m+1)(m-2)}{m^2} \cdot k_3 \cdot \frac{M}{e} \right) \end{cases}$$

Rotation :

$$\delta \omega = \frac{1}{E_r} \cdot \left( - \frac{(m+1)(m-2)}{m^2} \cdot k_3 \cdot \frac{T}{e} + \frac{18}{\pi} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot k_2 \cdot \frac{M}{e^2} \right).$$

$k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  et  $n$  sont des coefficients numériques dont la valeur dépend du rapport  $\left(\frac{b}{e}\right)_{\text{rocher}}$  de la section d'encastrement; ils sont donnés par le graphique de la figure 10;  $m$  représente le coefficient de contraction de Poisson<sup>1</sup>.

En posant :

$$k_n = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot k_1; \quad k_t = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot n \cdot k_1; \quad k_m = \frac{(m+1)(m-2)}{m^2} \cdot k_3;$$

$$k_\tau = \frac{(m+1)(m-2)}{m^2} \cdot k_3; \quad k_\mu = \frac{18}{\pi} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot k_2$$

les expressions des déformations s'écrivent :

<sup>1</sup> A. STUCKY. — Le Barrage de la Dixence (B. T. S. R. des 16. II, 2. III et 13. IV 1946).

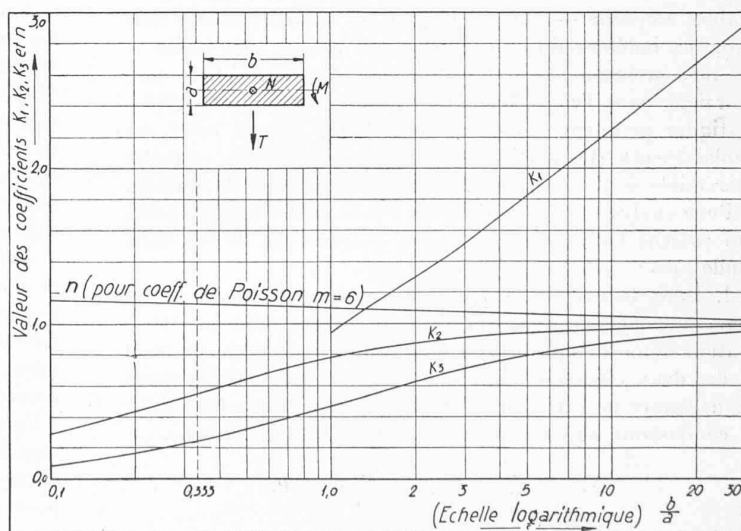


Fig. 10. — Coefficients de déformation du rocher (d'après Vogt).

$$\begin{aligned} \text{Translation : } & \begin{cases} \delta z = \frac{1}{E_r} \cdot k_n \cdot N \\ \delta u = \frac{1}{E_r} \left( k_l \cdot T - k_m \cdot \frac{M}{e} \right) \end{cases} \\ \text{Rotation : } & \delta w = \frac{1}{E_r} \cdot \left( -k_\tau \cdot \frac{T}{e} + k_\mu \cdot \frac{M}{e^2} \right) \end{aligned}$$

L'expérience montre qu'en général, on peut admettre pour  $\left(\frac{b}{e}\right)_{\text{rocher}}$  la valeur 4 et pour  $m$  la valeur 6.

Dans ces conditions :  $k_n = 1,63$  ;  $k_l = 1,73$  ;  $k_m = 0,59$  ;  
 $k_\tau = 0,59$  ;  $k_\mu = 5,18$ .

On remarquera que les valeurs de  $k_m$  et  $k_\tau$  sont les mêmes, ainsi que le veut d'ailleurs le théorème de réciprocité de Maxwell.

Dans le calcul de l'arc symétrique, les seules déformations qui interviennent pour la détermination des efforts hyperstatiques sont le déplacement  $\delta x$  suivant la corde de l'arc et la rotation  $\delta w$  ; le déplacement  $\delta y$  des appuis entraîne une translations générale de l'arc, sans influence sur ses efforts internes.

Les déplacements de l'appui gauche qui serviront de base aux raisonnements ultérieurs, s'écrivent en définitive :

$$\text{Translation : } \delta x = -\delta z \cdot \cos \alpha - \delta u \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{E_r} \cdot \left[ -k_n \cdot \cos \alpha \cdot N - k_l \cdot \sin \alpha \cdot T + k_m \cdot \sin \alpha \cdot \frac{M}{e} \right]$$

$$\text{Rotation : } \delta w = \frac{1}{E_r} \cdot \left[ -k_\tau \cdot \frac{T}{e} + k_\mu \cdot \frac{M}{e^2} \right]$$

Le signe positif de  $\delta x$  correspond au sens droite-gauche, sens positif de l'axe des  $x$ , et le signe positif de  $\delta w$  au sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

#### Déplacement des naissances de l'arc

Calculons les déplacements  $\Delta x$  et  $\Delta w$  des sections de naissance de l'arc supposé libre et sollicité en ces sections par deux forces directement opposées  $\Delta X$  agissant suivant la corde de l'arc et deux couples opposés de moment  $\Delta M$ . Les deux déplacements  $\Delta x$  et  $\Delta w$  de la naissance gauche, par exemple, sont identiques à ceux de l'extrémité d'un demi-arc de mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques, mais supposé encastré à la clé (section de clé de l'arc primitif) (fig. 11).

Les éléments réduits au centre de gravité d'une section quel-

conque de l'arc (définie par l'angle  $\theta$  qu'elle fait avec l'axe  $Oy$ ) des efforts agissant à gauche de cette section ont pour valeur :

$$\begin{cases} \mathcal{N}_\theta = \Delta X \cdot \cos \theta \\ \mathcal{T}_\theta = \Delta X \cdot \sin \theta \\ \mathcal{M}_\theta = \Delta X \cdot r \cdot (\cos \theta - \cos \alpha) + \Delta M \end{cases}$$

La déformation cherchée  $\Delta x$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta x = & \int_0^\alpha \frac{\mathcal{N}_\theta \cdot \cos \theta \cdot ds}{E_b \cdot e} + \int_0^\alpha v \cdot \frac{\mathcal{T}_\theta \cdot \sin \theta \cdot ds}{G_b \cdot e} + \\ & + \int_0^\alpha \frac{\mathcal{M}_\theta \cdot r \cdot (\cos \theta - \cos \alpha) \cdot ds}{E_b \cdot \frac{e^3}{12}} \end{aligned}$$

La section de l'arc étant admise rectangulaire (épaisseur =  $e$ , hauteur = 1), le coefficient  $v$  du second terme, qui exprime la déformation au glissement, a pour valeur  $v = \frac{6}{5}$ . D'autre part,

pour le béton, on a sensiblement  $G_b = \frac{2}{5} E_b$ . On peut donc substituer  $\frac{3}{E_b}$  à  $\frac{v}{G_b}$ .

En remplaçant dans l'expression  $\Delta x$ , les efforts  $\mathcal{N}_\theta$ ,  $\mathcal{T}_\theta$  et le moment fléchissant  $\mathcal{M}_\theta$  par leurs valeurs et  $ds$  par  $r \cdot d\theta$ , cette expression devient :

$$\begin{aligned} \Delta x = & \frac{\Delta X}{E_b} \cdot \left\{ \frac{r}{e} \cdot \int_0^\alpha \cos^2 \theta \cdot d\theta + 3 \cdot \frac{r}{e} \cdot \int_0^\alpha \sin^2 \theta \cdot d\theta + \right. \\ & \left. + 12 \cdot \frac{r^3}{e^3} \cdot \int_0^\alpha (\cos \theta - \cos \alpha)^2 \cdot d\theta \right\} + \frac{\Delta M}{E_b} \cdot 12 \cdot \frac{r^2}{e^3} \cdot \int_0^\alpha (\cos \theta - \cos \alpha) \cdot d\theta \end{aligned}$$

En posant, comme précédemment,  $\lambda = \frac{r}{e}$ , puis en effectuant le calcul des intégrales, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta x = & \frac{\Delta X}{E_b} \cdot \left\{ (2\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \lambda + 6 \cdot (\alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \lambda^3 \right\} + \\ & + \frac{\Delta M}{E_b \cdot e} \cdot 12 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \cdot \lambda^2 \end{aligned}$$

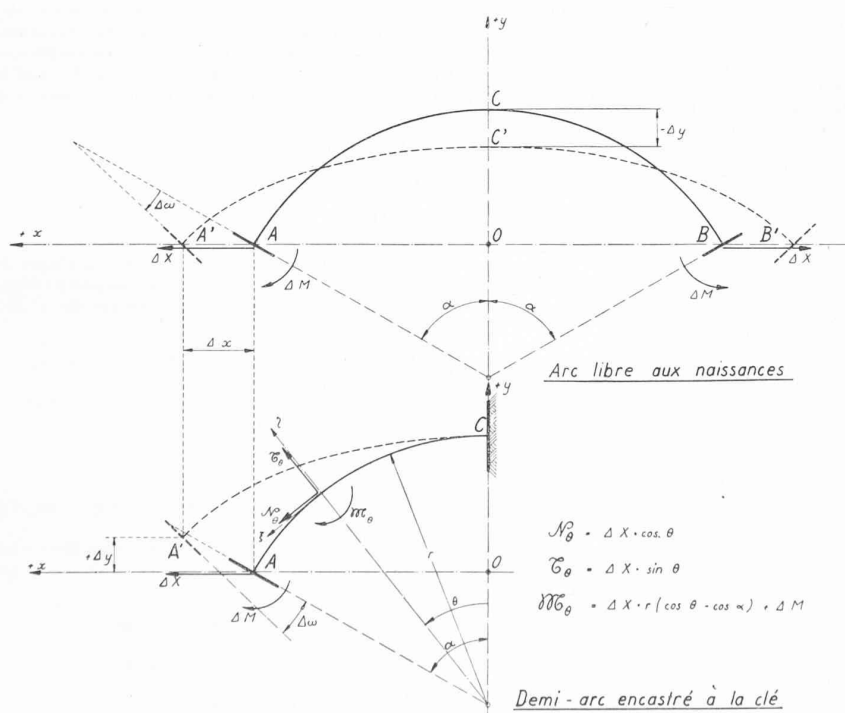


Fig. 11. — Déformations d'un arc symétrique d'épaisseur constante, supposé libre, sollicité symétriquement en ses naissances par deux forces directement opposées et deux couples opposés.

Comparaison avec un demi-arc de mêmes caractéristiques encastré à la clé.

$$\mathcal{N}_\theta = \Delta X \cdot \cos \theta$$

$$\mathcal{T}_\theta = \Delta X \cdot \sin \theta$$

$$\mathcal{M}_\theta = \Delta X \cdot r \cdot (\cos \theta - \cos \alpha) + \Delta M$$

De même, la rotation de la section de naissance prend la forme suivante :

$$\Delta w = \int_0^\alpha \frac{\mathfrak{M}_\theta}{E_b \cdot \frac{e^3}{12}} \cdot ds = \int_0^\alpha \frac{[\Delta X \cdot r \cdot (\cos \theta - \cos \alpha) + \Delta M] \cdot r \cdot d\theta}{E_b \cdot \frac{e^3}{12}} =$$

$$= \frac{\Delta X}{E_b \cdot e} \cdot 12 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \lambda^2 + \frac{\Delta M}{E_b \cdot e^2} \cdot 12 \alpha \cdot \lambda.$$

Si, pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\alpha - \sin \alpha \cos \alpha; & B_1 &= 12 \alpha; \\ A_2 &= 12 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha); & B_2 &= 12 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = A_2; \\ A_3 &= 6 (\alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha); & & \text{(Théorème de réciprocité de Maxwell),} \end{aligned}$$

les expressions de ces deux déplacements s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{\Delta X}{E_b} \cdot (A_1 \cdot \lambda + A_3 \cdot \lambda^3) + \frac{\Delta M}{E_b \cdot e} \cdot B_2 \cdot \lambda^2 \\ \Delta w = \frac{\Delta X}{E_b \cdot e} \cdot A_2 \cdot \lambda^2 + \frac{\Delta M}{E_b \cdot e^2} \cdot B_1 \cdot \lambda. \end{cases}$$

Le signe positif de  $\Delta x$  correspond au sens droite-gauche, sens positif de l'axe des  $x$ , et le signe positif de  $\Delta w$  au sens des aiguilles d'une montre.

### Centre élastique du système arc-fondation

Le centre élastique d'un arc encastré dans des parois rigides (fig. 12) est défini habituellement comme le point  $P$  tel que, pour un système d'axes rectangulaires  $xPy$  ayant ce point pour origine, les relations suivantes soient satisfaites :

$$\int_A^B \frac{x \cdot ds}{I} = 0 \quad \text{et} \quad \int_A^B \frac{y \cdot ds}{I} = 0.$$

L'orientation des axes  $Px$  et  $Py$  est en général choisie de manière que l'on ait en outre

$$\int_A^B \frac{xy \cdot ds}{I} = 0.$$

Si l'arc est d'épaisseur constante, ce point  $P$  coïncide avec le centre de gravité de sa fibre moyenne.

Si l'arc est supposé libre en sa naissance  $A$ , encastré rigide-ment à la section  $B$ , et le centre élastique  $P$  lié rigide-ment à la section  $A$ , on sait qu'une force  $X$  appliquée en  $P$  et dirigée suivant l'axe  $Px$  détermine une translation de la naissance  $A$  parallèle à cet axe, sans rotation ; de même une force  $Y$  appliquée en  $P$  détermine une translation parallèle à l'axe  $Py$ , sans rotation ; un couple de moment  $M$  agissant seul détermine un déplacement de la naissance  $A$  admettant le point  $P$  pour centre de rotation.

Une forme différente peut être donnée à la définition mathématique ci-dessus du centre élastique, qui permet de l'étendre au cas de l'arc encastré dans des parois élastiques déformables.

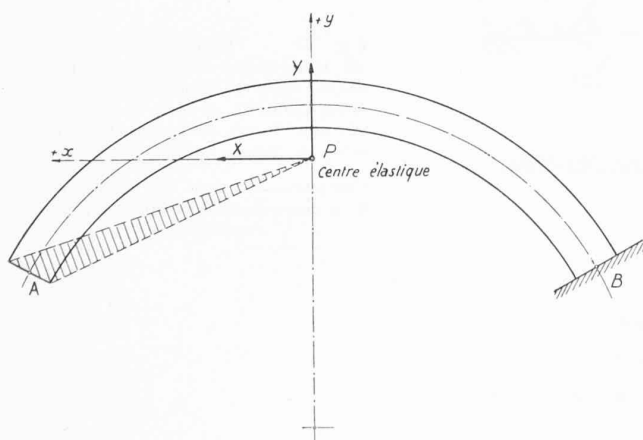


Fig. 12. — Système d'axes de référence avec le centre élastique  $P$  de l'arc pour origine.

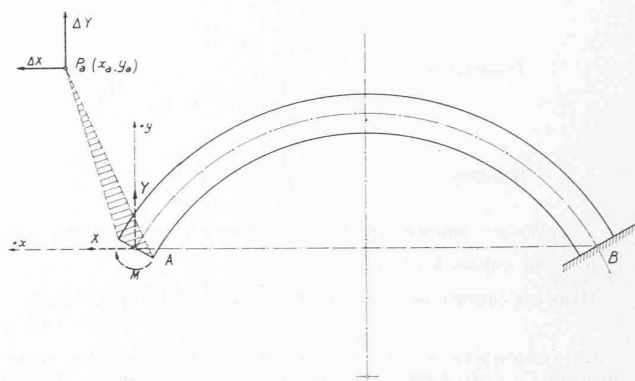


Fig. 13. — Système d'axes de référence avec le centre de gravité de la naissance  $A$  de l'arc pour origine.

Soit dans l'arc encastré rigide-ment en  $B$ , libre en  $A$ , un système d'axes rectangulaires de référence  $xAy$  fixe dans le plan avec le point  $A$  non déplacé pour origine (fig. 13) ; ce système peut avoir une orientation d'ailleurs quelconque, mais l'axe  $Ax$  sera supposé coïncider avec la corde de l'arc et l'axe  $Ay$  parallèle à l'axe de symétrie de l'arc.

En vertu du principe de superposition — ou ce qui revient au même, en raison de la linéarité des relations exprimant les déplacements en fonction des forces extérieures — deux forces  $X$  et  $Y$  parallèles aux axes de référence, ainsi qu'un couple de moment  $M$ , agissant tous trois sur l'arc en  $A$ , déterminent les déplacements suivants de ce point :

$$\begin{cases} \Delta x = a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} M \\ \Delta y = a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} M \\ \Delta w = a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} M \end{cases}$$

Les coefficients  $a_{ik}$  sont fonction de la forme géométrique de l'arc et du module d'élasticité du béton ; la forme explicite des coefficients  $a_{11}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{21}$  et  $a_{33}$  (les seuls intéressants dans le cas de l'arc symétrique) a d'ailleurs été établie plus haut pour le demi-arc  $AC$  supposé encastré en  $C$ . En vertu du principe de réciprocité de Maxwell,

$$a_{ik} = a_{ki} \quad \text{pour } i \neq k.$$

Défini alors comme le point  $P_a$  tel que des forces quelconques  $\Delta X$  et  $\Delta Y$  appliquées sur l'arc en ce point (supposé lié rigide-ment à la naissance  $A$ ) ne provoquent aucune rotation de cette naissance, le centre élastique  $P_a$  de l'arc peut être déterminé par ses coordonnées  $(x_a, y_a)$  exprimées en fonction des coefficients  $a_{ik}$ .

La translation des deux forces  $\Delta X$  et  $\Delta Y$  en  $A$  conduit aux valeurs suivantes des expressions  $X$ ,  $Y$  et  $M$  des formules ci-dessus :

$$\begin{cases} X = \Delta X \\ Y = \Delta Y \\ M = -\Delta X \cdot y_a + \Delta Y \cdot x_a. \end{cases}$$

Les valeurs des coordonnées  $(x_a, y_a)$  du centre élastique  $P_a$  sont celles qui introduites dans l'expression de  $\Delta w$  l'annulent identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de  $\Delta X$  et de  $\Delta Y$  :

$$\begin{aligned} \Delta w &= a_{31} \Delta X + a_{32} \Delta Y + a_{33} (-\Delta X \cdot y_a + \Delta Y \cdot x_a) \equiv 0 \\ (a_{31} - a_{33} y_a) \Delta X + (a_{32} + a_{33} x_a) \Delta Y &\equiv 0, \quad \text{d'où} \\ x_a &= -\frac{a_{32}}{a_{33}} \quad \text{et} \quad y_a = +\frac{a_{31}}{a_{33}}. \end{aligned}$$

Telles sont les coordonnées du centre élastique de l'arc en fonction des coefficients  $a_{ik}$ .

En ce qui concerne la fondation rocheuse considérée isolément (fig. 14) les déplacements du point  $A$ , nous l'avons vu, peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \delta x = b_{11} X + b_{12} Y + b_{13} M \\ \delta y = b_{21} X + b_{22} Y + b_{23} M \\ \delta w = b_{31} X + b_{32} Y + b_{33} M \end{cases}$$

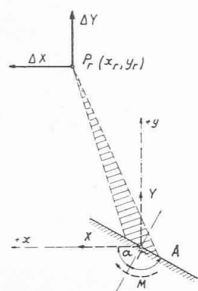


Fig. 14.  
Système d'axes de référence rapporté à la fondation rocheuse.

On a toujours  $b_{ik} = b_{ki}$  pour  $i \neq k$ .

Les coordonnées  $(x_r, y_r)$  du centre élastique  $P_r$  de la fondation rocheuse s'écrivent, par analogie avec les relations précédentes :

$$x_r = -\frac{b_{32}}{b_{33}} \quad \text{et} \quad y_r = +\frac{b_{31}}{b_{33}}.$$

Enfin, le centre élastique  $P_s$  du système arc-fondation sera un point tel que deux forces  $\Delta X$  et  $\Delta Y$  parallèles aux axes et passant par ce point (supposé lié rigidement à la naissance de l'arc puis à la fondation) provoquent des rotations  $\Delta w$  et  $\delta w$  égales entre elles :

$$\Delta w - \delta w = (a_{31} - b_{31}) X + (a_{32} - b_{32}) Y + (a_{33} - b_{33}) M \equiv 0.$$

Les coordonnées du centre élastique  $P_s$  du système arc-fondation ont donc les valeurs suivantes :

$$x_s = -\frac{a_{32} - b_{32}}{a_{33} - b_{33}}, \quad y_s = +\frac{a_{31} - b_{31}}{a_{33} - b_{33}}.$$

Pour l'étude de l'arc symétrique, seule l'ordonnée  $y_s$  est utile, puisque les efforts hyperstatiques ne comportent pas de composante dirigée suivant l'axe de symétrie de l'arc. Cette ordonnée  $y_s$  peut s'exprimer en fonction des valeurs des coefficients  $a_{ik}$  et  $b_{ik}$  établies plus haut, les coefficients  $a_{ik}$  étant ceux qui correspondent au demi-arc supposé encastré à la clé :

$$\text{Arc :} \quad \Delta w = \underbrace{\frac{A_2 \cdot \lambda^2}{E_b \cdot e}}_{a_{31}} \cdot \Delta X + \underbrace{\frac{B_1 \cdot \lambda}{E_b \cdot e^2}}_{a_{33}} \cdot \Delta M.$$

$$\text{Fondation :} \quad \delta w = \frac{1}{E_r} \cdot \left[ -k_\tau \cdot \frac{T}{e} + k_\mu \cdot \frac{M}{e^2} \right] = -\underbrace{\frac{k_\tau \sin \alpha}{E_r \cdot e}}_{b_{31}} \cdot \Delta X + \underbrace{\frac{k_\mu}{E_r \cdot e^2}}_{b_{33}} \cdot \Delta M.$$

Les conventions de signes adoptées pour les rotations étant différentes pour l'arc et pour la fondation, l'égalité des rotations  $\Delta w$  et  $\delta w$  s'écrit :  $\Delta w + \delta w = 0$ , ce qui entraîne :

$$y_s = + \frac{a_{31} + b_{31}}{a_{33} + b_{33}} = \frac{\frac{A_2 \cdot \lambda^2}{E_b \cdot e} - \frac{k_\tau \sin \alpha}{E_r \cdot e}}{\frac{B_1 \cdot \lambda}{E_b \cdot e^2} + \frac{k_\mu}{E_r \cdot e^2}}.$$

En introduisant dans cette expression les valeurs :

$$\begin{aligned} A_2 &= 12 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) & \lambda &= \frac{r}{e} \\ B_1 &= 12 \alpha & n &= \frac{E_r}{E_b} \end{aligned} \quad (1)$$

il vient, tous calculs faits :

$$y_s = r \cdot \frac{\left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{k_\tau \sin \alpha}{12 \alpha \lambda^2}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{k_\mu}{12 \alpha \lambda}}.$$

Désignons par  $\eta_o$  l'ordonnée relative (par rapport au rayon moyen  $r$ ) du centre élastique de l'arc sur appuis indéformables et par  $\eta_s$  celle du centre élastique du système arc-fondation :

$$\eta_o = \frac{y_o}{r} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \quad \eta_s = \frac{y_s}{r}.$$

L'introduction de  $\eta_o$  et  $\eta_s$  dans l'expression de  $y_s$  donne finalement :

$$\eta_s = \frac{\eta_o - \frac{1}{n} \cdot \frac{k_\tau \sin \alpha}{12 \alpha \lambda^2}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{k_\mu}{12 \alpha \lambda}}$$

$\eta_o$  ne dépendant que de l'angle  $\alpha$ , il est intéressant de discuter cette formule pour des valeurs variables de  $n$  et de  $\lambda$  :

1. Lorsque  $n = \infty$  ou  $\lambda = \infty$ , on retrouve l'expression relative au cas des appuis indéformables, et  $\eta_s = \eta_o$ .

<sup>1</sup> On ne confondra pas le rapport  $n$  ainsi défini avec le coefficient figurant dans les formules de Vogt et sur le graphique de la figure 10 (voir page 110).

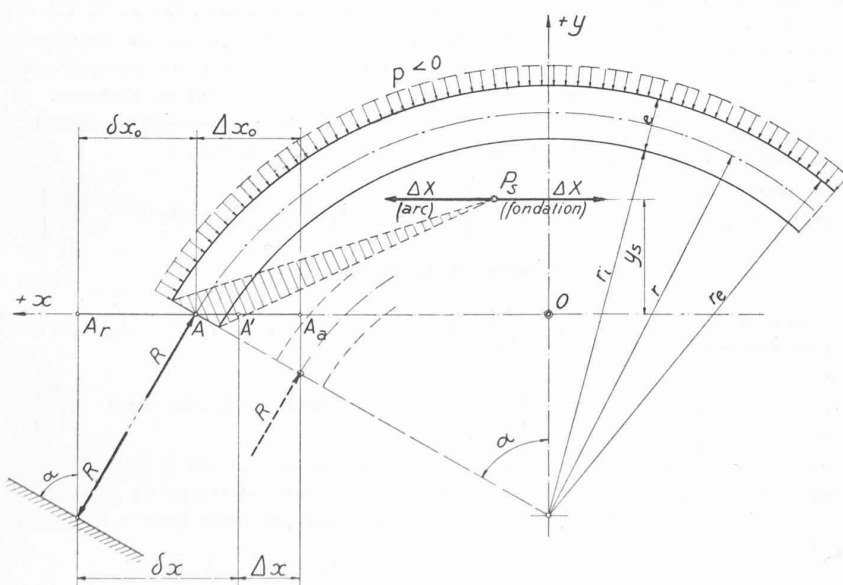


Fig. 15. — Arc élastique mince sur appuis élastiques déformables.

Effet d'une pression hydrostatique uniforme.

Schéma des déplacements suivant la corde de l'arc de la naissance A et de ceux de la fondation rocheuse correspondante.



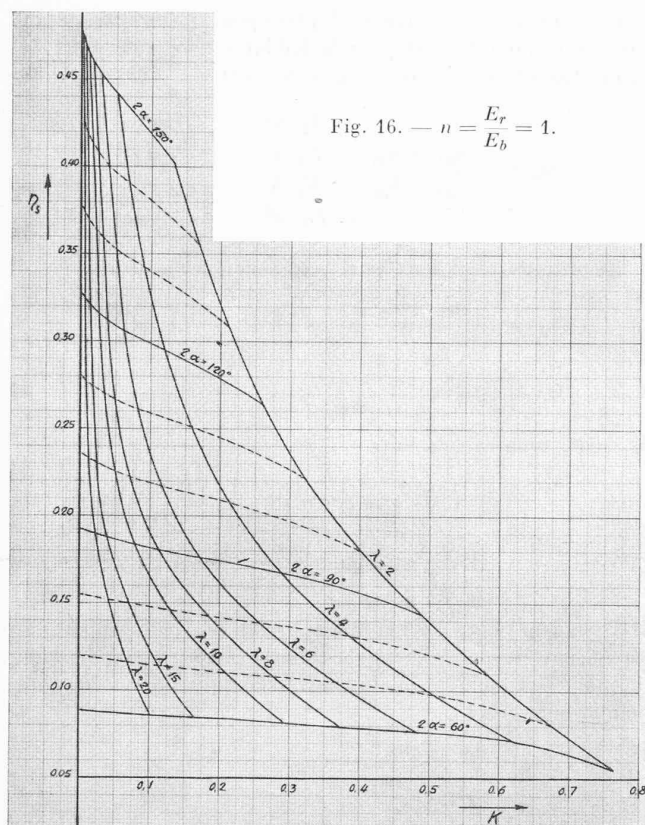
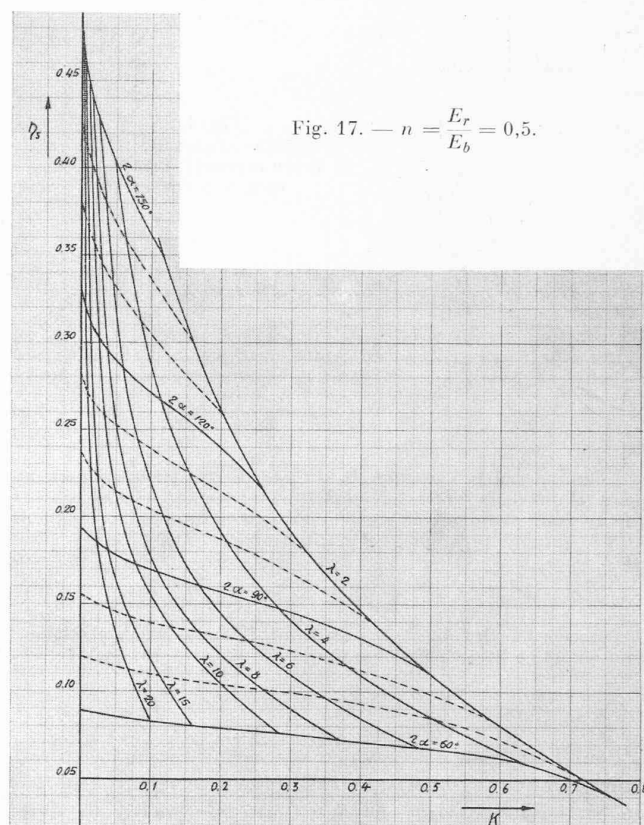
Fig. 16. —  $n = \frac{E_r}{E_b} = 1$ .Fig. 17. —  $n = \frac{E_r}{E_b} = 0.5$ .

Fig. 16 et 17. — Arc élastique mince sur appuis élastiques déformables.  
Effet d'une pression hydrostatique uniforme.  
Coefficient hyperstatique  $K$  et ordonnée relative  $\eta_s$  du centre élastique pour les valeurs 1 et 0,5  
du rapport des modules d'élasticité  $n = \frac{E_r}{E_b}$ .

2. Si  $n$  décroît, c'est-à-dire si le module d'élasticité du rocher diminue, le numérateur de la fraction décroît et son dénominateur croît : donc  $\eta_s$  décroît. Le centre élastique se déplace vers l'aval lorsque le module d'élasticité du rocher diminue, les caractéristiques géométriques de l'arc demeurant constantes.

3. Si  $\lambda$  décroît, c'est-à-dire si l'arc devient relativement plus épais, le même raisonnement montre que  $\eta_s$  décroît également. Pour deux arcs de même rayon moyen ayant même angle au centre et appuyés sur des parois rocheuses identiques, le centre élastique relatif à l'arc le plus épais est situé le plus à l'aval.

Les conclusions 2 et 3 confirment mathématiquement ce que l'on pouvait prévoir à priori : l'influence de la déformation des appuis rocheux est d'autant plus grande que le module d'élasticité de la roche est plus petit et que l'arc est plus épais.

#### DÉTERMINATION

##### DES EFFORTS HYPERSTATIQUES DANS L'ARC MINCE ÉLASTIQUE SUR APPUIS ÉLASTIQUES DÉFORMABLES

##### 1. Cas de la pression hydrostatique uniforme

La déformation homothétique de la ligne moyenne de l'« arc-élément de tube » entraîne, nous l'avons vu, un déplacement des naissances dont la composante, suivant l'axe des  $x$  (axe confondu avec la corde de l'arc), a pour valeur (fig. 15) :

$$\Delta x_o = R \cdot \frac{\lambda \sin \alpha}{E_b} = \overline{AA}_a \quad (R < 0, \Delta x_o < 0).$$

La réaction  $R$  de l'arc provoque d'autre part un tassement de la fondation rocheuse supposée libre dont la composante suivant ce même axe a pour valeur :

$$\delta x_o = -R \cdot \frac{k_n \cdot \cos \alpha}{E_r} = \overline{AA}_r \quad (R < 0, \delta x_o > 0).$$

Les deux sections, supposées un instant dissociées, doivent être ramenées en coïncidence par l'effet de la force hyperstatique  $\Delta X$ , encore inconnue, agissant au centre élastique du système arc-fondation, et s'exerçant successivement sur la naissance de l'arc et sur la fondation rocheuse.

La force  $\Delta X$  provoque les déplacements suivants :

Déplacement de la naissance de l'arc :

$$\Delta x = \frac{1}{E_b} \left\{ (A_1 \cdot \lambda + A_3 \cdot \lambda^3) \cdot \Delta X + B_2 \cdot \lambda^2 \cdot \frac{\Delta M}{e} \right\} = \overline{AA}_a'.$$

Déplacement de la fondation :

$$\delta x = \frac{1}{E_r} \left\{ -k_n \cdot \cos \alpha \cdot N - k_t \cdot \sin \alpha \cdot T + k_m \cdot \sin \alpha \cdot \frac{M}{e} \right\} = \overline{AA}_r'.$$

Dans ces deux expressions,  $\Delta X$  est la force hyperstatique cherchée, appliquée au centre élastique du système, et  $\Delta M$  le moment fléchissant créé par cette force à la naissance :

$$\Delta M = -\Delta X \cdot y_s.$$

L'équation de déformation de laquelle sera déduite la valeur de  $\Delta X$  s'écrit alors :

$$(\overline{AA'}) = \overline{AA_a} + \overline{A_aA'} = \overline{AA_r} + \overline{A_rA'}, \quad \text{c'est-à-dire :} \\ \Delta x_o + \Delta x = \delta x_o + \delta x.$$

En remplaçant dans cette équation les expressions des déplacements partiels par leurs valeurs, elle devient :

$$R \cdot \frac{\lambda \sin \alpha}{E_b} + \frac{1}{E_b} \left\{ (A_1 \cdot \lambda + A_3 \cdot \lambda^3) \cdot \Delta X + B_2 \cdot \lambda^2 \cdot \frac{(-\Delta X \cdot y_s)}{e} \right\} = \\ = -R \cdot \frac{k_n \cos \alpha}{E_r} + \frac{1}{E_r} \left\{ -(k_n \cdot \cos^2 \alpha + k_t \cdot \sin^2 \alpha) \cdot \Delta X + \right. \\ \left. + k_m \cdot \sin \alpha \cdot \frac{(-\Delta X \cdot y_s)}{e} \right\}.$$

En substituant  $n$  au rapport  $\frac{E_r}{E_b}$  et  $\eta_s \cdot r$  à  $y_s$ , la valeur de  $\Delta X$  tirée de cette dernière équation prend la forme suivante :

$$\Delta X = R \cdot \frac{-(\lambda \sin \alpha + \frac{1}{n} k_n \cdot \cos \alpha)}{A_1 \cdot \lambda + A_3 \cdot \lambda^3 - \eta_s \cdot B_2 \cdot \lambda^3 + \frac{1}{n} \cdot [k_n \cdot \cos^2 \alpha + k_t \cdot \sin^2 \alpha + \eta_s \cdot \lambda \cdot k_m \cdot \sin \alpha]}.$$

Rappelons que dans cette expression les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$A_1 = 2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$A_3 = 6 (\alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$

$$B_2 = 12 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

$$\eta_s = \frac{\eta_o - \frac{1}{n} \cdot \frac{k_t \sin \alpha}{12 \alpha \lambda^2}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{k_\mu}{12 \alpha \lambda}}, \quad \text{avec } \eta_o = \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha.$$

L'expression de  $\Delta X$ , relativement complexe, ne se prête pas à une discussion simple. On peut cependant remarquer que si l'on y fait  $n = \infty$ , on retrouve la valeur correspondant au cas des appuis indéformables.

Le coefficient de  $R$  peut être posé égal à  $K$  :

$$\Delta X = K \cdot R.$$

Cette formule généralise celle obtenue pour le cas des appuis indéformables :

$$\Delta X_o = K_o \cdot R$$

$K$  est un coefficient sans dimension fonction, non seulement du rapport  $\lambda = \frac{r}{e}$  et de l'angle au centre  $2\alpha$  comme

le coefficient  $K_o$ , mais encore du rapport  $n$  du module d'élasticité du rocher à celui du béton, ainsi que des coefficients  $k_n, k_t, k_m, k_\tau, k_\mu$  caractérisant les déformations de la fondation rocheuse relativement à la nature des efforts qui la sollicitent (effort normal, effort tranchant, moment de flexion).

Pour les applications, il est indiqué de représenter sous forme graphique la variation du coefficient  $K$  en fonction des divers paramètres dont il dépend, ce qui permet la discussion (fig. 16 et 17, à comparer avec la fig. 4, p. 85).

La connaissance de la force hyperstatique  $\Delta X$  et de sa position  $y_s$  (ordonnée du centre élastique) permet, comme dans le cas des appuis indéformables, de déterminer les contraintes dans l'arc venant se superposer à la contrainte

$$\sigma_o = \frac{pr_e}{e}.$$

(A suivre.)

## DIVERS

### Comment abaisser le prix de revient de la construction

Sous ce titre, M. A. de Grave, directeur au Ministère des Travaux publics, à Bruxelles, publie dans le numéro d'avril 1950 de la revue L'Habitation<sup>1</sup> un article remarquable dont nous reproduisons quelques passages essentiels. Si en ce domaine il n'est pas de solution commune à tous les pays, on ne saurait nier que les problèmes évoqués ici sont, ainsi que les mesures envisagées pour y faire face, d'une grande actualité en Suisse également.

(Réd.)

#### I. Position du problème

A. — Lorsque l'ensemble des techniques économiques d'une population sont en progrès, lui permettant de ce fait d'élargir de façon continue son standard de vie, et que l'une de ces techniques progresse moins vite que les autres, le prix des biens ou services qu'elle produit tend à devenir prohibitif. Tel semble être le cas actuel des industries qui concourent à la production des logements, aussi bien en Europe qu'en Amérique, d'ailleurs.

Mon intention n'est pas de faire ici une étude économique fouillée de ce problème. D'autres l'ont faite avant moi avec

plus de compétence, et je devrai souvent, au cours de cet exposé, me borner à reprendre ce qu'ils ont dit.

Deux aspects du problème sont à retenir dès l'abord.

Le retard des industries de la construction est un retard relatif. Bien que cette industrie ait fait des progrès notables au cours du dernier demi-siècle, le rythme de ces progrès a été plus lent que celui de l'ensemble des autres activités économiques.

D'autre part, ce retard relatif n'est pas un retard purement technique. Il réside aussi — et peut-être surtout — dans les méthodes et dans l'organisation économique de la branche.

Sur le plan technique, des progrès considérables ont été réalisés, dans la construction des grands bâtiments notamment. On réalise aujourd'hui des bâtiments qui auraient été inconcevables il y a cent ans. En outre, de nombreuses techniques nouvelles ont été inventées et mises au point pour l'équipement et le confort.

Néanmoins, la construction des habitations, et surtout des petites maisons unifamiliales, a peu évolué entre-temps. Les matériaux sont restés les mêmes et, à quelques progrès de détail près, les méthodes de mise en œuvre sont encore, dans l'ensemble, ce qu'elles étaient. On ne constate que peu de transformations techniques et économiques qui aient accru la productivité de la construction et concouru de ce fait à une réduction des prix de vente.

B. — La conséquence principale de cet état de choses est que la construction d'un logement demande aujourd'hui à peu près le même nombre total d'heures de travail qu'il y a cinquante ans. Aussi le coût du logement, mesuré avec le

<sup>1</sup> Revue d'étude et d'information de l'Institut national belge pour la promotion de l'habitation, 34, rue du Fossé-aux-Loups, Bruxelles.