

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 76 (1950)
Heft: 3

Artikel: Introduction élémentaire de l'ellipse d'erreur moyenne
Autor: Bachmann, W.K.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-57417>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE

DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francsPour les abonnements
s'adresser à la librairie
F. ROUGE & Cie
à LausannePrix du numéro :
1 fr. 25**Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.****COMITÉ DE PATRONAGE.** — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, Ingénieur, à Genève. — Membres : *Fribourg* : MM. † L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; *CH. THÉVENAZ*, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, Ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte, *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais* : MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGENER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

TARIF DES ANNONCESLe millimètre
(larg. 47 mm) 20 ctsRéclames : 60 cts le mm
(largeur 95 mm)Rabais pour annonces
répétées**ANNONCES SUISSES S.A.**5, Rue Centrale
Tél. 2 33 26
LAUSANNE
et Succursales**CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE**

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : *Introduction élémentaire de l'ellipse d'erreur moyenne*, par W. K. BACHMANN, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. — *Oeuvres et souvenirs de René Thury (1860-1938)*, par J. PRONIER et E. JUILLARD. — Section genevoise de la Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Rapport du Président* ; *Procès-verbal de la 102^e assemblée générale*. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Communiqué du Comité central* ; *Extrait des procès-verbaux des séances du Comité central*. — **BIBLIOGRAPHIE**. — **SERVICE DE PLACEMENT**. — **INFORMATIONS DIVERSES**.

Introduction élémentaire de l'ellipse d'erreur moyenne

par W. K. BACHMANN, professeur à l'Ecole Polytechnique de
l'Université de Lausanne

L'introduction de l'ellipse d'erreur moyenne dans la théorie des erreurs présente toujours quelques difficultés, qui proviennent essentiellement du fait qu'on a l'habitude de faire intervenir la théorie des observations équivalentes. Cette dernière théorie est entièrement analytique, tandis que l'ellipse d'erreur, elle, est un être géométrique. Si l'ellipse d'erreur joue un rôle important dans la théorie des erreurs, c'est précisément parce qu'elle est indépendante du système de coordonnées choisi, ce qui n'est pas le cas pour les erreurs moyennes à craindre sur les inconnues. Vu cet état de choses, il est indiqué d'introduire l'ellipse d'erreur moyenne d'une façon purement géométrique, afin de faire apparaître dès le début son indépendance de tout changement de coordonnées.

Pour rendre notre exposé aussi simple que possible, nous nous bornerons ici au cas de deux inconnues, mais il va de soi que ces développements restent encore valables pour un nombre quelconque d'inconnues, puisqu'il suffira d'introduire un espace à n dimensions ($n > 2$) pour obtenir exactement de la même façon un ellipsoïde d'erreur à n dimensions. De plus, nous traiterons, pour avoir un exemple pratique concret sous les yeux, de la compensation d'un point de triangulation, mais il va sans dire qu'il ne s'agit là que d'une image concrète, cette théorie étant tout à fait générale.

§ 1. Définition géométrique de l'ellipse d'erreur moyenne

Soit P un point déterminé à partir des points de triangulation donnés P_1, P_2, \dots, P_n à l'aide de visées extérieures, ayant toutes le même poids. Supposons qu'on ait procédé à une compensation de ces mesures et qu'on ait ainsi obtenu le point compensé P_0 et l'erreur moyenne μ à craindre sur

l'unité de poids (voir fig. 1.1). Notons que μ est indépendant du système de coordonnées introduit pour le calcul du point ; il ne dépend que des mesures et du principe de compensation adopté, qui est par hypothèse celui des moindres carrés.

En attribuant au point P_0 un déplacement différentiel δP_0 (vecteur), celui-ci vient en P'_0 et les gisements des côtés $P_1P_0, P_2P_0, \dots, P_nP_0$ subissent des variations que nous désignons respectivement par $\delta \epsilon_1, \delta \epsilon_2, \dots, \delta \epsilon_n$. Pour chaque déplacement différentiel δP_0 du point compensé, la somme

$$\delta \epsilon_1^2 + \delta \epsilon_2^2 + \dots + \delta \epsilon_n^2$$

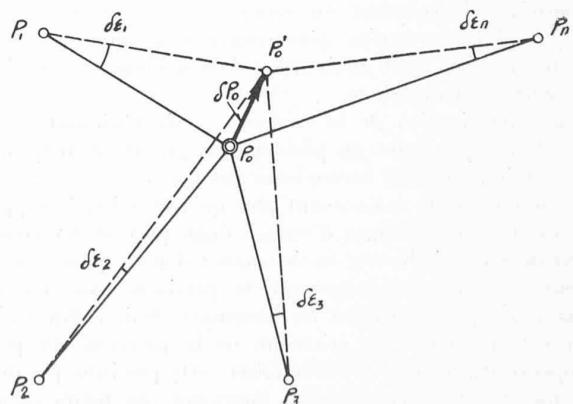


Fig. 1.1.

prend une valeur numérique bien déterminée, mais la réciproque n'est pas vraie. Nous pouvons par conséquent construire sur la figure 1.1 les courbes pour lesquelles nous avons

$$[\delta\epsilon \cdot \delta\epsilon] = \text{constante}$$

où $[\delta\epsilon \cdot \delta\epsilon]$ représente la somme $\delta\epsilon_1^2 + \delta\epsilon_2^2 + \dots + \delta\epsilon_n^2$. De toutes les courbes ainsi obtenues, nous n'en retenons qu'une seule, dont l'équation est

(1.1)

$$[\delta\epsilon \cdot \delta\epsilon] = \mu^2$$

et nous l'appellerons *ellipse d'erreur moyenne* relative au point compensé P_0 . Si les poids P_i des différentes visées ne sont pas les mêmes, on choisira au lieu de l'équation (1.1) la suivante

$$[p\delta\epsilon \cdot \delta\epsilon] = \mu^2.$$

Voilà donc la définition géométrique dont nous avions parlé au début de cet exposé. On constatera qu'aucun élément analytique n'intervient dans cette définition et que la courbe ainsi obtenue est par conséquent bien indépendante de tout système de coordonnées ; elle ne dépend que de la configuration du système de points P_0, P_1, \dots, P_n , des mesures effectuées et du point compensé.

§ 2. Equation de l'ellipse d'erreur moyenne

Après avoir introduit l'ellipse d'erreur moyenne par une définition purement géométrique, nous pouvons maintenant faire intervenir un système de coordonnées (x, y) quelconque pour l'exécution des calculs algébriques, puisque nous sommes assurés d'avance que le résultat ne dépendra plus du système de coordonnées que nous adopterons. Si (x, y) désigne un système de coordonnées rectilignes (oblique ou orthogonal), dans lequel le déplacement δP_0 a pour composantes δx et δy , nous avons

(2.1)

$$\delta\epsilon_i = a_i \delta x + b_i \delta y \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a_i et b_i étant les coefficients de direction du côté $P_i P_0$. L'équation (1.1) de l'ellipse d'erreur devient ainsi

(2.2)

$$[aa]\delta x^2 + 2[ab]\delta x \delta y + [bb]\delta y^2 = \mu^2.$$

Cette équation est bien connue, mais grâce à la définition géométrique donnée, nous savons qu'elle représente un être géométrique indépendant du système de coordonnées adopté. De plus, l'interprétation géométrique nous montre que la courbe (2.2) ne peut avoir des points à l'infini ; c'est donc une ellipse ou un cercle.

La détermination de la longueur et de l'orientation des axes de l'ellipse étant un problème de géométrie analytique élémentaire, nous n'y reviendrons pas ici.

Il ne nous reste maintenant plus qu'à chercher le rapport qui existe entre l'ellipse d'erreur d'une part et les erreurs moyennes à craindre sur les inconnues d'autre part ; car les erreurs moyennes caractérisent la précision avec laquelle nous avons pu déterminer les inconnues. Mais l'ellipse d'erreur est également un critérium de la précision du point compensé P_0 . Au lieu de caractériser cette précision par deux nombres μ_x et μ_y , nous faisons intervenir une figure géométrique, qui est l'ellipse d'erreur. Si cette dernière est grande, nous disons que la précision est petite, et vice versa.

Cherchons maintenant les relations qui existent entre les erreurs moyennes à craindre sur les inconnues et l'ellipse d'erreur. Afin d'éviter toute confusion possible, pouvant éventuellement provenir d'une différentiation, nous changerons les notations et écrirons, au lieu de (2.2)

(2.3)

$$[aa]\xi^2 + 2[ab]\xi\eta + [bb]\eta^2 = \mu^2$$

ce qui ne change rien à la question, puisque ξ et η remplacent tout simplement δx et δy (voir fig. 2.1).

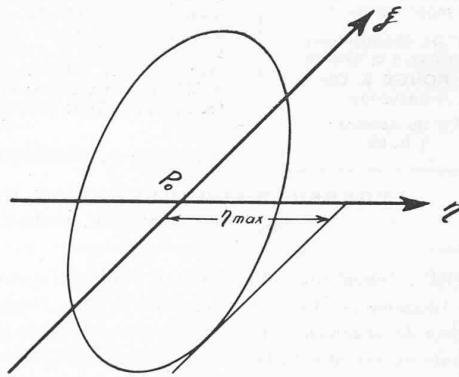


Fig. 2.1.

Calculons la valeur maximum η_{max} de η dans (2.3). Nous l'obtenons en traçant une tangente à l'ellipse, parallèle à l'axe des ξ . Mais pour cette tangente, nous avons $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$. Différentions la formule (2.3)

$$[aa]\xi d\xi + [ab]\{\xi d\eta + \eta d\xi\} + [bb]\eta d\eta = 0$$

$$[aa]\xi + [ab]\left\{\xi \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + \eta\right\} + [bb]\eta \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

$$\{[ab]\xi + [bb]\eta\} \frac{d\eta}{d\xi} + \{[aa]\xi + [ab]\eta\} = 0.$$

On obtient par conséquent $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ lorsqu'on a

(2.4)

$$[aa]\xi + [ab]\eta = 0$$

et l'ensemble des deux équations (2.3) et (2.4) définit le point de contact de la dite tangente avec l'ellipse. Puisque nous cherchons la valeur de $\eta = \eta_{max}$, nous éliminons ξ entre ces deux équations. Dans ce but, nous écrivons (2.3) sous la forme

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{[aa]\xi + [ab]\eta\} \xi \\ \{[ab]\xi + [bb]\eta\} \eta \end{array} \right\} = \mu^2$$

et en tenant compte de (2.4), nous obtenons

$$(2.6) \quad [ab]\xi + [bb]\eta = \frac{\mu^2}{\eta}$$

$$(2.4) \quad [aa]\xi + [ab]\eta = 0$$

et en éliminant ξ :

$$\{[aa][bb] - [ab][ab]\}\eta = \frac{\mu^2}{\eta} [aa]$$

ou bien, en divisant les deux membres de cette équation par $[aa]$

$$(2.7) \quad \left\{ [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} \right\} \eta^2 = \mu^2.$$

Mais on a, en appliquant la symbolique propre à la méthode des moindres carrés,

$$[bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} = [bb \cdot 1]$$

et l'équation (2.7) devient ainsi

$$(2.8) \quad \eta_{max}^2 = \frac{\mu^2}{[bb \cdot 1]}.$$

Mais le second membre de l'équation (2.8) est égal au carré de l'erreur moyenne à craindre sur y , soit μ_y^2 . En effet, à partir de (2.1), la théorie classique des observations médiates nous donne les équations aux poids

$$(2.9) \quad \boxed{\begin{aligned} [aa]Q_{xy} + [ab]Q_{yy} &= 0 \\ [ab]Q_{xy} + [bb]Q_{yy} &= 1 \end{aligned}}$$

d'où nous tirons, en éliminant Q_{xy} :

$$\begin{aligned} \{[aa][bb] - [ab][ab]\}Q_{yy} &= [aa] \\ \left\{ [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} \right\}Q_{yy} &= 1 \\ [bb \cdot 1]Q_{yy} &= 1 \\ (2.10) \quad Q_{yy} &= \boxed{\frac{1}{[bb \cdot 1]}} \end{aligned}$$

et en appliquant la formule bien connue

$$\mu_y^2 = Q_{yy}\mu^2 = \frac{\mu^2}{[bb \cdot 1]},$$

la proposition énoncée est démontrée. Pour des raisons de symétrie, nous obtenons un résultat analogue pour ξ_{max} , ce qui fait que l'ellipse d'erreur donne lieu aux deux équations

$$(2.11) \quad \boxed{\xi_{max}^2 = \mu_x^2 \quad \eta_{max}^2 = \mu_y^2};$$

la correspondance entre l'ellipse d'erreur moyenne et les erreurs moyennes à craindre sur les inconnues est ainsi établie.

Oeuvres et souvenirs de René Thury (1860-1938)

Conférences données à l'Assemblée générale de l'ASE, le 2 octobre 1949, à Lausanne¹

Souvenirs

par J. PRONIER, Genève

M. René Thury a laissé à sa famille, à ses amis, à tous ceux qui l'ont connu ou rencontré, des souvenirs si profonds et si respectueux de sa personne, que nombre d'entre eux les ont notés ou publiés pour perpétuer la mémoire de cette grande et belle figure.

Ces notes et publications et les opinions orales frappent par leur parfaite unanimité sur les qualités de cet éminent ingénieur. Aucune idée discordante, aucune réserve avouée ou cachée ne vient flétrir un jugement toujours égal, simple et lumineux. Il n'y a pas trace de critique ou de regrets dans les souvenirs de ses amis proches ou lointains, de ses contemporains ou de ses cadets. Rien, absolument rien, ne ternit ses qualités de cœur ni sa dignité.

En suivant sa carrière, dès les débuts de l'apprenti de 14 ans jusqu'aux dernières années de sa vie, on est étonné de la multitude extraordinaire de problèmes qu'il a résolus soit par le raisonnement, soit par l'essai ou par son propre travail manuel, et de tous les domaines de la technique où il se mouvait avec aisance.

On pourrait alors s'imaginer qu'un homme qui eut le goût de s'intéresser à tant de questions diverses ait eu un caractère ou un tempérament changeant, peut-être même fantaisiste. Eh bien non, c'est tout le contraire que nous constatons. La vie de René Thury révèle une remarquable continuité dans ses qualités essentielles qui sont un désin-

téressement extrême, une sérénité sans défaillance et une grande bienveillance envers tous ceux qui avaient affaire à lui.

Rappelons brièvement son origine et quelques dates importantes de sa vie.

Ses parents, Jean-Marc-Antoine Thury, né en 1822 à Nyon, originaire d'Etoy, mort en 1905 à Genève, et Marie Boisot, de Lausanne, eurent treize enfants ; René, le onzième, vit le jour à Genève — plus exactement dans le quartier de Plainpalais — le 7 août 1860. Son père, homme cultivé, savant épris de la nature et de problèmes de mécanique, fut appelé, après avoir enseigné l'histoire naturelle au degré secondaire, à occuper la chaire de physiologie végétale à l'Université de Genève. Il donna aussi dans cette ville des cours de mécanique théorique.

A 14 ans, le jeune Thury doit commencer son apprentissage parce que ses parents n'ont pas les moyens de lui accorder le privilège de faire des études. Très doué, comme son frère Emile, pour la mécanique de précision, il entre à la « Société pour la construction d'instruments de physique », devenue par la suite la « Société genevoise des instruments de physique ». Aux côtés d'Emile Bürgin, l'électricien bâlois de grand renom, il travailla plusieurs années en atelier à la fabrication de machines électriques d'après les plans de Théodore Turrettini, inspirés des conceptions de Siemens. Bürgin fut, à son départ de la Genevoise, remplacé par Thury et le salaire de celui-ci porté de 25 à 35 centimes l'heure.

¹ Ce texte a été publié, avec quelques illustrations, au n° 23, 1949, du *Bulletin de l'Association suisse des électriciens*. (Réd.).