

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 76 (1950)  
**Heft:** 19

**Artikel:** Les cas critiques lors de leviers par avion  
**Autor:** Ansermet, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-57447>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

forces de frottement empêchant la libre contraction de l'ouvrage puissent faire naître des contraintes aggravantes.

### Conclusions

Les trois ouvrages décrits ci-dessus, exécutés par l'Entreprise Losinger, Lausanne, ont été étudiés pour permettre la

préfabrication des éléments porteurs principaux ; ils révèlent une nouvelle possibilité du béton précontraint, tout en assurant le monolithisme parfait de l'ouvrage achevé. Si de telles réalisations ne présentent aucune difficulté spéciale, leur réussite n'est pleinement assurée que si l'entreprise qui s'en charge étudie l'exécution minutieusement dans ses moindres détails.

## Les cas critiques lors de levés par avion

par A. ANSERMET, ingénieur,  
professeur à l'Ecole polytechnique de Lausanne

Les méthodes modernes de lever par avion et leurs applications furent déjà exposées à plus d'une reprise dans le *Bulletin technique*. Ces procédés sont susceptibles d'un rendement élevé aux points de vue technique et économique si certaines conditions sont remplies ce qui n'est pas toujours le cas. En particulier la détermination des inconnues du problème est parfois en défaut ; il en est de même des erreurs inhérentes à ces inconnues ou à des fonctions de celles-ci. L'étude de ces cas est à l'origine de la théorie des surfaces dites critiques et, par extension, des espaces critiques. Il n'est pas sans intérêt d'exposer succinctement en quoi consistent ces lieux critiques.

Considérons deux vues consécutives  $O'$  et  $O''$  prises sur la même trajectoire de vol (fig. 1) ; les points  $P'$  et  $P''$  sont les

tions nombreuses et variées mais qui n'ont guère dépassé le stade de la théorie.

En pratique et grâce à l'emploi d'instruments modernes d'aérorestitution, on renonce en général à déterminer séparément les positions dans l'espace des points de vue  $O'$  et  $O''$ . Une première étape, capitale, consiste à reconstituer l'orientation mutuelle des vues conjuguées  $O'$  et  $O''$ , comme lors des prises, à une échelle arbitraire. C'est précisément au cours de cette opération fondamentale que des cas critiques se manifestent éventuellement.

Dans la figure ci-dessus, la base  $O'O'' = b$  est déjà réduite à une échelle choisie à titre provisoire ; admettons de plus que  $b \cong b_x$  ( $b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$ ; les composantes  $b_y$  et  $b_z$  sont supposées très petites). L'orientation mutuelle implique l'identification de cinq paires de points homologues tels que  $P'$  et  $P''$  au minimum. Les solutions, analytique et instrumentale, reposent sur la notion, devenue courante, de parallaxe transversale ou verticale  $p_v$  (voir [1]). Le cas peut se présenter où les cinq points  $P_1, P_2, \dots, P_5$  sont dans le voisinage d'un lieu critique ; le problème posé est l'étude de ces lieux.

### Lieux critiques

Pour orienter la vue  $O'$  par rapport à sa conjuguée  $O''$  on dispose à l'autographe des possibilités suivantes :

Trois rotations :  $d\kappa$  (axe  $O'z$ ),  $d\omega$  (axe  $O'x$ ) et  $d\phi$  (axe  $O'y$ ).

Deux translations :  $db_y$  et  $db_z$  (respectivement parallèles à  $O'y$  et  $O'z$ ).

D'autres solutions peuvent être envisagées (voir [1], [4]). Les cinq inconnues (trois valeurs angulaires, deux linéaires), définies ci-dessus, sont assimilées à des différentielles car l'instrument permet en général une orientation mutuelle provisoire assez précise. Les parallaxes  $p_v$  qui subsistent sont petites ; leur élimination doit être aussi rigoureuse que possible. Cette opération est un critérium pour l'orientation mutuelle. Analytiquement on a :

$$\begin{aligned} p_{v_i} = F_i(d\kappa, db_y, dw, d\phi, db_z) &\cong a_i d\kappa + b_i db_y + \\ (1) \quad &+ c_i dw + d_i d\phi + e_i db_z \\ (i = 1, 2, \dots, 5) \quad & \text{(voir [1], [3], [4])} \end{aligned}$$

$$\text{où } a_i = x_i, \quad b_i = 1, \quad c_i = z_i + \frac{y_i^2}{z_i}, \quad d_i = \frac{x_i y_i}{z_i}, \quad e_i = \frac{y_i}{z_i}$$

pour des vues nadirales (axes de prise de vues verticaux en  $O', O''$ ) ; en pratique, cette verticalité n'est qu'approximative. Rappelons que les coordonnées  $x_i, y_i, z_i$  sont des valeurs à l'échelle instrumentale. Les signes des coefficients dépendent de conventions et ne jouent pas de rôle ici. Le groupe des cinq équations (1) fournit un système unique et bien déterminé de solutions pour les inconnues si le déterminant fonctionnel est différent de zéro.

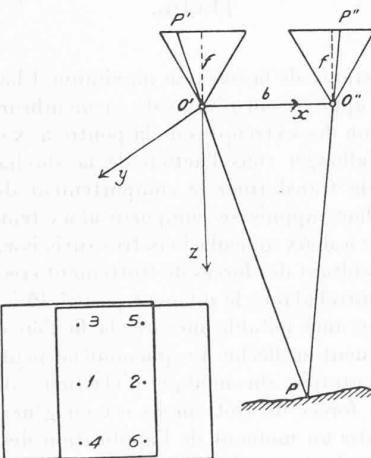


Fig. 1.

images homologues, sur les négatifs, d'un même point du sol  $P$ . Ce dernier est défini par ses coordonnées dans le système  $(X, Y, Z)$  qui est à la base de la mensuration du territoire. Au lieu d'un seul point  $P$  considérons un groupe de points connus  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_v$  formant chacun leurs images sur les clichés conjugués. La détermination du point de vue  $O'$  (ou  $O''$ ) dans l'espace exige la connaissance de trois points ( $v = 3$ ). Mais il faut compter ici avec l'éventualité d'un cas critique : le cylindre droit ayant comme directrice le cercle circonscrit au triangle  $P_1P_2P_3$  est un lieu critique. Il suffit alors de faire intervenir d'autres points donnés ( $v \geq 4$ ) mais le problème change de caractère car il y a surdétermination ; le nombre d'équations croît rapidement avec  $v$  (théoriquement  $\frac{1}{2}v(v - 1)$ .) Il est impossible de calculer trois valeurs  $X, Y, Z$  répondant rigoureusement et simultanément à ce système d'équations. Ce problème complexe a donné lieu à des solu-

$$(2) \quad \frac{\partial(F_1; F_2 \dots F_5)}{\partial(d\kappa; db_y \dots db_z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le coefficient  $b_i$  étant ici constant, le déterminant sera nul si un autre coefficient a une valeur aussi constante. Cette éventualité n'est pas exclue pour  $c_i = z_i + \frac{y_i^2}{z_i}$  suivant la configuration du terrain photographié. En général, le lieu critique est une quadrique réglée dont l'équation sera développée plus loin.

#### Cas général ( $n \geq 6$ )

Ce cas est fréquent en pratique ; théoriquement, les inconnues sont surdéterminées, ce qui n'exclut pas un cas critique.

$$(3) \quad p_{v_i} = F_i(d\kappa, db_y, dw, d\varphi, db_z) + v_i = \\ = v_i + a_i d\kappa + b_i db_y + c_i dw + d_i d\varphi + e_i db_z \quad (i=1, 2, 3 \dots n)$$

où les coefficients sont définis comme précédemment.

On admet en général des erreurs moyennes quadratiques égales pour tous les  $p_v$ , ce qui se traduit par :

$$[vv] = \text{minimum} = [p_v p_v . 5]$$

ou aussi, en développant,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots + a_n v_n = 0 = f_1(v_2, v_3 \dots v_n) \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 \dots + b_n v_n = 0 = f_2(v_1, v_2 \dots v_n) \\ \dots \dots \dots \\ e_1 v_1 + e_2 v_2 \dots + e_n v_n = 0 = f_5(v_1, v_2 \dots v_n). \end{array} \right.$$

L'existence ou non d'un cas critique est liée à la valeur du déterminant d'ordre  $(n+5)$ :

$$(5) \quad \frac{\partial(F_1, F_2 \dots F_n, f_1, f_2 \dots f_5)}{\partial(d\kappa, db_y \dots db_z, v_1, v_2 \dots v_n)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = D$$

Le développement de ce déterminant  $D$  est simple si l'on applique le théorème de Laplace relatif aux mineurs  $M$  et aux mineurs complémentaires  $\bar{M}$ :

$$(6) \quad D = \Sigma M \cdot \bar{M}.$$

Les mineurs  $M$  sont du cinquième ordre et peuvent s'écrire en notation abrégée :

$$M = (a_g \ b_h \ c_j \ d_k \ e_l)$$

où les cinq indices  $g, h, j, k, l$  sont choisis dans la série des indices  $1, 2, 3 \dots n$ , en épousant toutes les combinaisons. On voit sans peine que

$$(7) \quad M = \bar{M}.$$

Et en substituant à  $M$  et  $\bar{M}$  leurs valeurs

$$(8) \quad D = \Sigma \begin{vmatrix} a_g & b_g & c_g & d_g & e_g \\ a_h & b_h & c_h & d_h & e_h \\ a_j & b_j & c_j & d_j & e_j \\ a_k & b_k & c_k & d_k & e_k \\ a_l & b_l & c_l & d_l & e_l \end{vmatrix}^2$$

Le même résultat est obtenu, par voie différente, en combinant les systèmes d'équations (3) et (4) et éliminant les résidus  $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ . Le nombre d'équations est réduit à cinq et seules subsistent les inconnues  $d\kappa, db_y, dw, d\varphi$  et  $db_z$ . Ces équations ne sont plus homogènes et les coefficients ont une forme plus compliquée. La matrice symétrique et quadratique de ces coefficients est donc

$$(9) \quad \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & [ae] \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] & [be] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] & [ce] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & [de] \\ [ae] & [be] & [ce] & [de] & [ee] \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cinquième ordre, défini par ces vingt-cinq éléments, devrait être différent de zéro si l'on veut éviter un cas critique. Ici encore, il faut considérer la matrice rectangulaire

$$(10) \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_n \end{pmatrix} \quad n \leq 6$$

et former des groupes de cinq indices, pris dans la série  $1, 2, 3 \dots n$ , en épousant toutes les combinaisons, comme dans l'équation (8). Si tous les déterminants de cinquième ordre ainsi obtenus sont nuls, il est impossible de trouver, pour les inconnues, un système de solutions unique et bien déterminé (voir [2]).

Le cas où  $n = 6$  est fréquent ; la répartition peut être symétrique comme l'indique la figure. Considérons par exemple les groupes d'indices  $(1 2 3 4 5)$  et  $(2 3 4 5 6)$  ainsi que leurs déterminants respectifs  $(a_1 b_2 c_3 d_4 e_5)$  et  $(a_2 b_3 c_4 d_5 e_6)$ , puis exprimons les éléments en fonction des coordonnées  $x_i, y_i, z_i$ . Le cas où ces déterminants sont nuls est critique et l'interprétation géométrique est immédiate : les six points  $P_1, P_2 \dots P_6$  appartiennent à une même quadrique réglée définie par les quatre points  $P_2 P_3 P_4 P_5$ , communs aux deux groupes  $P_1 P_2 \dots P_5$  et  $P_2 P_3 \dots P_6$ . On généralise aisément pour  $n > 6$ . L'équation de la surface, en général un hyperbololoïde à une nappe, dépend de cinq paramètres dont l'un est arbitraire

$$(11) \quad A(y^2 + z^2) + Bxy + Cxz + Dy + Ez = 0.$$

L'axe  $O' O''$  ( $y = z = 0$ ) est une génératrice tandis que les sections planes  $x = \text{const.}$  sont circulaires. Le lieu critique défini par l'équation (11) est donc à éviter.

Les cas critiques sont, en principe, d'autant moins à craindre que le champ de l'appareil de prise de vues est grand, c'est-à-dire que le format du cliché est grand pour une focale  $f$  donnée. Cet avantage est compensé, au moins partiellement, par des inconvénients de natures diverses. Ce problème de l'étendue du champ est un des plus complexes et controversés à l'heure actuelle. Les levers par avion présentent de grands avantages mais donnent lieu à des écueils qu'il faut aussi mettre en évidence.

#### Littérature

- [1] STIEFEL E., *Darstellende Geometrie*.
- [2] BAESCHLIN C. F., *Schweiz. Zeitschrift für Vermessung* (juin 1948).
- [3] KRAMES J., *Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen* (août 1949).
- [4] ANSERMET A., *Schw. Zeitschrift für Vermessung* (Nº 8, 1942).