Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 76 (1950)
Heft: 19

Artikel: Les cas critiques lors de levers par avion
Autor: Ansermet, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57447

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

forces de frottement empêchant la libre contraction de l'ouvrage puissent faire naître des contraintes aggravantes.

Conclusions

Les trois ouvrages décrits ci-dessus, exécutés par l'Entreprise Losinger, Lausanne, ont été étudiés pour permettre la préfabrication des éléments porteurs principaux ; ils révèlent une nouvelle possibilité du béton précontraint, tout en assurant le monolithisme parfait de l'ouvrage achevé. Si de telles réalisations ne présentent aucune difficulté spéciale, leur réussite n'est pleinement assurée que si l'entreprise qui s'en charge étudie l'exécution minutieusement dans ses moindres détails.

Les cas critiques lors de levers par avion

par A. ANSERMET, ingénieur,
professeur à l'Ecole polytechnique de Lausanne

Les méthodes modernes de lever par avion et leurs applications furent déjà exposées à plus d'une reprise dans le *Bulletin technique*. Ces procédés sont susceptibles d'un rendement élevé aux points de vue technique et économique si certaines conditions sont remplies ce qui n'est pas toujours le cas. En particulier la détermination des inconnues du problème est parfois en défaut ; il en est de même des erreurs inhérentes à ces inconnues ou à des fonctions de celles-ci. L'étude de ces cas est à l'origine de la théorie des surfaces dites critiques et, par extension, des espaces critiques. Il n'est pas sans intérêt d'exposer succinctement en quoi consistent ces lieux critiques.

Considérons deux vues consécutives O' et O'' prises sur la même trajectoire de vol (fig. 1) ; les points P' et P'' sont les

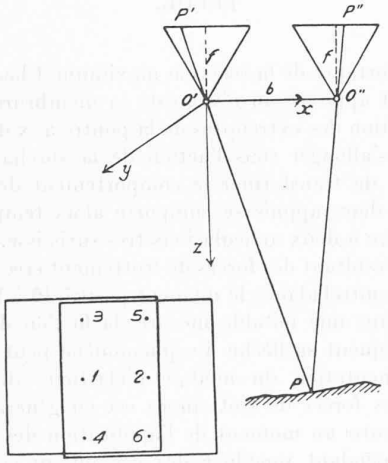

Fig. 1.

images homologues, sur les négatifs, d'un même point du sol P. Ce dernier est défini par ses coordonnées dans le système (X, Y, Z) qui est à la base de la mensuration du territoire. Au lieu d'un seul point P considérons un groupe de points connus $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_\nu$ formant chacun leurs images sur les clichés conjugués. La détermination du point de vue O' (ou O'') dans l'espace exige la connaissance de trois points ($\nu = 3$). Mais il faut compter ici avec l'éventualité d'un cas critique : le cylindre droit ayant comme directrice le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ est un lieu critique. Il suffit alors de faire intervenir d'autres points donnés ($\nu \geq 4$) mais le problème change de caractère car il y a surdétermination ; le nombre d'équations croît rapidement avec ν (théoriquement $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$.) Il est impossible de calculer trois valeurs X, Y, Z répondant rigoureusement et simultanément à ce système d'équations. Ce problème complexe a donné lieu à des solutions nombreuses et variées mais qui n'ont guère dépassé le stade de la théorie.

En pratique et grâce à l'emploi d'instruments modernes d'aérorestitution, on renonce en général à déterminer séparément les positions dans l'espace des points de vue O' et O''. Une première étape, capitale, consiste à reconstituer l'orientation mutuelle des vues conjuguées O' et O'', comme lors des prises, à une échelle arbitraire. C'est précisément au cours de cette opération fondamentale que des cas critiques se manifestent éventuellement.

Dans la figure ci-dessus, la base $O'O'' = b$ est déjà réduite à une échelle choisie à titre provisoire ; admettons de plus que $b \cong b_x$ ($b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$; les composantes b_y et b_z sont supposées très petites). L'orientation mutuelle implique l'identification de cinq paires de points homologues tels que P' et P'' au minimum. Les solutions, analytique et instrumentale, reposent sur la notion, devenue courante, de parallaxe transversale ou verticale p_v (voir [1]). Le cas peut se présenter où les cinq points $P_1, P_2 \ldots\ldots P_5$ sont dans le voisinage d'un lieu critique ; le problème posé est l'étude de ces lieux.

Lieux critiques

Pour orienter la vue O' par rapport à sa conjuguée O'' on dispose à l'autographe des possibilités suivantes :

Trois rotations : $d\kappa$ (axe $O'z$), $d\omega$ (axe $O'x$) et $d\varphi$ (axe $O'y$).

Deux translations : db_y et db_z (respectivement parallèles à $O'y$ et $O'z$).

D'autres solutions peuvent être envisagées (voir [1], [4]). Les cinq inconnues (trois valeurs angulaires, deux linéaires), définies ci-dessus, sont assimilées à des différentielles car l'instrument permet en général une orientation mutuelle provisoire assez précise. Les parallaxes p_v qui subsistent sont petites ; leur élimination doit être aussi rigoureuse que possible. Cette opération est un critérium pour l'orientation mutuelle. Analytiquement on a :

$$p_{v_i} = F_i(d\kappa, db_y, d\omega, d\varphi, db_z) \cong a_i d\kappa + b_i db_y + c_i d\omega + d_i d\varphi + e_i db_z \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2 \ldots\ldots 5) \qquad \text{(voir [1], [3], [4])}$$

où $a_i = x_i$, $b_i = 1$, $c_i = z_i + \frac{y_i^2}{z_i}$, $d_i = \frac{x_i y_i}{z_i}$, $e_i = \frac{y_i}{z_i}$

pour des vues nadirales (axes de prise de vues verticaux en O', O'') ; en pratique, cette verticalité n'est qu'approximative. Rappelons que les coordonnées x_i, y_i, z_i sont des valeurs à l'échelle instrumentale. Les signes des coefficients dépendent de conventions et ne jouent pas de rôle ici. Le groupe des cinq équations (1) fournit un système unique et bien déterminé de solutions pour les inconnues si le déterminant fonctionnel est différent de zéro.

$$(2) \qquad \frac{\partial(F_1;\, F_2 \ldots F_5)}{\partial(d\kappa;\, db_y \ldots db_z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Le coefficient b_i étant ici constant, le déterminant sera nul si un autre coefficient a une valeur aussi constante. Cette éventualité n'est pas exclue pour $c_i = z_i + \frac{y_i^2}{z_i}$ suivant la configuration du terrain photographié. En général, le lieu critique est une quadrique réglée dont l'équation sera développée plus loin.

Cas général ($n \geq 6$)

Ce cas est fréquent en pratique ; théoriquement, les inconnues sont surdéterminées, ce qui n'exclut pas un cas critique.

$$(3) \qquad p_{v_i} = F_i(d\kappa,\, db_y,\, d\omega,\, d\varphi,\, db_z) + v_i =$$

$$= v_i + a_i\, d\kappa + b_i\, db_y + c_i\, d\omega + d_i\, d\varphi + e_i\, db_z \; (i = 1,\, 2,\, 3 \ldots n)$$

où les coefficients sont définis comme précédemment.

On admet en général des erreurs moyennes quadratiques égales pour tous les p_v, ce qui se traduit par :

$$[vv] = \text{minimum} = [p_v\, p_v . 5]$$

ou aussi, en développant,

$$(4) \qquad \begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 \ldots + a_n v_n = 0 = f_1(v_2,\, v_2 \ldots v_n) \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 \ldots + b_n v_n = 0 = f_2(v_1,\, v_2 \ldots v_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_1 v_1 + e_2 v_2 \ldots + e_n v_n = 0 = f_5(v_1,\, v_2 \ldots v_n). \end{cases}$$

L'existence ou non d'un cas critique est liée à la valeur du déterminant d'ordre $(n + 5)$:

$$(5) \qquad \frac{\partial(F_1, F_2 \ldots F_n,\, f_1, f_2 \ldots f_5)}{\partial(d\kappa, db_y \ldots db_z, v_1, v_2 \ldots v_n)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & \ldots & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 & \ldots & e_n \end{vmatrix} = D$$

Le développement de ce déterminant D est simple si l'on applique le théorème de Laplace relatif aux mineurs M et aux mineurs complémentaires $\overline{M}$:

$$(6) \qquad D = \Sigma\, M . \overline{M} .$$

Les mineurs M sont du cinquième ordre et peuvent s'écrire en notation abrégée :

$$M = (a_g\, b_h\, c_j\, d_k\, e_l)$$

où les cinq indices g, h, j, k, l sont choisis dans la série des indices 1, 2, 3 ..... n, en épuisant toutes les combinaisons. On voit sans peine que

$$(7) \qquad M = \overline{M} .$$

Et en substituant à M et $\overline{M}$ leurs valeurs

$$(8) \qquad D = \Sigma \begin{vmatrix} a_g & b_g & c_g & d_g & e_g \\ a_h & b_h & c_h & d_h & e_h \\ a_j & b_j & c_j & d_j & e_j \\ a_k & b_k & c_k & d_k & e_k \\ a_l & b_l & c_l & d_l & e_l \end{vmatrix}^2$$

Le même résultat est obtenu, par voie différente, en combinant les systèmes d'équations (3) et (4) et éliminant les résidus v_1, v_2, v_3 ..... v_n. Le nombre d'équations est réduit à cinq et seules subsistent les inconnues $d\kappa$, db_y, $d\omega$, $d\varphi$ et db_z. Ces équations ne sont plus homogènes et les coefficients ont une forme plus compliquée. La matrice symétrique et quadratique de ces coefficients est donc

$$(9) \qquad \begin{Bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & [ae] \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] & [be] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] & [ce] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & [de] \\ [ae] & [be] & [ce] & [de] & [ee] \end{Bmatrix}$$

Le déterminant de cinquième ordre, défini par ces vingt-cinq éléments, devrait être différent de zéro si l'on veut éviter un cas critique. Ici encore, il faut considérer la matrice rectangulaire

$$(10) \qquad \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \ldots\ldots c_n \\ d_1 & d_2 & d_3 \ldots\ldots d_n \\ e_1 & e_2 & e_3 \ldots\ldots e_n \end{Bmatrix} n \geqq 6$$

et former des groupes de cinq indices, pris dans la série 1, 2, 3 ..... n, en épuisant toutes les combinaisons, comme dans l'équation (8). Si tous les déterminants de cinquième ordre ainsi obtenus sont nuls, il est impossible de trouver, pour les inconnues, un système de solutions unique et bien déterminé (voir [2]).

Le cas où $n = 6$ est fréquent ; la répartition peut être symétrique comme l'indique la figure. Considérons par exemple les groupes d'indices (1 2 3 4 5) et (2 3 4 5 6) ainsi que leurs déterminants respectifs ($a_1\, b_2\, c_3\, d_4\, e_5$) et ($a_2\, b_3\, c_4\, d_5\, e_6$), puis exprimons les éléments en fonction des coordonnées x_i, y_i, z_i. Le cas où ces déterminants sont nuls est critique et l'interprétation géométrique est immédiate : les six points P_1, P_2 ..... P_6 appartiennent à une même quadrique réglée définie par les quatre points $P_2\, P_3\, P_4\, P_5$, communs aux deux groupes $P_1\, P_2$ ..... P_5 et $P_2\, P_3$ ..... P_6. On généralise aisément pour $n > 6$. L'équation de la surface, en général un hyperboloïde à une nappe, dépend de cinq paramètres dont l'un est arbitraire

$$(11) \qquad A\,(y^2 + z^2) + Bxy + Cxz + Dy + Ez = 0 .$$

L'axe $O'\, O''$ ($y = z = 0$) est une génératrice tandis que les sections planes $x =$ const. sont circulaires. Le lieu critique défini par l'équation (11) est donc à éviter.

Les cas critiques sont, en principe, d'autant moins à craindre que le champ de l'appareil de prise de vues est grand, c'est-à-dire que le format du cliché est grand pour une focale f donnée. Cet avantage est compensé, au moins partiellement, par des inconvénients de natures diverses. Ce problème de l'étendue du champ est un des plus complexes et controversés à l'heure actuelle. Les levers par avion présentent de grands avantages mais donnent lieu à des écueils qu'il faut aussi mettre en évidence.

Littérature

[1] Stiefel E., *Darstellende Geometrie.*

[2] Baeschlin C. F., *Schweiz. Zeitschrift für Vermessung* (juin 1948).

[3] Krames J., *Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen* (août 1949).

[4] Ansermet A., *Schw. Zeitschrift für Vermessung* (N° 8, 1942).