Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 75 (1949)

Heft: 19: Comptoir Suisse, Lausanne, 10-26 septembre 1949

Artikel: Sur un type de plaque circulaire encastrée d'épaisseur linéairement variable

Autor: Favre, Henry

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56881

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

75e année 10 septembre 1949 N° 19

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs
Pour les abonnements s'adresser à la librairie **F. ROUGE & Cie** à Lausanne
Prix du numéro : 1 fr. 25

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. — Membres : *Fribourg :* MM. † L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud :* MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte : *Genève :* MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte, *Neuchâtel :* MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais :* MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGENER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

TARIF DES ANNONCES
Le millimètre (larg. 47 mm) 20 cts
Réclames : 60 cts le mm (largeur 95 mm)
Rabais pour annonces répétées
ANNONCES SUISSES S.A.
5, Rue Centrale
Tél. 2 33 26
LAUSANNE
et Succursales

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte : R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : *Sur un type de plaque circulaire encastrée d'épaisseur linéairement variable* (suite et fin), par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — *L'aérotopographie moderne et ses applications*, par A. ANSERMET. — *Un aspect du problème de la granulation des bétons*, par F. GODED, ingénieur. — LES CONGRÈS : *Congrès des ingénieurs.* — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Collaboration internationale des ingénieurs.* — COMMUNIQUÉ. — CARNET DES CONCOURS. — SERVICE DE PLACEMENT. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES : *Le 30e Comptoir suisse, à Lausanne.*

SUR UN TYPE DE PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTRÉE D'ÉPAISSEUR LINÉAIREMENT VARIABLE

par HENRY FAVRE
Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich

(Suite et fin).[1]

§ 3. Cas d'une force agissant au centre

Considérons encore la même plaque, mais supposons qu'on lui applique une force P parallèle à l'axe et agissant au centre (fig. 7). Les calculs relatifs à ce cas sont analogues à ceux du paragraphe précédent. Aussi nous bornons-nous à n'en donner que les résultats, en utilisant les mêmes notations que précédemment et en supposant encore $\nu \neq 1/3$.

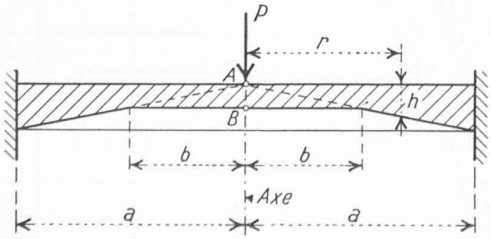

Fig. 7.

On trouve pour le *moment de flexion* $M_0 = (M_r)_{r=b}$ relatif aux points du contour séparant les deux domaines :

$$\boxed{M_o = \mu' P,} \tag{35}$$

[1] Voir le *Bulletin technique* du 27 août 1949.

en posant :

$$\boxed{\mu' = \frac{2(1+\nu)\left[(2-\nu)(1-n^{\alpha_1-\alpha_2}) + (\alpha_1-\alpha_2)\, n^{\alpha_1+2}\right] + (1-5\nu)\left[(\alpha_1+\nu)\, n^{\alpha_1-\alpha_2} - \alpha_2 - \nu\right]}{12\pi(1-\nu)\left[(1-\alpha_1)\, n^{\alpha_1-\alpha_2} - 1 + \alpha_2\right]},} \tag{36}$$

où $n = \dfrac{b}{a}$ et où α_1, α_2 sont les racines données par les formules (15). *Les variations* φ_1 *et* φ_2 *des pentes relatives aux domaines* $n < \xi < 1$ *et* $0 < \xi < n$ ont respectivement les valeurs :

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{2(1+\nu)P}{\pi E c^3 a^2}\left(C'\,\xi^{\alpha_1} + D'\,\xi^{\alpha_2} + \frac{1}{\xi^2}\right),} \tag{37}$$

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{3(1-\nu)P}{\pi E c^3 n^3 a^2}\left(F'\xi + G'\xi \operatorname{Log}\xi\right),} \tag{38}$$

où

$$\left.\begin{aligned} C' &= \frac{\left[6(1-\nu)\pi\mu' + 2 - \nu\right] n^{-\alpha_2-2} + \alpha_2 + \nu}{(\alpha_1+\nu)\, n^{\alpha_1-\alpha_2} - \alpha_2 - \nu}, \\ D' &= -\frac{\left[6(1-\nu)\pi\mu' + 2 - \nu\right] n^{-\alpha_1-2} + \alpha_1 + \nu}{\alpha_1 + \nu - (\alpha_2+\nu)\, n^{\alpha_2-\alpha_1}}, \\ F' &= 1 + 4\pi\mu' + (1+\nu)\operatorname{Log} n, \quad G' = -1-\nu. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

L'*équation de la surface élastique* (rapportée au feuillet moyen avant la déformation) est,

pour $n < \xi < 1$:

$$\boxed{\zeta_o = \frac{2(1+\nu)\, n^3 a^2 P}{\pi E h_0^3} \cdot \left[\frac{C'}{\alpha_1+1}(1-\xi^{\alpha_1+1}) + \frac{D'}{\alpha_2+1}(1-\xi^{\alpha_2+1}) + \frac{1}{\xi} - 1\right],} \tag{40}$$

pour $0 < \xi < n$:

$$\boxed{\zeta_o = \frac{3(1-\nu)\, a^2 P}{2\pi E h_0^3}\left[\left(F' - \frac{G'}{2}\right)(n^2 - \xi^2) + G'(n^2 \operatorname{Log} n - \xi^2 \operatorname{Log} \xi)\right] + (\zeta_o)_{\xi=n}.} \tag{41}$$

$$\text{où } (\zeta_o)_{\xi=n} = \frac{2(1+\nu)\, n^3 a^2 P}{\pi E h_0^3}\left[\frac{C'}{\alpha_1+1}(1-n^{\alpha_1+1}) + \frac{D'}{\alpha_2+1}(1-n^{\alpha_2+1}) + n^{-1} - 1\right]. \tag{42}$$

La *flèche au centre de la plaque* est :

$$\boxed{f = (\zeta_o)_{\xi=0} = \frac{3(1-\nu)\, a^2 P}{2\pi E h_0^3} \cdot \left[F' + G'\left(\operatorname{Log} n - \frac{1}{2}\right)\right] + (\zeta_o)_{\xi=n}.} \tag{43}$$

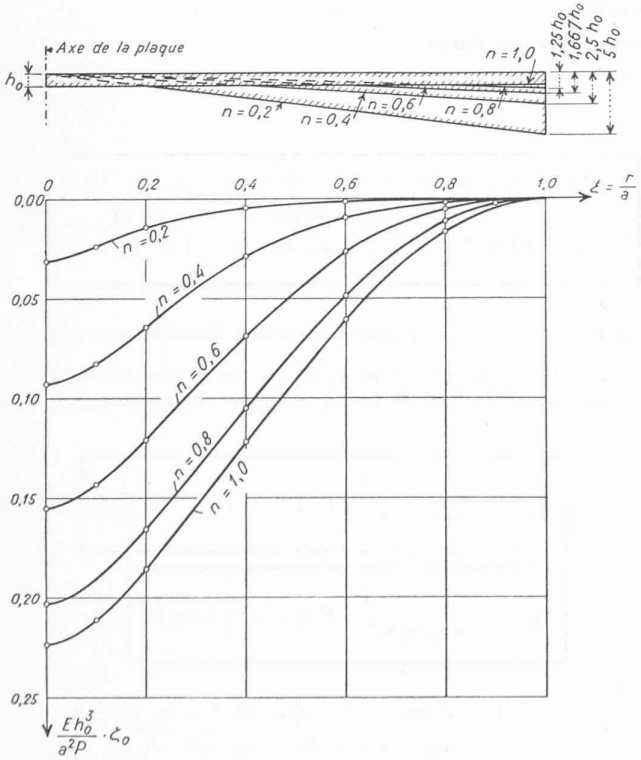

Fig. 8. — Plaque circulaire encastrée de la figure 7. Représentation graphique de ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$ pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

Les valeurs des *moments de flexion* sont :

pour $n < \xi < 1$: (44)

$$\boxed{\begin{aligned} M_r &= \frac{P}{6\pi(1-\nu)}\left[C'(\alpha_1+\nu)\,\xi^{\alpha_1+2} + D'(\alpha_2+\nu)\,\xi^{\alpha_2+2} - 2 + \nu\right], \\ M_t &= \frac{P}{6\pi(1-\nu)}\left[C'(1+\nu\alpha_1)\,\xi^{\alpha_1+2} + D'(1+\nu\alpha_2)\,\xi^{\alpha_2+2} + 1 - 2\nu\right]; \end{aligned}}$$

pour $0 < \xi < n$:

$$\boxed{\begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi}\left[F' - 1 + G' \operatorname{Log} \xi\right], \\ M_t &= \frac{P}{4\pi}\left[F' - \nu + G' \operatorname{Log} \xi\right]. \end{aligned}} \tag{45}$$

Les figures 8, 9 et 10 donnent les diagrammes de ζ_0, M_r, M_t, $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$, calculés en supposant $\nu = 0{,}25$. La figure 8, qui représente ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$ pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$, est analogue à la figure 4 relative au cas où la surcharge est uniformément répartie dans tout le domaine de la plaque ; elle ne donne lieu à aucune nouvelle remarque [1]. Par contre, les diagrammes M_r, M_t (fig. 9) et $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$ (fig. 10) sont foncièrement différents de ceux obtenus dans le paragraphe précédent, car dans le cas d'une

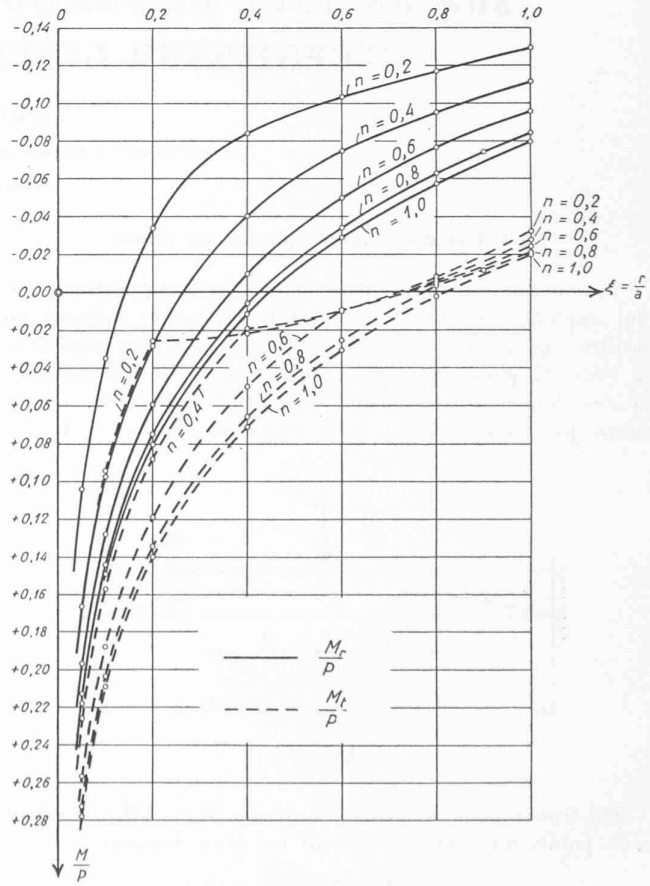

Fig. 9. — Plaque circulaire encastrée de la figure 7. Représentation graphique de M_r et M_t en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

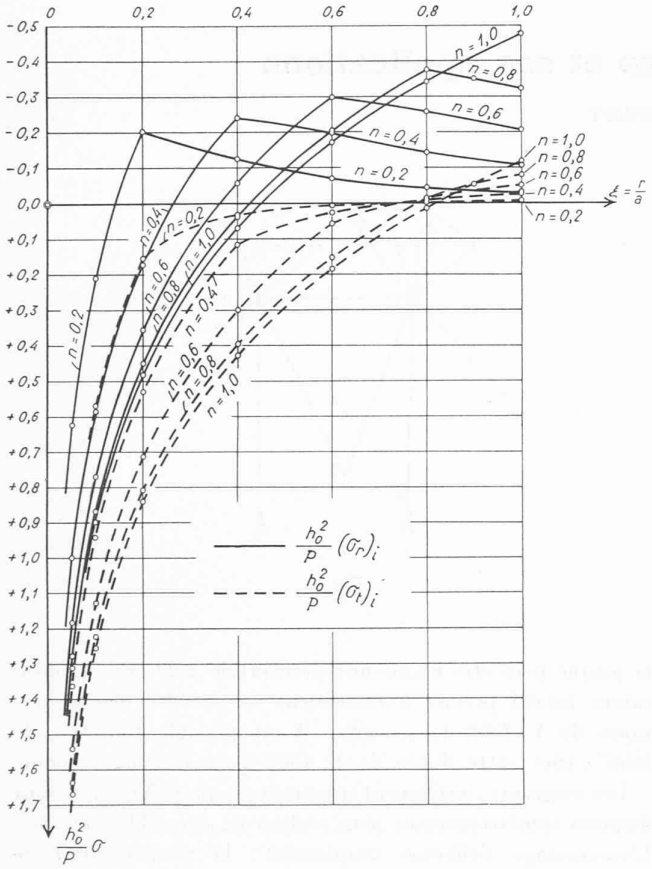

Fig. 10. — Plaque circulaire encastrée de la figure 7. Représentation graphique de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

force P agissant au centre de la plaque, les moments de flexion et les tensions normales deviennent infiniment grands en ce point.

Or on sait qu'au voisinage du point d'application d'une force concentrée, la théorie utilisée dans le présent calcul doit être révisée. Dans le cas où une force P agit au centre d'une plaque circulaire *simplement posée*, d'épaisseur constante h_0 et de rayon b, *A. Nadai* et *S. Woinowsky-Krieger* ont montré, par une analyse délicate du problème, que les tensions σ_r et σ_t, aux points A et B de la figure 11, sont données par les formules [2] :

$$(\sigma_r)_A = (\sigma_t)_A = \sigma_1 - \frac{P}{\pi\epsilon^2}\left[\frac{1+2\nu}{2} - (1+\nu)\beta\right], \quad (46)$$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{P}{h_0^2}\Big[&(1+\nu)\left(0{,}485 \operatorname{Log}\frac{b}{h_0} + \right.\\ &\left. + 0{,}52\right) + 0{,}48\Big],\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

où ϵ désigne le rayon du petit cercle où la force P est supposée agir uniformément et σ_1 est la tension normale en A que donne la théorie ordinaire des plaques en tenant compte de la répartition de cette force. Quant à β, c'est un coefficient dépendant du rapport ϵ/h_0.

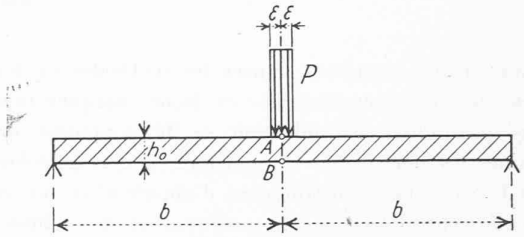

Fig. 11.

Dans les applications, on peut cependant se contenter de ne calculer que la tension au point B, qui est une traction, car la tension relative au point A est une compression de caractère local qui occasionne très rarement la rupture de la matière [1]. La formule (47) donne donc la valeur de la tension dangereuse au centre de la plaque de la figure 11.

Cette formule peut être appliquée au cas étudié ici, à condition d'ajouter au second membre la valeur de la traction produite en B par le moment $M_0 = \mu' P$ agissant sur le contour $r = b$ de la partie centrale de la plaque (fig. 7). Ce moment M_0 engendre dans le domaine $0 < r < b$ des moments constants et indépendants de la direction de l'élément considéré, égaux à M_0. La traction supplémentaire est ainsi :

$$(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{M_0}{h_0^2/6} = \frac{6\mu'}{h_0^2} P.$$

En ajoutant cette valeur à celle donnée par (47), on obtient donc pour la *tension dangereuse au centre de la plaque* :

$$\boxed{(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{P}{h_0^2}\left[(1+\nu)\left(0{,}485 \operatorname{Log}\frac{b}{h_0} + 0{,}52\right) + 6\mu' + 0{,}48\right].} \quad (48)$$

En résumé, les tensions $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$ relatives à la plaque de la figure 7 sont données par les diagrammes de la figure 10, sauf au voisinage du centre, où la tension dangereuse, qui se produit au point B, est donnée par la formule (48).

Ajoutons que la comparaison des figures 6 et 10 montre que l'influence du renforcement dû à l'épaisseur variable sur les tensions $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ relatives au contour de la plaque ($\xi = 1$), est sensiblement la même dans les deux cas que nous avons étudiés ici.

Remarque. En vertu des hypothèses faites dans le § 1, il est évident que les résultats obtenus dans cette étude ne seront applicables que si *h_o et H sont petits par rapport à a* [2]) et si *ζ_o est lui-même petit par rapport à h_o*. Pour s'affranchir de ces conditions restrictives, il serait nécessaire d'introduire dans les calculs l'étirement du feuillet moyen et les déformations dues aux efforts tranchants, influences que nous avons négligées.

Zurich, le 29 juin 1949.

[1] Les figures 4 et 8 permettront en particulier au lecteur de comparer la flèche due à une surcharge uniformément répartie dont la valeur totale est $P = \pi a^2 p$, à celle engendrée par une force concentrée de même valeur, appliquée au centre de la plaque.

[2] Voir S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, p. 75. Voir aussi A. Nadai, *Elastische Platten*, p. 308, et S. Woinowsky-Krieger, *Ing. Archiv*, ol. 4, 1933, p. 305.

[1] Voir S. Timoshenko, *loc. cit.*, p. 77.

[2] Les profils de plaque esquissés dans les figures 4 et 8, en haut, satisfont à cette condition (sauf pour $n = 0{,}2$ et peut-être pour $n = 0{,}4$). Ce n'est par contre pas le cas des figures 1, 3a à c et 7, où l'on a intentionnellement exagéré les dimensions verticales, pour la clarté du dessin.