

Zeitschrift:	Bulletin technique de la Suisse romande
Band:	75 (1949)
Heft:	16
Artikel:	Contribution à l'étude de phénomènes transitoires à l'aide de suites de temps
Autor:	Cuénod, Michel
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-56876

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francsPour sociétaires :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francsPour les abonnements
s'adresser à la librairie**F. ROUGE & Cie**
à LausannePrix du numéro :
1 fr. 25**Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.****COMITÉ DE PATRONAGE.** — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. — Membres : Fribourg : MM. † L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; Vaud : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte : Genève : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte, Neuchâtel : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; Valais : MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGNER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

TARIF DES ANNONCESLe millimètre
(l'arg. 47 mm) 20 ctsRéclames : 60 cts le mm
(largeur 95 mm)Rabais pour annonces
répétées**ANNONCES SUISSES S.A.**5, Rue Centrale
Tél. 2 33 26
LAUSANNE
et Succursales**CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE**

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : Contribution à l'étude de phénomènes transitoires à l'aide de suites de temps, par M. MICHEL CUÉNOD, ingénieur E. P. F. —**DIVERS : La controverse des barrages continue**, par M. MAURICE PASCHOUARD, — **Inauguration du nouvel abattoir de Genève**, par J. S. —**Société suisse des ingénieurs et des architectes : Union internationale des Architectes, Section suisse. — Communiqué du Secrétariat** —**BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT.**

Contribution à l'étude de phénomènes transitoires à l'aide de suites de temps

par MICHEL CUÉNOD, ingénieur, E. P. F.

I. Introduction

De même que les autres formes de la connaissance, l'évolution des mathématiques s'exerce en deux directions apparemment opposées : si d'une part, elles explorent des domaines qui deviennent de plus en plus abstraits, voire inaccessibles aux non-mathématiciens, d'autre part, elles tendent à se simplifier et à offrir un instrument de plus en plus souple et commode à disposition des non-spécialistes. La définition et l'utilisation de « suites de temps » représentent un pas dans cette deuxième direction dont l'ingénieur est le tout premier bénéficiaire. Le principe de ces suites a été donné par M. A. Tustin¹. Nous nous proposons de rappeler ce principe en nous plaçant à un point de vue quelque peu différent de celui de l'auteur précité, et nous nous efforcerons ensuite de mettre en évidence les avantages pratiques qu'offre cette méthode de calcul.

II. Définition d'une suite de temps

Considérons une fonction quelconque du temps $F(t)$ représentée par la figure 1 que nous supposons par exemple avoir été relevée expérimentalement. La surface circonscrite par cette courbe peut être considérée comme étant formée par un ensemble de rectangles tels que celui qui est hachuré.

La base de ce rectangle est égale à une unité de temps τ sa hauteur est égale à la moyenne des ordonnées entre deux abscisses séparées par une unité de temps ;

$$\text{soit } f_n = \frac{1}{\tau} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} f(t) dt \sim \frac{F((n-1)\tau) + F(n\tau)}{2}$$

avec $F((n-1)\tau)$ = valeur de $F(t)$ pour $t = (n-1)\tau$
 $F(n\tau)$ = valeur de $F(t)$ pour $t = n\tau$.

Ainsi à une fonction $F(t)$, il est possible de faire correspondre une certaine suite de temps S telle que

$$F(t) \leftrightarrow S = [f_1; f_2; f_3; \dots; f_n]$$

f_1 étant la moyenne des ordonnées pour les temps de 0 à τ
 f_2 » » » » » » » de τ à 2τ
etc.

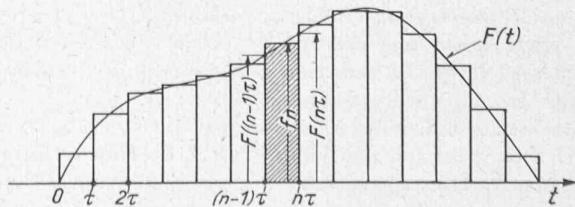


Fig. 1. — Définition d'une suite de temps.

¹ Voir A. TUSTIN : *Method of analysing the behaviour of Linear System in Term of Time series*. — The journal of the institution of electrical engineers Vol. 94, Part II A, N° 1 1947, p. 130-143.

L'unité de temps τ doit être choisie de façon suffisamment petite pour que l'on puisse admettre que la fonction étudiée varie linéairement pendant la durée d'une unité de temps. L'exactitude de ce procédé peut être élevée à volonté en réduisant l'unité de temps choisie.

III. Opération avec les suites de temps

Considérons les deux fonctions $F_a(t)$ et $F_b(t)$ et les deux suites de temps correspondantes

$$S_a = [a_1; a_2; a_3; \dots; a_n] \\ \text{et } S_b = [b_1; b_2; b_3; \dots; b_n].$$

Nous allons montrer comment effectuer avec ces suites les quatre opérations suivantes et quelle est la signification de ces opérations.

Addition et soustraction

La fonction $F_{a+b}(t)$, obtenue par la somme des fonctions $F_a(t)$ et $F_b(t)$, est donnée par la somme des ordonnées des fonctions $F_a(t)$ et $F_b(t)$ pour la même abscisse. Les termes de la suite S_{a+b} correspondant à la fonction $F_{a+b}(t)$ sont obtenus par l'addition des termes des suites S_a et S_b

$$F_{a+b}(t) = F_a(t) + F_b(t) \Leftrightarrow S_{a+b} = S_a + S_b = [a_1; a_2; \dots; a_n] + [b_1; b_2; \dots; b_n] = [a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n].$$

A titre d'exemple, considérons les deux suites telles que :

$$S_a = [1; 2; 1] \quad \text{et } S_b = [1; 2; 2; 1]$$

nous obtenons :

$$S_a + S_b = S_{a+b} = [1+1; 2+2; 1+2; 1+0] = [2; 4; 3; 1].$$

La figure 2 montre quelle est la signification géométrique de l'addition de deux suites. Nous vérifions que la surface de la somme soit égale à la somme des surfaces S_a et S_b

$$(1+2+1) + (1+2+2+1) = (2+4+3+1) = 10.$$

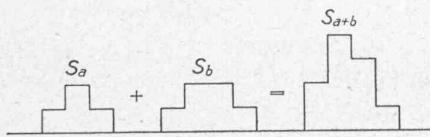


Fig. 2. — Signification géométrique de l'addition et de la soustraction de suites de temps.

La soustraction s'opère selon le même principe que l'addition, en soustrayant membre à membre les termes des deux suites à soustraire. Nous obtenons ainsi :

$$F_a - F_b \Leftrightarrow S_a - S_b = S_{a-b} = [a_1 - b_1; a_2 - b_2; \dots; a_n - b_n].$$

Multiplication

Considérons les deux grandeurs variables A et B et admettons qu'il existe une certaine dépendance entre ces deux grandeurs telle que les variations de B puissent être considérées comme la conséquence des variations de A .

Ces deux grandeurs peuvent être par exemple : la tension aux bornes d'entrée et aux bornes de sortie d'un quadripôle électrique, la force agissant sur un point matériel et le déplacement de ce point, la grandeur à régler et la course d'un régulateur, etc.

Nous admettons que l'on a pu déterminer la fonction $F_{1b}(t)$ de la variation de B à la suite d'une variation de A selon une impulsion unitaire représentée par la figure 3a et caractérisée par un rectangle de base égale à l'unité de temps τ et dont la surface est égale à 1.

Nous nous proposons de déterminer la variation de B résultant d'une variation de A selon une fonction quelconque $F_a(t)$

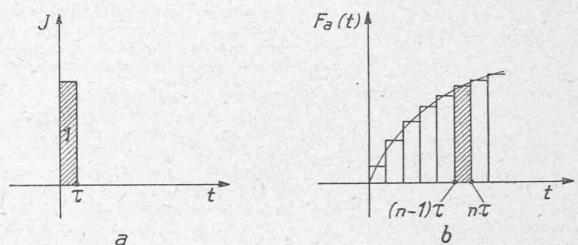


Fig. 3. — Décomposition d'une fonction $A(t)$ en une suite d'impulsions rectangulaires.

La figure 3b représente la fonction F_a décomposée en une suite d'impulsions rectangulaires.

La surface du rectangle hachuré est égal à

$$j_a(n\tau) = \frac{F_a(n\tau) + F_a((n-1)\tau)}{2} \tau.$$

Si l'unité de temps τ est choisie de façon suffisamment petite, nous pouvons admettre que $F_a(n\tau) \approx F_a((n-1)\tau)$ et nous obtenons

$$\Delta F_a = F_a(n\tau) \tau.$$

La variation de la grandeur B résultant de l'impulsion $f(n\tau)$ qui agit au temps $\theta = n\tau$ est égale à

$$\Delta F_b = \Delta F_a \cdot F_{1b}(t-n\tau) = F_a(n\tau) \cdot F_{1b}(t-n\tau) \tau.$$

La variation F_b de la grandeur B résultant d'une variation de A selon la fonction F_a est donnée par la somme des variations ΔF_b de B dues à l'action successive des différentes impulsions ΔF_a de A

$$F_b = \sum_n \Delta F_b = \sum_n F_a(n\tau) \cdot F_{1b}(t-n\tau) \tau.$$

Si nous faisons tendre l'unité τ vers zéro et en posant

$$\begin{cases} n\tau = \theta \\ \tau = d\theta, \end{cases}$$

nous obtenons l'intégrale de Duhamel :

$$F_b(t) = \int_0^t F_a(\theta) \cdot F_{1b}(t-\theta) d\theta.$$

Il est connu que cette intégrale permet, lorsque l'on peut admettre que le système est linéaire, de calculer la variation de B , $F_b(t)$, résultant d'une variation de A , $F_a(t)$, la fonction $F_{1b}(t)$ étant la variation de B résultant d'une variation de A selon une impulsion unitaire dont la durée est infiniment courte et dont l'intégrale est égale à 1. Il est connu également, selon le théorème de Borel, l'intégrale de Duhamel

correspond au produit des fonctions équivalentes écrites sous formes opérationnelles

$$\int_0^t A(\theta) \cdot B(t-\theta) d\theta \leftrightarrow a(p) \cdot b(p).$$

Par analogie, nous pouvons écrire que la suite qui correspond à la fonction $F_b(t)$ est obtenue par le « produit » des suites S_a et S_b correspondant à F_a et à F_{1b} , et nous indiquons ce produit par le signe (*)

$$\begin{aligned} \int_0^t F_a(\theta) F_{1b}(t-\theta) d\theta &\leftrightarrow S_{ab} = S_a * S_b = \\ &\equiv \sum_n F_a(n\tau) \cdot F_{1b}(t-n\tau) \tau \\ &= [a_1; a_2; \dots; a_n] * [b_1; b_2; \dots; b_n]. \end{aligned}$$

La variation de B résultant de l'action de la première impulsion a_1 qui compose la variation de A est égale à

$$[a_1 b_1; a_1 b_2; a_1 b_3; a_1 b_4; \dots; a_1 b_n].$$

La variation de B résultant de a_2 agissant au temps τ est égale à

$$[o; a_2 b_1; a_2 b_2; a_2 b_3; \dots; a_2 b_n].$$

La variation de B résultant de a_3 agissant au temps 2τ est égale à

$$[o; o; a_3 b_1; a_3 b_2; a_3 b_3; \dots; a_3 b_n].$$

Le résultat du produit est égal à la somme de ces différentes suites ainsi que cela ressort du tableau suivant :

$S_a =$	a_1	a_2	a_3	a_4	\dots
$S_b =$	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	$a_4 b_1$	\dots
	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	$a_4 b_2$	\dots
	$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	$a_4 b_3$	\dots
$S_{ab} =$	$a_1 b_1; a_1 b_2 + a_2 b_1; a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1; \dots$				

Considérons l'exemple de la multiplication des deux séries représentées par la figure 3

$S_a =$	1	2	2	1	
$S_b =$	1	2	1		
	1	2	2	1	
	2	4	4	2	
		1	2	2	1
$S_{ab} =$	1	4	7	7	4

La signification géométrique de cette multiplication ressort directement de la figure 4.

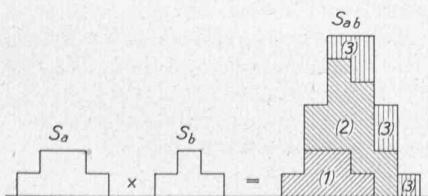


Fig. 4. — Signification géométrique de la multiplication et de la division de suites de temps.

La surface hachurée (1) représente la fonction S_a multipliée par le facteur 1, la surface hachurée (2) représente la fonction S_a multipliée par le facteur 2 et décalée de 1 unité de temps, la surface hachurée (3) représente la fonction S_a multipliée par le facteur 1 et décalée de deux unités de temps. Nous vérifions que la surface représentée par la suite S_{ab} est égale au produit des surfaces représentées par S_a et S_b $(1+2+2+1) \cdot (1+2+1) = (1+4+7+7+4+1) = 24$.

Il est connu que

$$F_{ab}(t) = \int_0^t F_a(\theta) F_b(t-\theta) d\theta = \int_0^t F_a(t-\theta) F_b(\theta) d\theta$$

nous en concluons que

$$S_{ab} = S_{ba} = S_a * S_b = S_b * S_a.$$

Le produit de deux suites est donc commutatif, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on effectue la multiplication de deux suites n'influe pas sur le résultat de ce produit.

Division

La division de suites de temps est l'opération inverse à celle de la multiplication, elle correspond à la résolution de l'équation intégrale de Volterra et permet de déterminer la variation B à la suite d'une variation de A selon une impulsion unitaire lorsque l'on connaît la variation $F_b(t)$ de B résultant d'une variation quelconque $F_a(t)$ de A . Il est connu que sous forme opérationnelle, la résolution de l'opération de Volterra conduit à faire le quotient des transformées de Laplace de $F_a(t)$ et de $F_b(t)$. De façon analogue la suite correspondant à la fonction F_{1b} s'obtient en faisant la « division » des suites correspondantes S_a et S_b que nous exprimons symboliquement par le signe *

$$S_{\frac{a}{b}} = S_a * S_b = \frac{[a_1; a_2; a_3; \dots; a_n]}{[b_1; b_2; b_3; \dots; b_n]}.$$

La démonstration rigoureuse du procédé de la division nécessiterait une étude détaillée des conditions de convergence des suites, étude qui sortirait du cadre de cet exposé. Nous nous contenterons d'indiquer la façon dont s'opère la division des deux suites S_a et S_b telle qu'elle ressort du tableau suivant :

$S_a = a_1$	a_2	a_3	a_4	$ S_b = b_1; b_2; b_3; \dots$
a_1	$a_1 \frac{b_2}{b_1}$	$a_1 \frac{b_3}{b_1}$	$a_1 \frac{b_4}{b_1}$	$S_a = \frac{a_1}{b_1}, \frac{1}{b_1} (a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1}) ; \dots$
0	$a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1}$	$a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1}$	$a_4 - a_1 \frac{b_4}{b_1}$	
	$a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1}$	$b_2 \left(a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1} \right)$	\dots	
0				

Nous cherchons combien de fois b_1 entre dans a_1 ce qui donne le premier terme de la suite du quotient. Nous multiplions chaque terme de la suite de S_b , par le quotient $\frac{a_1}{b_1}$ et

soustrayons la suite ainsi obtenue de la suite S_a . Nous cherchons combien de fois b_1 entre dans le premier terme $a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1}$ de cette nouvelle suite ce qui donne le deuxième terme de la suite du quotient, et l'opération se continue comme pour le premier terme. Il en est de même pour les termes suivants.

A titre d'exemple, nous allons contrôler qu'en divisant la suite S_{ab} par la suite S_b nous retrouvons la suite S_a de l'exemple précédent

$$\begin{array}{r} S_{ab} = \\ \begin{array}{r} 1 & 4 & 7 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 5 & 6 & 4 & \\ & 2 & 4 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} S_b = \\ \begin{array}{r} 1 & 2 & 2 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} S_a = \\ \begin{array}{r} 1 & 2 & 1 \\ & & \\ & & \end{array} \end{array}$$

Nous cherchons combien de fois le premier terme du dénominateur, soit 1, entre dans le premier terme du numérateur soit 1 fois, ce qui donne le premier terme de la suite du quotient. Nous multiplions le dénominateur par ce terme et nous obtenons une suite que nous soustrayons membre à membre de la suite du numérateur, c'est-à-dire que nous soustrayons [1, 2, 2, 1] de [1, 4, 7, 7, 4, 1]; nous obtenons une nouvelle suite [0, 2, 5, 6, 4, 1]. Nous cherchons combien de fois le premier terme du dénominateur entre dans le terme différent de zéro de cette nouvelle suite ... et l'opération se continue. Comme nous pouvions nous y attendre, nous retrouvons la suite [1, 2, 1] ainsi que cela ressort de la figure 4.

Nous vérifions que la surface correspondant à la suite du quotient est égale au quotient des surfaces correspondant aux suites du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{1 + 4 + 7 + 7 + 4 + 1}{1 + 2 + 2 + 1} = \frac{24}{6} = (1 + 2 + 1) = 4.$$

Le tableau suivant résume la signification des quatre opérations que nous avons définies.

	Fonction du temps	Suite	Fonction opérationnelle
Addition	$F_a(t) + F_b(t)$	$S_a + S_b$	$F_a(p) + F_b(p)$
Soustraction	$F_a(t) - F_b(t)$	$S_a - S_b$	$F_a(p) - F_b(p)$
Multiplication	$\int_0^t F_a(t-\theta) F_b(\theta) d\theta$ intégrale de Duhamel	$S_a * S_b$	$F_a(p) . F_b(p)$
Division	Résolution de l'équation intégrale de Volterra	$S_a * S_b$	$\frac{F_a(p)}{F_b(p)}$

Tableau des opérations à l'aide de suites de temps.

IV. Définition et détermination de la courbe de réponse d'un dispositif

Lorsque les variations $F_a(t)$ d'une grandeur A et $F_b(t)$ d'une grandeur B ont pu être déterminées, il est possible de calculer les variations $G_b(t)$ de B qui résulteraient de toute autre variation de A telle que $G_a(t)$. Analytiquement ce résultat est obtenu par la résolution du système d'équations intégrales suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} F_b(t) = \int_0^t F_a(\theta) U_b(t-\theta) d\theta \\ G_b(t) = \int_0^t G_a(\theta) U_b(t-\theta) d\theta \end{array} \right.$$

$F_a(t)$, $F_b(t)$ et $G_a(t)$ étant connus, $G_b(t)$ étant à déterminer et $U_b(t)$ étant à éliminer entre ces deux équations.

Il est connu que sous forme opérationnelle, ce système d'équation intégrale se réduit à un simple quotient.

$$G_b(p) = \frac{f_b(p)}{f_a(p)} G_a(p)$$

$f_a(p)$, $f_b(p)$, $G_a(p)$, $G_b(p)$ étant les transformées de Laplace de $F_a(t)$, $F_b(t)$, $G_a(t)$ et $G_b(t)$.

Selon la définition que nous avons donnée de la multiplication et de la division à l'aide de suites de temps, il est possible de calculer aisément la suite T_b caractérisant une variation de B à la suite d'une variation T_a de A lorsque les suites S_a et S_b ont pu être relevées expérimentalement :

$$T_b = \frac{S_b}{S_a} * T_a.$$

Il est ainsi possible de ramener les variations de B à un commun dénominateur des variations de A et de comparer entre eux les résultats de différentes mesures. Comme variation de référence, il semble indiqué de choisir la fonction unitaire caractérisée par la suite $S_1 = [1 ; 1 ; 1 \dots]$. La suite S_{b1} que nous obtenons est définie comme étant la suite de la courbe de réponse de B par rapport à A .*

$$S_{b1} = \frac{S_b}{S_a} * S_1 = \frac{[b_1 ; b_2 ; b_3 \dots b_n] * [1 ; 1 ; 1 \dots 1]}{[a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots a_n]}.$$

Nous insistons sur le fait que ce mode de calcul n'est valable que si on peut considérer que les fonctions en question sont linéaires, ce qui est généralement le cas lorsque l'on considère de faibles variations par rapport à un état initial.

A titre d'exemple, considérons que la suite $S_B = [0,06 ; 0,35 ; 0,88 ; 1,55 ; 2,35 \dots]$ représentée par la courbe 1 de la figure 5 a été mesurée comme résultant d'une variation de S_A selon une fonction linéaire $S_A = [0,5 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5 \dots]$ (courbe 2). Nous calculons la suite de la courbe de réponse en effectuant la multiplication et la division ci-dessus définies.

* Nous rappelons que la courbe de réponse d'une grandeur B par rapport à une grandeur A est définie comme étant la variation de B , résultant d'une brusque variation de A selon une fonction unitaire représentée par la courbe 3 de la fig. 5.

S_B	=	0,06	0,35	0,88	1,55	2,34	...
S_{A1}	=	1	1	1	1	1	...
		0,06	0,35	0,88	1,55	2,34	...
		0,06	0,35	0,88	1,55	2,34	...
		0,06	0,35	0,88	1,55	2,34	...
		0,06	0,35	0,88	1,55	2,34	...
		0,06	0,35	0,88	1,55	2,34	...
		0,06	0,35	0,88	1,55	2,34	...

$S_{A1}S_B$	=	0,06	0,41	1,29	2,84	5,48	...	S_A	=	0,5	1,5	2,5	...
		0,06	0,18	0,30	0,42	0,54	...			S_{L1}	=	0,12 ; 0,46 ; 0,60 ; 0,74 ; 0,84	...
		0	0,23	0,99	2,42	4,64	...						
		0,23	0,69	1,15	1,61	2,08	...						
		0,30	1,27	3,03	3,03	3,03	...						
		0,30	0,90	1,5	1,5	1,5	...						
		0	0,37	1,53	1,53	1,53	...						
		0,37	1,11	1,11	1,11	1,11	...						
		0	0,42	0,42	0,42	0,42	...						
							...						

Nous obtenons la suite $S_{B1} = [0,12 ; 0,46 ; 0,60 ; 0,74 ; 0,84 ; \dots]$ représentée par la courbe 4 de la figure 5, de la courbe de réponse de B par rapport à A , résultant d'une variation de A selon la fonction unitaire représentée par la courbe 3.

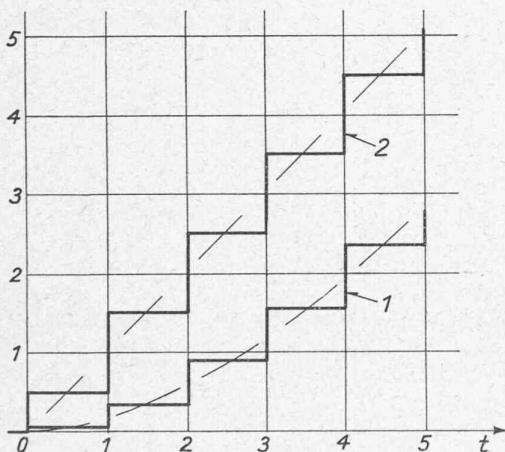


Fig. 5. — Détermination d'une courbe de réponse à l'aide de suites de temps.

V. Intégration à l'aide de suites de temps

Considérons à nouveau une fonction $F(t)$ représentée par la figure 6 et la suite $S = [f_1; f_2; f_3; \dots]$ correspondante. Etant donné la définition des composantes impulsives, nous pouvons calculer à l'aide de cette suite les valeurs de l'intégrale $\int_0^t F(t) dt$ pour les temps $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$

$$\int_0^\tau F(t) dt = f_1$$

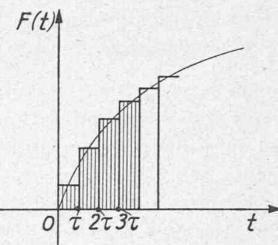


Fig. 6. — Définition de l'intégrale à l'aide de suites de temps.

$$\int_0^{2\tau} F(t) dt = f_1 + f_2$$

$$\int_0^{3\tau} F(t) dt = f_1 + f_2 + f_3 \text{ etc.}$$

Considérons à nouveau l'intégrale de Duhamel.

$$y(t) = \int_0^t E(t-\theta) F(\theta) d\theta$$

et posons la fonction $E(t-\tau) = \text{const} = 1$.

Nous obtenons

$$y(t) = \int_0^t 1 F(\theta) d\theta = \int_0^t F(t) dt.$$

Ainsi que nous l'avons exposé précédemment, à cette équation intégrale correspond un produit de la suite $S_1 = [1; 1; \dots]$ et la suite $[f_1; f_2; f_3; \dots]$; il en résulte

$$\int_0^t F(t) dt \leftrightarrow [f_1; f_2; \dots; f_n] * [1; 1; \dots; 1].$$

Si nous effectuons cette multiplication selon le procédé que nous avons indiqué, nous retrouvons en effet les termes de la suite qui correspond à l'intégrale $\int_0^t F(t) dt$

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1 & f_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ f_1; f_1 + f_2; f_1 + f_2 + f_3; \dots \end{array}$$

A titre d'exemple, nous calculons l'intégrale de la fonction linéaire $F(t) = t$

$$\begin{array}{cccccc} S = & 0,5 & 1,5 & 2,5 & 3,5 & \dots \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \hline & 0,5 & 1,5 & 2,5 & 3,5 & \dots \\ & 0,5 & 1,5 & 2,5 & \dots & \dots \\ & 0,5 & 1,5 & \dots & \dots & \dots \\ & 0,5 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$$\int_0^t t dt \leftrightarrow [0,5; 2; 4,5; 8; \dots] = \frac{1}{2}[1; 4; 9; 16; \dots].$$

Nous obtenons la suite parabolique qui correspond à la fonction $\frac{t^2}{2}$.

Remarque

Le n ème terme de la suite de temps qui correspond à l'intégrale donne la valeur moyenne de l'intégrale entre les temps $(n-0,5)\tau$ et $(n+0,5)\tau$ (alors que le terme f_n est la valeur moyenne de la fonction entre les temps $(n-1)\tau$ et $n\tau$). Ainsi, toute la suite de l'intégrale est décalée de $0,5\tau$ en avant par rapport à la suite de la fonction intégrée; cependant lorsque τ est très petit, ce décalage est négligeable.

VI. Différenciation à l'aide de suites de temps

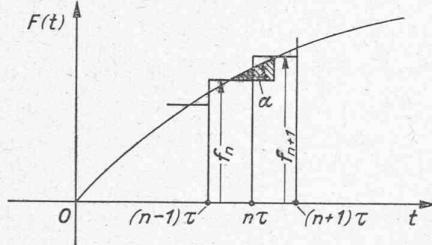


Fig. 7. — Définition de la dérivée à l'aide de suites de temps.

Considérons à nouveau une fonction $F(t)$ à laquelle correspond une certaine suite $S = [f_1; f_2; f_3; \dots; f_n]$.

Ainsi que le montre le petit triangle hachuré de la figure 7, la dérivée de la fonction au temps $(n\tau)$ est donnée en première approximation par $\tan \alpha$

$$\tan \alpha = \frac{dF}{dt} \Big|_{t=n\tau} = \frac{F((n+1)\tau) - F(n\tau)}{\tau}$$

$$\text{ainsi } \frac{dF}{dt} \Big|_{t=\tau} = f_1 - f_0$$

$$\frac{dF}{dt} \Big|_{t=2\tau} = f_2 - f_1 \quad \text{etc.}$$

La dérivée est donc caractérisée par une certaine suite telle que

$$\frac{dF}{dt} \leftrightarrow S' = [f_1 - f_0; f_2 - f_1; f_3 - f_2; \dots; f_n - f_{n-1}].$$

Considérons à nouveau l'intégrale de Duhamel dont nous prenons la dérivée; les relations suivantes sont classiques :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t E(t-\theta) F(\theta) d\theta &= \int_0^t \frac{d}{dt} E(t-\theta) F(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^t E(t-\theta) \frac{d}{dt} F(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Nous admettons à nouveau que la fonction E est la fonction unitaire $U(t) = 1$; la dérivée de cette fonction unitaire est une impulsion d'amplitude infinie et de durée infiniment courte, c'est-à-dire l'impulsion unitaire limite, lorsque $\tau \rightarrow 0$. Soit $S = [f_1; f_2; f_3 \dots f_n]$ la suite qui correspond à $F(t)$

et $S' = [f'_1; f'_2; f'_3 \dots f'_n]$ la suite qui correspond à $\frac{dF(t)}{dt}$.

Nous obtenons ainsi :

$$[1] * S = [1; 1; 1; \dots] * S'$$

$$S' = S * \frac{[1]}{[1; 1; 1; \dots]} = S * [1; -1].$$

Si nous effectuons le produit de la suite $[f_1; f_2; \dots; f_n]$ par $[1; -1]$, nous retrouvons les termes de la suite de la dérivée que nous avons définie précédemment :

$$\begin{array}{r} S = \begin{array}{ccccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \dots \\ \hline 1 & -1 & & & & & \end{array} \\ \hline S' = \begin{array}{ccccccc} f_1-f_0 & f_2-f_1 & f_3-f_2 & f_4-f_3 & \dots \\ \hline \end{array} \end{array}$$

F_0 étant la moyenne de $F(t)$ entre $t = -\tau$ et $t = 0$ si l'on prolonge $F(t)$ selon sa tangente pour $\frac{df}{dt}$ pour $t = 0$. A titre d'exemple, nous calculons la dérivée de la fonction parabolique $F(t) = \frac{t^2}{2}$ et vérifions que nous obtenons la fonction linéaire $F'(t) = t$

$$\begin{array}{r} F(t) = \frac{t^2}{2} \leftrightarrow S = \begin{array}{ccccccc} 0,5 & 2 & 4,5 & 8 & \dots \\ \hline 1 & -1 & & & & & \end{array} \\ \hline F'(t) = t \leftrightarrow S' = \begin{array}{ccccccc} 0,5 & 1,5 & 2,5 & 3,5 & \dots \\ \hline 0,5 & 2 & 4,5 & 8 & \dots \\ 0 & -0,5 & -2 & -4,5 & \dots \end{array} \end{array}$$

Comme la tangente de parabole est horizontale pour $t = 0$, nous avons $f(0) = 0$.

Remarque

La différenciation apparaît bien comme l'opération inverse de l'intégration. Au lieu de multiplier par la suite $[1; 1; 1; \dots]$ elle consiste à diviser par cette suite.

Le n ème terme de la suite qui correspond à la dérivée d'une fonction donne la moyenne de cette dérivée entre les temps $(n-0,5)\tau$ et $(n+0,5)\tau$ c'est-à-dire que, de même que pour l'intégrale, la suite qui correspond à la dérivée est décalée de $0,5\tau$ par rapport à la suite de la fonction à dériver.

VII. Relation entre le calcul opérationnel et les suites de temps

Il est connu que l'impulsion unitaire s'exprime mathématiquement de la façon suivante :

$$J(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\zeta t} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt} dp.$$

Exprimée sous forme réelle, nous obtenons

$$J(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega t dw.$$

Or cette intégrale est la transformation de Laplace, telle que Carson et Doetch l'utilisent, permettant de calculer la fonction « objet » $A(t)$ qui correspond à la fonction « image » $\varphi(p)$

$$A(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \varphi(p) e^{pt} dp.$$

L'intégrale de la fonction impulsion n'est pas autre chose que cette transformation appliquée à la fonction $\varphi(p) = 1$. Or, par définition, cette fonction impulsion correspond à la suite $[1; 0; 0; \dots] = [1]$ lorsque l'unité de temps choisie τ tend vers 0.

Nous avons vu que le produit de deux fonctions sous forme opérateur correspond au produit de deux suites de temps.

$$\int A(t) B(t-\tau) d\tau \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} a(p) b(p) e^{pt} dp \doteq S_a * S_b$$

avec $a(p)$ et $b(p)$ = transformée de Laplace correspondant à $A(t)$ et $B(t)$

S_a et S_b = suite de temps correspondant à $A(t)$ et $B(t)$.

Dans le cas particulier où $b(p) = 1$ nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} a(p) e^{pt} dp \doteq S_a * [1] = S_a$$

Les suites de temps permettent donc d'effectuer l'intégrale de la transformation de Laplace, il suffit de remplacer l'opérateur p par la suite $[1; -1]$ pour obtenir la suite qui correspond à la fonction objet ainsi que cela ressort du tableau suivant :

Fonction image	Fonction objet	suite
1	$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\beta t} d\zeta$	[1]
p	$\frac{j}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta e^{j\beta t} d\zeta$	[1; -1]
p^2	$-\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 e^{j\beta t} d\zeta$	[1; -2; 1]
p^3	$-\frac{j}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^3 e^{j\beta t} d\zeta$	[1; -3; 3; 1]
$\frac{1}{p}$	1	[1; 1; ... 1]
$\frac{1}{p^2 T}$	T	$\frac{1}{T} [1; 2; 3; \dots]$
$\frac{1}{pT+1}$	$e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{T[1;-1]+1} = \frac{1}{[T+1;-T]}$

Tableau de quelques « fonction image », « fonction objet » et « suite » équivalentes.

Cette propriété est particulièrement avantageuse lorsque la fonction image est appliquée à une fonction du temps $X(t)$ relevée expérimentalement dont on ne connaît pas l'expres-

sion mathématique ; la suite correspondante est égale au produit de la suite qui correspond à $X(t)$ par la suite qui correspond à cette fonction image.

La transformation de Laplace est utilisée différemment par certains auteurs tels que K. W. Wagner qui écrivent :

$$A(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{f(p)}{p} e^{pt} dp \text{ avec } f(p) = \text{fonction « dérivée »} \\ A(t) = \text{fonction « primitive »}.$$

Dans ce cas, la fonction unité qui correspond à $f(p) = 1$ n'est plus l'impulsion unitaire $J(t)$ mais la fonction unitaire

$$U(t) \text{ telle que } U(t) \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = 1 & t > 0 \end{cases}.$$

Pour obtenir les suites de temps qui correspondent aux fonctions « primitives » de ces fonctions « dérivées », il faut les diviser par l'opérateur p , ou ce qui revient au même, les multiplier par la suite $[1; 1; \dots]$ qui correspond à la fonction unitaire.

VIII. Exemple d'utilisation des suites de temps

a) Détermination des conditions de stabilité d'un réglage automatique

Considérons le réglage de vitesse d'une turbine hydraulique. Nous supposons que le circuit de réglage est « ouvert » c'est-à-dire que le régulateur de vitesse est entraîné par un moteur dont on puisse faire varier la vitesse à volonté, indépendamment de la vitesse du groupe.

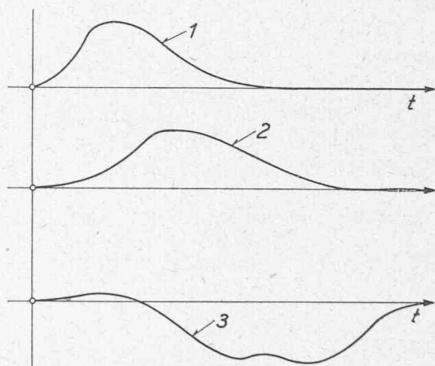


Fig. 8. — Détermination des conditions de stabilité du réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique.

Ainsi que le représente la figure 8, nous supposons que l'on ait pu faire varier passagèrement la vitesse enregistrée par le régulateur de vitesse et que l'on ait mesuré également la course du vannage selon la courbe 2 et la variation résultante de la vitesse du groupe selon la courbe 3, la charge du groupe étant restée constante. A l'aide de ce seul essai, il est possible de calculer les courbes de réponse du dispositif de réglage et du groupe, c'est-à-dire de déterminer expérimentalement leur caractéristique dynamique et de vérifier si les conditions de stabilité sont remplies, en calculant les courbes de Nyquist correspondantes et en leur appliquant le critère de Nyquist¹⁾.

b) Solution d'équations différentielles linéaires

Considérons le dispositif mécanique, représenté par la figure 9, formé par un amortissement B et un ressort F . Nous nous proposons de calculer la course x du point X en

¹ Voir : *Etude des propriétés d'un réglage automatique*, M. CUÉNOD, « Bulletin technique de la Suisse romande », 26 avril et 10 mai 1947.

fonction de la force K qui agit sur ce point. Ce système obéit à l'équation différentielle suivante :

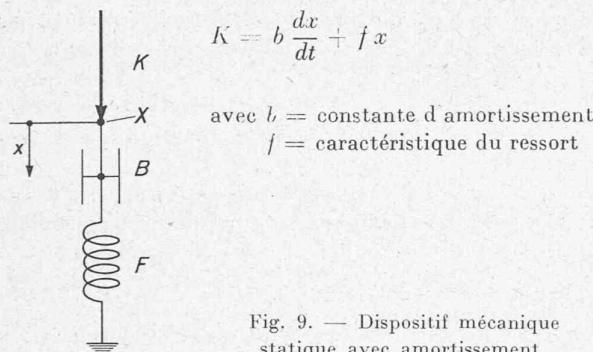


Fig. 9. — Dispositif mécanique statique avec amortissement.

Nous considérons une variation de K et de x par rapport à un état initial et posons

$$K = K_o + \Delta K \quad \text{et} \quad x = x_o + \Delta x;$$

nous tenons compte du fait que $K_o = f x_o$;
que $\frac{dx_o}{dt} = 0$ et obtenons

$$\Delta K = \frac{b \Delta x}{dt} + f \Delta x.$$

Nous divisons le terme de gauche par K_o , le terme de droite par $f x_o$ et introduisons les valeurs relatives suivantes :

$$\kappa = \frac{\Delta K}{K_o} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\Delta x}{x_o}$$

il en résulte :

$$\kappa = \frac{b}{f} \frac{d\xi}{dt} + \xi = T \frac{d\xi}{dt} + \xi = \xi (pT + 1)$$

avec p = opérateur de différenciation

$$T = \text{constante de temps } \frac{b}{f}$$

nous obtenons la relation de transfert suivante

$$\frac{\xi}{\kappa} = \frac{1}{pT + 1} = \frac{1}{T[1 - 1] + 1}.$$

Nous calculons la courbe de réponse résultant d'une variation de K selon la courbe 1 de la figure 10. Nous supposons que la constante de temps $T = 3$ sec. Nous obtenons

$$S_{x1} = \frac{\xi(f)}{\kappa} = \frac{[1; 1; 1 \dots]}{3[1; -1] + 1} = \frac{[1; 1 \dots]}{[4; -3]} = \\ = [0,25; 0,44; 0,58; 0,68; 0,75; 0,82; 0,87 \dots].$$

Ainsi que le représente la courbe 2 de la figure 10 et comme on devait s'y attendre, nous voyons que ξ varie selon une courbe exponentielle. Nous nous proposons de calculer les variations de ξ résultant d'une variation arbitraire de κ telle que $S_\kappa = [1; 3; 2; 1]$ représentée par la courbe 3 de la figure 10. Nous obtenons

$$\frac{\xi(t)}{\kappa} = \frac{[1; 3; 2; 1]}{[4; -3]}$$

$$\frac{\xi(t)}{\kappa} = [0,25; 0,94; 1,20; 1,45; 0,86; 0,65; 0,49; 0,37; 0,27; \dots].$$

Ce résultat est représenté par la courbe 4 de la figure 10. Nous voyons que l'amortissement a pour conséquence de

retarder et de diminuer les variations de ξ . Nous insistons sur le fait que les calculs ne sont pas rendus plus compliqués par le fait que les variations de la force K peuvent être une fonction quelconque qu'il n'est pas nécessaire d'exprimer mathématiquement.

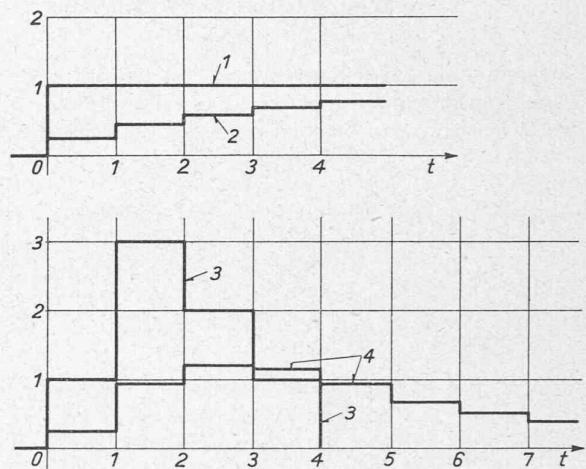


Fig. 10. — Résolution d'une équation différentielle linéaire à l'aide de suites de temps.

IX. Conclusion

La forme que l'on choisit comme fonction unitaire n'a aucune importance, pouvu que la surface de cette fonction soit égale à l'unité et que la base en soit proportionnelle à l'unité de temps. Il est ainsi également légitime de se servir de triangles ainsi que le fait M. Tustin, ce qui ne change pratiquement en rien le procédé du calcul et le résultat final dès que l'unité de temps choisie est suffisamment petite. Les opérations nécessitées par la multiplication et la division de suites de temps n'offrent aucune difficulté théorique et peuvent être effectuées à l'aide de machines à calculer telles que les machines à cartes perforées du type Holorit.

L'utilisation de suites de temps offre un nouveau moyen d'analyse dont cet exposé ne donne qu'un court aperçu et qui peut être envisagé chaque fois que l'on se propose d'étudier la relation dynamique qui existe entre deux grandeurs que l'on ne peut exprimer par une expression mathématique. Cette méthode s'impose ainsi pour l'étude de phénomènes que l'on est réduit à constater et qui échappent de par leur nature à des essais systématiques, phénomènes que l'on rencontre en géologie, par exemple, relation entre les variations de température moyennes annuelles et le mouvement des glaciers ; en économie, par exemple, relation entre les variations de l'investissement et celles du degré de production, entre les variantes de l'offre et celles des prix, etc. ; en biologie et en médecine : détermination des réactions physiologiques à la suite d'une intervention médicale, etc.

En permettant de ramener les variations des grandeurs envisagées à un commun dénominateur des variations de la cause (par exemple fonction unitaire), cette méthode donne la possibilité de comparer entre eux le résultat de différentes mesures et d'établir une moyenne des caractéristiques dynamiques que l'on se propose de déterminer. Si le fondement théorique des suites de temps fait appel à des mathématiques relativement élevées, par contre leur utilisation pratique ne donne lieu à aucun calcul compliqué ni à aucune construction graphique, ce qui doit leur attirer la faveur des ingénieurs praticiens. Cette méthode peut rendre de précieux services

en technique, en particulier pour l'étude des phénomènes de réglage automatique et chaque fois qu'en mécanique ou en électro-technique l'on est conduit à résoudre une équation différentielle avec terme perturbateur selon une fonction échappant à une détermination mathématique. Elle permet d'étudier facilement l'influence de retard qui conduit la méthode classique à des calculs très compliqués. Cette méthode ne doit pas être appliquée aveuglément, mais doit être considérée comme une approximation d'autant meilleure que

l'unité de temps choisie est faible par rapport à la durée des phénomènes envisagés et que leurs variations sont lentes, et peuvent être considérées comme linéaires.

Qu'il nous soit permis en terminant d'exprimer notre reconnaissance envers Monsieur W. Frey pour toute l'aide qu'il nous a apportée dans l'élaboration de cet exposé.

M. CUENOD
Ing. à la S. A. Brown Boveri & Cie, Baden.

La controverse des barrages continue

En complément de son article paru dans notre numéro du 21 mai 1949, M. Maurice Paschoud nous prie de porter à la connaissance de nos lecteurs les lignes suivantes (Réd.) :

Des entrefiletts parus récemment dans la presse pourraient faire croire que le différend des barrages est réglé. Il n'en est rien et voici, à ce sujet, quelques renseignements qui intéresseront peut-être les lecteurs du *Bulletin Technique*.

Deux jours avant la publication de notre article de mai 1949, le Tribunal fédéral avait rejeté les conclusions prises par le Conseil d'Etat du Valais tendant à ce qu'il plaise à ce Tribunal de prononcer que le Département fédéral n'était pas compétent pour prendre ses décisions de 1948 concernant le type de barrage à adopter pour la retenue de Cleuson.

D'ailleurs, au début de février 1949, l'Inspection fédérale des travaux publics, sans attendre cet arrêt et comme si elle en avait deviné à l'avance la teneur, demandait à sa commission d'experts « d'examiner comment, à Cleuson, on pourrait utiliser la partie du mur évidé déjà construite pour en faire un mur plein ? »

Afin d'accélérer les travaux de cette commission, elle la compléta ensuite en lui adjointant deux nouveaux membres, un professeur de l'Ecole polytechnique fédérale et un ancien ingénieur en chef des Chemins de fer fédéraux. En même temps, elle la pria d'étudier aussi « comment on pourrait renforcer le tronçon de mur évidé existant pour qu'il présente la même sécurité qu'un mur plein ? »

Au début de mars, l'Inspection soumit à sa commission

élargie le rapport du groupe d'ingénieurs consultés par Salanfe S. A. à propos des barrages de Salanfe et de Cleuson. Cette commission pourrait ainsi compléter son rapport de mars 1948 et son rapport spécial de juillet de la même année (dont nous ignorions jusqu'alors l'existence) relatif à l'action des tremblements de terre sur les barrages.

La commission d'experts de l'Inspection décida de répondre d'abord aux deux questions posées par cette dernière, en se réservant de revenir, plus tard, sur le mémoire des ingénieurs consultés par Salanfe S. A.

Voici les éléments essentiels du rapport de cette commission, du 30 avril 1949, qui contient la solution des deux problèmes qui lui étaient posés.

Après quelques critiques sur les travaux (fouilles, injections de ciment) déjà exécutés à Cleuson et sur la granulométrie et le dosage du béton mis en place, critiques qui se sont d'ailleurs révélées injustifiées, les experts présentent quatre solutions aux problèmes posés par l'Inspection. Les variantes désignées par A I et par A II répondent à la première question, les variantes B I et B II à la seconde.

Nous allons donner quelques indications sur celle de ces deux variantes, la variante A I, qui, de l'avis des experts eux-mêmes, est la moins mauvaise des deux solutions de transformation du mur évidé en mur plein et sur la variante B II, qui prévoit un renforcement du mur évidé.

Variante A I. La figure 1 donne les renseignements nécessaires sur cette variante qui prévoit l'achèvement, sous forme de mur plein, de la partie du barrage déjà exécutée.

Beilage 1

Elle indique aussi, en trait-trait, la forme du projet primitif de barrage évidé. Pour tenir compte des « Directives », l'épaisseur du couronnement est portée à 5 mètres. En vertu de ces directives aussi, on prévoit un abaissement préalable de 15,90 m. du niveau maximum de la retenue, en cas de danger. Cet abaissement devrait porter sur le 36 % du volume de la retenue supposée pleine et nécessiterait alors l'écoulement de 7,5 millions de mètres cubes d'eau.

Le parement amont est vertical, le fruit du parement aval est 1 : 0,733. Le raccordement entre les parties anciennes et nouvelles se fait à la cote 2 132. A ce niveau, la longueur du pilier existant est de 50,07 m., mesurés suivant l'axe de l'évidement. Elle dépasse de 9,77 m. la longueur de base de la partie nouvelle du mur plein. Entre la cote 2 132 et les fondations, la construction existante dépasse, à l'aval, le profil du mur plein achevé. Pour éviter des difficultés dues à ce saillant, les experts en préconisent la démolition. Le remplissage de l'évidement ne doit évidemment se faire, à l'aval, que

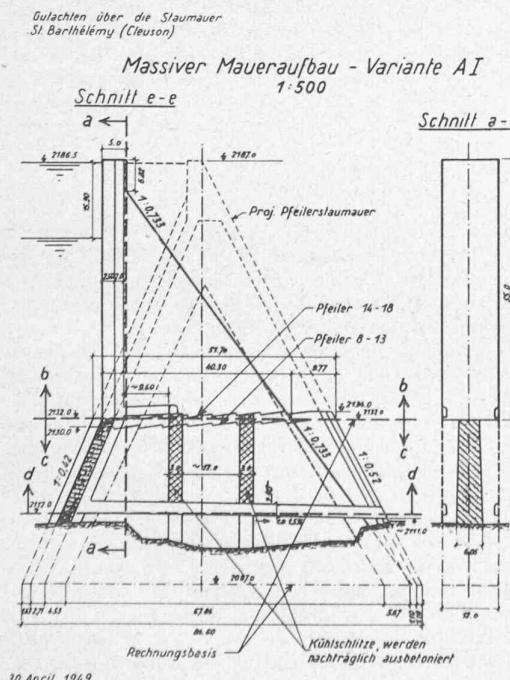


Fig. 1.

