Contraintes et déformations en un point d'un système bidimensionnel

Autor(en): **Schnitzler, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **74 (1948)**

Heft 18

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-56033

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Contraintes et déformations en un point d'un système bidimensionnel

par E. SCHNITZLER, ingénieur,

Chargé de cours à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne.

Le calcul analytique est un moyen d'investigation que l'ingénieur préfère en général aux considérations de géométrie pure, pour résoudre ses problèmes. Cependant, la géométrie conduit quelquefois au but plus rapidement et plus élégamment que le calcul, tout en donnant une interprétation plus concrète des phénomènes.

Il nous a paru intéressant de reprendre, par des raisonnements de nature essentiellement géométrique, deux problèmes fondamentaux de la résistance des matériaux, et de montrer par la même occasion comment peut s'opérer la synthèse de deux notions bien connues :

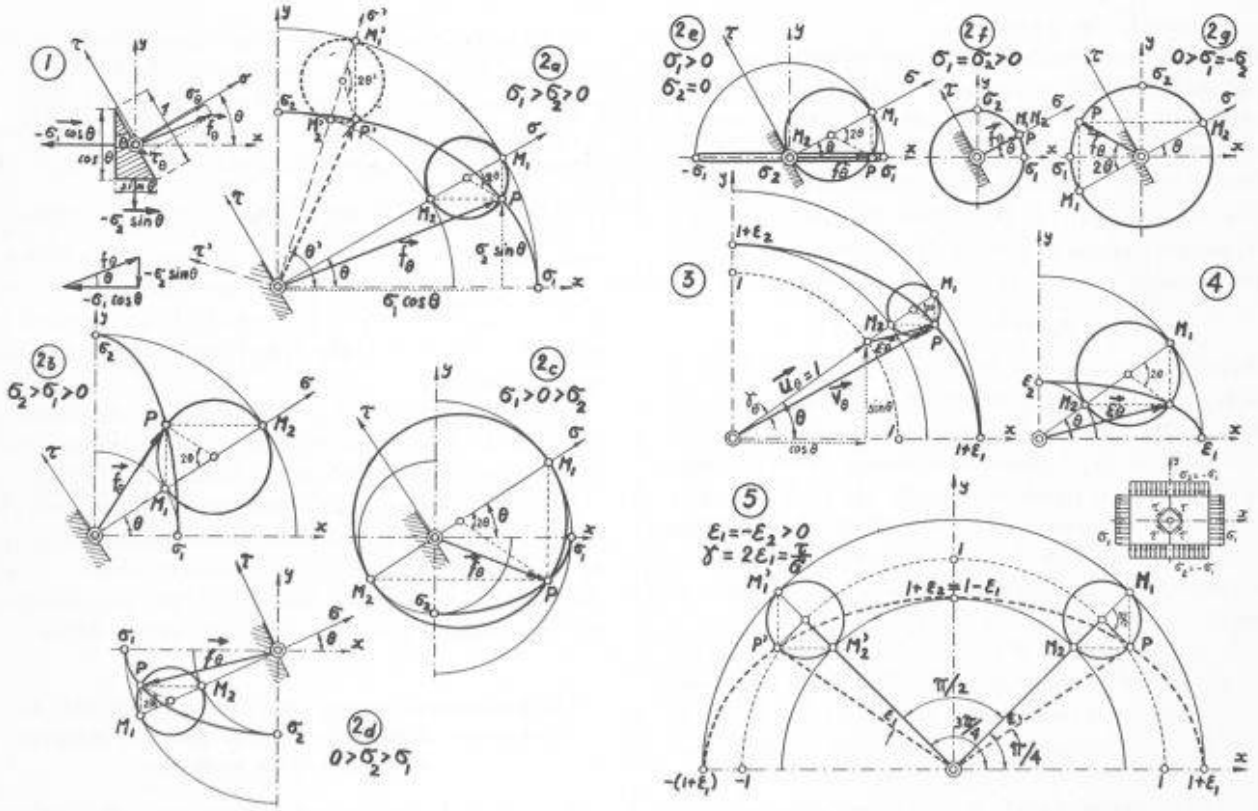
le cercle de Mohr et l'ellipse des contraintes, d'une part,

le cercle de Mohr et l'ellipse des déformations, d'autre part.

I. Etat de contraintes à deux dimensions autour d'un point

Soit un état de contraintes à deux dimensions caractérisé, en un point O, par les valeurs σ_1 et σ_2 des contraintes principales, dirigées suivant les axes (O, x) et (O, y) d'un système fixe de coordonnées avec O comme origine. Proposons-nous de déterminer la variation des contraintes normale σ_θ et tangentielle τ_θ sur un élément plan dont la normale fait l'angle θ avec $(O, +x)$, lorsque θ croît de O à 2π. σ_θ et τ_θ sont les projections de la contrainte résultante $\vec{f_\theta}$ sur les axes (O, σ) et (O, τ) liés à l'élément plan mobile et tournant avec lui autour de O lorsque θ varie (fig. 1).

Isolons un prisme élémentaire d'épaisseur égale à l'unité et dont les faces ont respectivement pour nor-



Représentation synthétique du cercle de Mohr et de l'ellipse des contraintes et des déformations en un point d'un système plan.

1. Equilibre d'un élément.
2. Cercle de Mohr et ellipse des contraintes $\vec{f_\theta}$ dans différents cas : *a)* $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$. *b)* $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$. *c)* $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$. *d)* $0 > \sigma_2 > \sigma_1$. *e)* $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 = 0$. *f)* $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$. *g)* $0 > \sigma_1 = -\sigma_2$.
3. Cercle de Mohr et ellipse des déformations $\vec{v_\theta}$.
4. Cercle de Mohr et ellipse des déformations spécifiques $\vec{\varepsilon_\theta}$.
5. Détermination du glissement unitaire γ dans le cas du cisaillement simple.

males $(O, +\sigma)$, $(O, -x)$ et $(O, -y)$. La section droite de ce prisme est un triangle rectangle ; l'hypothénuse de celui-ci étant choisie égale à l'unité, les deux côtés de l'angle droit mesurent $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Remplaçons l'effet de la partie enlevée autour du prisme par les forces équivalentes $\overrightarrow{f_\theta}$ [inconnue], $-\overrightarrow{\sigma_1 \cos\theta}$ [dirigée suivant $(O, -x)$] et $-\overrightarrow{\sigma_2 \sin\theta}$ [dirigée suivant $(O, -y)$].

Choisi aussi petit qu'on le voudra, le prisme peut être assimilé à un point matériel. Son équilibre est régi par la condition que les trois forces ci-dessus forment un dynamique fermé ; traduite vectoriellement cette condition s'écrit :

$$+\overrightarrow{f_\theta} - \overrightarrow{\sigma_1 \cos\theta} - \overrightarrow{\sigma_2 \sin\theta} = 0, \quad \text{ou bien}$$

$$\boxed{\overrightarrow{f_\theta} = \overrightarrow{\sigma_1 \cos\theta} + \overrightarrow{\sigma_2 \sin\theta}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{f_\theta}$ déterminé par cette équation (ou par le dynamique précédent) représente précisément la contrainte résultante cherchée ; elle est connue en grandeur et direction. σ_θ et τ_θ sont obtenus par projection de $\overrightarrow{f_\theta}$ sur les axes (O, σ) et (O, τ).

Interprétons géométriquement la relation donnant la contrainte $\overrightarrow{f_\theta}$ (fig. 2 a) :

Soient deux cercles de centre O et de rayons σ_1 et σ_2. La normale $(O, +\sigma)$ à l'élément plan mobile coupe ces deux cercles en deux points M_1 et M_2. Menons par M_1 une parallèle à (O, y) et par M_2 une parallèle à (O, x) ; ces deux droites, perpendiculaires entre elles, se coupent en un point P qui est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{f_\theta}$. En effet, les projections de $\overrightarrow{OP}$ sur (O, x) et sur (O, y) sont respectivement $\sigma_1 \cos\theta$ et $\sigma_2 \sin\theta$, et l'on a bien :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\sigma_1 \cos\theta} + \overrightarrow{\sigma_2 \sin\theta} = \overrightarrow{f_\theta}.$$

Cherchons, lorsque l'angle θ varie, le lieu du point P dans le plan fixe (x, O, y) et dans le plan mobile (σ, O, τ) :

dans le plan fixe, P est le point d'intersection des deux droites M_1P et M_2P parallèles aux axes de coordonnées fixes et menées à partir des points M_1 et M_2 situés à l'intersection du rayon (O, σ) issu de O avec les deux cercles de centre O et de rayons σ_1 et σ_2 : c'est donc une ellipse, en fait *l'ellipse des contraintes* relative au point O ;

dans le plan mobile, P est le point d'intersection des deux droites M_1P et M_2P, perpendiculaires entre elles et menées à partir des deux points M_1 et M_2 de (O, σ), points fixes par rapport à un observateur lié rigidement aux axes mobiles (O, σ) et (O, τ) et tournant avec eux autour de O lorsque l'angle θ varie : c'est donc un cercle de diamètre $\overline{M_2M_1} = \sigma_1 - \sigma_2$, qui n'est autre que le *cercle de Mohr* relatif au point O.

En résumé, *l'ellipse des contraintes apparaît comme le lieu du point P, extrémité du vecteur « contrainte $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{f_\theta}$ » dans le plan fixe (x, O, y), et le cercle de Mohr comme le lieu de ce même point dans le plan mobile (σ, O, τ).*

Ou encore : *lorsque l'angle θ varie de O à 2π, un observateur lié aux axes fixes voit l'extrémité du vecteur « contrainte $\overrightarrow{f_\theta}$ » décrire l'ellipse des contraintes de demi-axes σ_1 et σ_2, et un observateur lié aux axes mobiles voit l'extrémité de ce même vecteur décrire le cercle de Mohr de diamètre $\sigma_1 - \sigma_2$.*

Les deux notions classiques d'ellipse des contraintes et de cercle de Mohr se trouvent ainsi associées.

Il découle immédiatement et sans calculs de cette représentation les faits connus suivants :

a) Valeurs des contraintes normale σ_θ et tangentielle τ_θ :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\[2ex] \tau_\theta = \qquad\qquad - \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta. \end{cases}$$

b) Les éléments plans sur lesquels la contrainte tangentielle τ_θ est maximum en valeur absolue forment des angles $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$ avec les directions principales (O, x) et (O, y), et

$$\left|\tau_{max}\right| = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|.$$

c) La même représentation étant naturellement valable quels que soient les signes de σ_1 et σ_2 (fig. 2 b, c, d), on a notamment les cas particuliers ci-après :

$\sigma_1 \neq O$, $\sigma_2 = 0$ (fig. 2 e) : l'ellipse des contraintes dégénère dans le segment de droite double $(+\sigma_1, -\sigma_1)$ et le cercle de Mohr, dont le rayon prend la valeur $\dfrac{\sigma_1}{2}$, passe par l'origine O. *(Traction ou compression pure.)*

$\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ (fig. 2 f) : l'ellipse des contraintes devient un cercle de rayon σ_1 et le cercle de Mohr se réduit au point P situé à la distance σ_1 de l'origine O. *(Etat de contrainte isotrope.)*

$\sigma_1 = -\sigma_2 \neq 0$ (fig. 2 g) : l'ellipse des contraintes et le cercle de Mohr sont confondus en un même cercle de centre O et de rayon σ_1. *(Cisaillement simple.)*

Remarque : Moyennant quelques modifications, les raisonnements précédents sont encore applicables lorsque σ_1 et σ_2 ne sont pas des contraintes principales et, par conséquent, qu'il existe une contrainte tangentielle τ sur les éléments plans fixes choisis comme origines.

II. Déformations autour d'un point dans un état de contraintes à deux dimensions pour un matériau obéissant à la loi de Hooke

Soit $\overrightarrow{u_\theta} = 1$ un vecteur élémentaire de longueur égale à l'unité tournant dans le plan (x, O, y) autour de l'origine O. Avant l'application de la sollicitation sur le domaine considéré, l'extrémité de ce vecteur décrit un cercle. Cherchons ce que devient le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$, supposé identifié à la matière, une fois créé l'état de contrainte.

Admettons toujours que les contraintes principales σ_1 et σ_2 s'exercent suivant les axes (O, x) et (O, y).

Lorsqu'il est confondu avec (O, x), respectivement avec (O, y), le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ subit les déformations linéaires ci-après, sans déviation angulaire :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\sigma_2}{mE} \\ \epsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} - \dfrac{\sigma_1}{mE} \end{cases}$$

où E est le module d'élasticité et $\dfrac{1}{m}$ le coefficient de Poisson de la matière. Remarquons que ϵ_1 et ϵ_2 représentent également des déformations spécifiques puisque $|\overrightarrow{u_\theta}| = 1$.

Pour calculer la déformation de $\overrightarrow{u_\theta}$ lorsque l'angle θ est quelconque, nous décomposons ce vecteur en ses deux composantes $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ parallèles aux axes fixes ; ces composantes subissent les déformations suivantes, sans déviation angulaire :

$$\begin{cases} \delta_x = \epsilon_1 \cos\theta = \left(\dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\sigma_2}{mE}\right) \cos\theta \\ \delta_y = \epsilon_2 \sin\theta = \left(\dfrac{\sigma_2}{E} - \dfrac{\sigma_1}{mE}\right) \sin\theta. \end{cases}$$

Les coordonnées de l'extrémité P du vecteur déformé $\overrightarrow{v_\theta}$ sont, par conséquent :

$$\begin{cases} x' = x + \delta_x = (1 + \epsilon_1) \cos\theta \\ y' = y + \delta_y = (1 + \epsilon_2) \sin\theta. \end{cases}$$

Ces deux équations cartésiennes sont équivalentes à l'équation vectorielle unique :

$$\boxed{\overrightarrow{v_\theta} = \overrightarrow{(1 + \epsilon_1) \cos\theta} + \overrightarrow{(1 + \epsilon_2) \sin\theta}}$$

Cette équation est analogue à celle obtenue pour la contrainte $\overrightarrow{f_\theta}$, σ_1 étant remplacé par $1 + \epsilon_1$ et σ_2 par $1 + \epsilon_2$. Si donc, comme précédemment, on imagine un système d'axes mobiles (σ, O, τ) lié au vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ non déformé, la direction $(O, +\sigma)$ étant confondue avec $\overrightarrow{u_\theta}$ on peut dire (fig. 3) :

Lorsque l'angle θ varie de O à 2π, un observateur lié aux axes fixes voit l'extrémité du vecteur « déformation $\overrightarrow{v_\theta}$ » décrire une ellipse de demi-axes $(1 + \epsilon_1)$ et $(1 + \epsilon_2)$, l'ellipse des déformations, et un observateur lié aux axes mobiles voit l'extrémité de ce même vecteur décrire un cercle de diamètre $(1 + \epsilon_1) - (1 + \epsilon_2) = \epsilon_1 - \epsilon_2$, le cercle de Mohr des déformations.

Une relation et un énoncé en tous points analogues aux précédents s'obtiennent en substituant « déformation spécifique $\overrightarrow{\epsilon_\theta}$ » à « déformation $\overrightarrow{v_\theta}$ », ϵ_1 à $(1 + \epsilon_1)$ et ϵ_2 à $(1 + \epsilon_2)$ (fig. 4) :

$$\boxed{\overrightarrow{\epsilon_\theta} = \overrightarrow{\epsilon_1 \cos\theta} + \overrightarrow{\epsilon_2 \sin\theta}}$$

Lorsque l'angle θ varie de O à 2π, un observateur lié aux axes fixes voit l'extrémité du vecteur « déformation spécifique $\overrightarrow{\epsilon_\theta}$ » décrire une ellipse de demi-axes ϵ_1 et ϵ_2, l'ellipse des déformations spécifiques, et un observateur lié aux axes mobile voit l'extrémité de ce même vecteur décrire un cercle de diamètre $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$, le cercle de Mohr des déformations spécifiques.

Les propriétés suivantes (établies dans tous les traités avec des développements plus ou moins longs) se déduisent également de manière aisée et presque sans calculs de la représentation adoptée, en supposant, ce qui est généralement le cas, que ϵ_1 *et* ϵ_2 *sont très petits par rapport à l'unité :*

a) Valeurs des déformations linéaire spécifique ϵ_θ et angulaire γ_θ :

$$\begin{cases} \epsilon_\theta = |\overrightarrow{v_\theta}| - |\overrightarrow{u_\theta}| = \dfrac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \dfrac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos 2\theta \\ \gamma_\theta = \overline{\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta}} = -\dfrac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

On remarquera l'analogie de ces expressions avec celles donnant les valeurs de σ_θ et τ_θ.

b) La déformation angulaire γ_θ est maximum en valeur absolue lorsque $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$:

$$|\gamma_{max}| = \left|\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}\right|$$

c) Dans le cas du cisaillement simple, le glissement unitaire γ est défini comme la déformation angulaire d'un angle droit sur les côtés duquel n'agit qu'une contrainte tangentielle τ, ces côtés étant d'ailleurs les bissectrices des directions principales où $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ (fig. 5) :

$$\gamma = \gamma_{\theta=\frac{3\pi}{4}} - \gamma_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 2\,\gamma_{max} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

Puisque $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$, les expressions de ϵ_1 et ϵ_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\sigma_2}{mE} = \dfrac{\tau}{E}\left(1 + \dfrac{1}{m}\right) \\ \epsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} - \dfrac{\sigma_1}{mE} = -\dfrac{\tau}{E}\left(1 + \dfrac{1}{m}\right) = -\epsilon_1 \end{cases}$$

et $$\gamma = \frac{2\tau}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) = 2\,\epsilon_1$$

En posant, selon l'usage, $G = \dfrac{E}{2}\left(\dfrac{m}{1+m}\right)$, il vient

$$\boxed{\gamma = \frac{\tau}{G}}$$

d) Comme pour les contraintes, on peut envisager les trois cas particuliers :

$$\epsilon_1 \neq 0,\ \epsilon_2 = 0.$$
$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq 0.$$
$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 \neq 0.$$

Il en découle, pour les diagrammes de « déformations spécifiques $\vec{\epsilon_\theta}$ », des conclusions analogues à celles obtenues pour les contraintes.

e) Par contre, ces trois cas particuliers ne sont pas tous réalisables pour les « déformations $\vec{v_\theta}$ ». ϵ_1 et ϵ_2 étant généralement de beaucoup inférieurs à l'unité, les égalités

$$1 + \epsilon_2 = 0 \quad \text{et} \quad 1 + \epsilon_1 = -(1 + \epsilon_2)$$

ne peuvent en effet jamais être satisfaites. Seul le cas $1 + \epsilon_1 = 1 + \epsilon_2 \neq 0$ est possible, et alors $\sigma_1 = \sigma_2$. En d'autres termes : *L'ellipse des « déformations $\vec{v_\theta}$ » ne dégénère jamais en un segment de droite et elle n'est un cercle que dans le seul cas de l'état de contrainte isotrope ; l'origine O est toujours située en dehors du cercle de Mohr des « déformations $\vec{v_\theta}$ ».*

CARNET DES CONCOURS

Temple de Saint-Marc, à Lausanne

Ouverture

L'Association du temple de Saint-Marc ouvre un concours, auquel peuvent participer :

a) les architectes suisses domiciliés dans le canton de Vaud depuis le 1er septembre 1947 ;

b) les architectes vaudois, quelle que soit leur résidence.

Date d'ouverture du concours : 1er septembre 1948.

Remise des projets : 15 janvier 1949.

Jury : Président : professeur F. Panchaud, ingénieur, vice-président de l'Association ; professeur J. Tschumi, architecte ; Ed. Virieux, architecte cantonal ; R. Loup, architecte.

Somme à disposition du jury : 6500 fr., pour trois prix et achat éventuel de projets.

Le programme, remis aux concurrents moyennant un dépôt de 10 fr., sera envoyé contre remboursement à toute personne qui en fera la demande à M. le professeur F. Panchaud, ingénieur, avenue du Mont-d'Or 7, Lausanne.

BIBLIOGRAPHIE

Force hydraulique et électricité en Suisse

Sous ce titre, l'*Association suisse pour l'aménagement des eaux* a fait paraître une petite brochure de 85 pages, d'un format très pratique, renfermant de nombreux renseignements sur les forces hydrauliques et la production d'énergie électrique de la Suisse. M. *Jean Pronier*, directeur du Service de l'électricité de Genève, présente tout d'abord un aperçu général, illustré par de très belles photographies. Vient ensuite une bibliographie des principaux ouvrages et articles sur ce sujet, ainsi qu'une liste des offices gouvernementaux, des associations et des entreprises de travaux hydrauliques et d'équipement d'usines. La brochure renferme également la liste de toutes les usines hydroélectriques de la Suisse, avec indication de leurs principales caractéristiques, y compris les usines en construction et projetées, ainsi qu'une carte des usines hydroélectriques de la Suisse et de leurs lignes d'interconnexion, à l'échelle de 1 : 500 000. Cette brochure, d'une présentation impeccable, sort des presses de Roto-Sadag S. A., de Genève. Elle est en vente, au prix de 5 fr. 20 plus port, auprès du Secrétariat de l'Association suisse pour l'aménagement des eaux, St. Peterstrasse 10, Zurich.

Signale und Stellwerke, par *Eduard Felber*, ing. dipl. SBB-Fibeln Heft 4. — Orell Füssli Verlag Zurich, 1948. — Une brochure in-8 de 80 pages, 3 schémas et 51 clichés hors-texte. — Prix, broché, 3 fr.

Elégante plaquette consacrée aux installations de signalisation et de sécurité de nos Chemins de fer fédéraux.

L'auteur présente une vue d'ensemble de la question qui permet au lecteur de se rendre compte de manière précise des multiples problèmes que les Chemins de fer doivent résoudre pour mener à bien leur tâche souvent difficile, et des progrès réalisés ces dernières années. D'excellentes vues photographiques accompagnent le texte et en agrémentent sa lecture.

Traffic Surveys. — Practical Methods for Planners and Road Engineers, par *R. B. Hounsfield*. — Published for « The Architect & Building News » by Gilbert Wood & Co., Ltd ; distributed by Iliffe & Sons, Ltd., London 1948. — Une brochure in-8 de 47 pages et 14 figures. Prix 3/6d.

Guide pratique, destiné à l'architecte urbaniste et à l'ingénieur des routes, proposant des directives pour analyser aussi exactement que possible l'importance du trafic et les divers problèmes qui en dépendent.

L'auteur donne une idée des méthodes d'information les plus rapides, montre comment on peut obtenir les renseignements désirés de manière simple, comment il faut les rassembler pour en tirer des conclusions précises et enfin quel doit être leur mode de présentation pour les rendre parlants.

Une bibliographie complète son exposé.

42e Rapport annuel du Comité et du Conseil de l'Association patronale suisse des Constructeurs de machines et Industriels en métallurgie, 1947. — Secrétariat : Dufourstrasse 1, Zurich 8. — Un volume in-8 de 194 pages.

Ce rapport présente aux entreprises sociétaires quelques considérations sur l'activité de l'Association et sur diverses questions relatives à la politique sociale actuelle.

Parmi les sujets traités, citons :

Le marché du travail et le degré d'occupation.

L'évolution des salaires dans l'industrie des machines et des métaux.

Le coût de la vie en Suisse.

Les efforts déployés en faveur de la stabilisation des prix et des salaires.

La part du capital et du travail au rendement des sociétés anonymes de l'industrie suisse des machines et des métaux.

La formation professionnelle et l'apprentissage.

La Caisse de compensation pour allocations familiales.

La Caisse de compensation pour perte de salaire et de gain des militaires de l'industrie suisse des machines et métaux.