# Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables: application à l'étude de couplages non linéaires

Autor(en): **Blanc, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **74 (1948)**

Heft 17

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-56031

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

74e année 14 août 1948 N° 17

# BULLETIN TECHNIQUE
## DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

**ABONNEMENTS :**
Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs
Pour les abonnements s'adresser à la librairie
**F. ROUGE & Cie**
à Lausanne
Prix du numéro :
1 Fr. 25

**Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.**

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. † L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; † E. ELSKES, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte ; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais* : MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGENER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

**TARIF DES ANNONCES**
Le millimètre
(larg. 47 mm.) 20 cts.
Réclames : 60 cts. le mm.
(largeur 95 mm.)
Rabais pour annonces répétées
**ANNONCES SUISSES S.A.**
5, Rue Centrale
Tél. 2 33 26
LAUSANNE
et Succursales

**CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE**
A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables*, par CH. BLANC, professeur de mathémathiques appliquées à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. — *Concours d'idées pour le raccordement du Canal transhelvétique au lac Léman.* — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT.

# Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables

## Application à l'étude de couplages non linéaires

par CH. BLANC,
professeur de mathématiques appliquées à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne.

*(Suite et fin)* [1]

### § 7. Les couplages non linéaires entre haute et basse fréquences

On dit qu'il y a un couplage entre deux grandeurs variables lorsque les variations de chacune d'elles sont influencées par celles de l'autre. Analytiquement, considérons deux grandeurs dont les variations satisfont chacune à une équation différentielle linéaire ; le couplage des deux grandeurs transforme les deux équations en un système différentiel de deux équations à deux fonctions inconnues.

Supposons que les deux équations, en l'absence de couplage, sont linéaires ; selon les cas, le couplage des deux grandeurs donnera un système différentiel *linéaire* ou *non linéaire* ; dans le premier cas, on dit que le couplage est linéaire, dans le second qu'il est non linéaire. Il est facile d'imaginer des exemples de l'un et l'autre cas.

Prenons pour commencer deux circuits électriques comportant des résistances, des capacités et des inductivités ; si les deux circuits sont voisins, ils sont couplés par leur inductivité mutuelle : un tel couplage est *linéaire*.

Reprenons ensuite un des circuits considérés et plaçons-le dans le voisinage d'un pendule portant une masse ferro-magnétique : il y a couplage, car l'inductivité du circuit dépend de la position du pendule, et le pendule subit, par l'effet du courant, une force qui modifie son mouvement ; ce couplage est *non linéaire*, en particulier parce que la force exercée par le courant est proportionnelle au carré de son intensité.

Mathématiquement, l'étude des couplages linéaires (à coefficients constants) se ramène à un problème d'algèbre des polynomes ; on en peut faire une théorie générale et les seules difficultés sont au niveau du calcul numérique (ce qui ne signifie pas qu'elles sont négligeables). L'étude des couplages non linéaires ne paraît pas pouvoir se faire par une théorie générale. Les circonstances imaginables sont si diverses qu'il est nécessaire de ne considérer simultanément que certaines d'entre elles.

Nous allons voir comment on peut aborder le cas d'un couplage entre deux grandeurs variant périodiquement (ou presque périodiquement), avec des fréquences notablement différentes. Il s'agira, pour fixer les idées, soit des haute et basse fréquences de la radiotechnique,

[1] Voir *Bulletin Technique* du 17 juillet, p. 185.

soit de la fréquence d'un courant alternatif à 50 périodes par seconde et d'une fréquence lente (période de l'ordre d'une seconde). Ce qui importe seulement, c'est le rapport des fréquences, qui doit être grand. Nous parlerons donc de haute et de basse fréquences dans ce sens relatif, le seul qui intervient dans l'étude mathématique du couplage.

Faisons alors tout de suite une remarque : s'il y a un couplage en une haute et une basse fréquences, l'action de la basse fréquence sur la haute ne dépend pas de la nature périodique de la basse fréquence, puisque cette action varie lentement en regard de la haute fréquence ; il n'est donc pas nécessaire de tenir compte de cette périodicité et il suffit de parler d'un couplage entre une grandeur périodique et une grandeur variant lentement. Reprenons l'exemple du pendule et du courant alternatif : supposons que le circuit est relié aux bornes d'un générateur à 50 périodes par seconde et que le pendule a une période propre de l'ordre d'une seconde ; le mouvement du pendule étant très lent par rapport aux variations de courant dans le circuit, l'étude de ce courant est la même que si l'on imposait au pendule un mouvement arbitraire, pourvu seulement qu'il se fasse assez lentement. On cherchera donc à exprimer le courant dans ce circuit en tenant compte de la position et de la vitesse du pendule, mais sans faire intervenir la nature globale de son mouvement.

Analytiquement, on arrive ainsi d'une façon générale à une équation de la forme (1), où la fonction $u(t)$ est la mesure de la grandeur qui fixe l'état du système à haute fréquence (l'intensité du courant dans le circuit électrique, si l'on reprend l'exemple du pendule), où $F(t)$ est une fonction périodique, ou peu différente d'une fonction périodique et où les $a_k(t)$ sont des coefficients variant peu et lentement relativement à la période de $F(t)$. Nous avons vu, dans la première partie de ce travail, comment on peut intégrer une telle équation, au moins d'une façon approchée. Nous avons vu, en particulier, que l'on peut introduire une fonction $Y(s, t)$ qui joue le rôle d'une admittance : si le second membre de (1) est $e^{i\omega t}$, la solution cherchée est simplement

$$u(t) = Y(i\omega, t)\, e^{i\omega t} ;$$

cette admittance satisfait à une équation différentielle en $s$, d'ordre infini, dont nous avons vu l'intégration sous une forme approchée, dans l'hypothèse que les coefficients de l'équation donnée varient lentement.

En première approximation, on pourrait prendre déjà

$$Y_1(s, t) = J(s, t),$$

la fonction $J(s, t)$ étant définie par (8). Cette première approximation doit suffire le plus souvent : si les caractéristiques du système varient très lentement, ce système est à chaque instant équivalent (sensiblement) à un système dont l'admittance est la quantité $J$.

Il est possible cependant d'imaginer des couplages dont les effets, même qualitatifs, ne s'expliquent pas si l'on se borne à cette première approximation. Pour avoir une seconde approximation, on prend, comme on l'a vu, les dérivées premières dans l'équation différentielle en $Y$, et on obtient l'expression déjà écrite (10) ; il est peu probable qu'on soit amené à prendre une approximation plus poussée de $Y$ ; elle est suffisante, comme nous le verrons, pour prévoir ce qui se passe dans l'exemple du couplage entre un pendule et un circuit parcouru par un courant alternatif.

### § 8. Entretien du mouvement d'un pendule par un courant alternatif

On sait, depuis longtemps déjà, que le couplage d'un pendule et d'un courant alternatif peut donner lieu, si l'on se place dans des conditions convenables, à l'entretien du mouvement du pendule, et cela d'une façon qui exclut que le couplage soit essentiellement linéaire. Supposons, pour simplifier les calculs, que le circuit possède simplement une self-induction, avec une résistance ohmique en série ; cette restriction n'est pas nécessaire et on pourrait traiter par la même méthode le problème pour un circuit composé d'une façon absolument quelconque. Si l'on appelle $u(t)$ le courant et $x(t)$ la grandeur fixant la position du pendule, on a le système différentiel [1]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = \frac{\lambda}{2}u^2, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}(Lu) + Ru = E\sqrt{2}\sin\omega t, \tag{12}$$

où $\lambda = \dfrac{dL}{dx}$ ; on supposera simplement que $L(x)$ est une fonction croissante de $x$, donc que $\lambda$ garde un signe constant.

On a cherché parfois à intégrer ce système d'une manière approchée en écrivant *a priori* que $x(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, puis en tirant de là des conditions nécessaires pour les coefficients indéterminés introduits de cette façon. Malheureusement il n'est guère possible de montrer ensuite que ces conditions sont suffisantes ; au reste, les calculs que l'on est amené à faire ainsi sont très longs, même dans le cas du circuit électrique très simple que nous avons considéré.

Remarquons que

1° le carré du courant figurant au second membre de l'équation (11) peut être remplacé par une valeur efficace moyenne, à cause de la fréquence relativement élevée du courant ;

2° le coefficient $L(x)$ varie lentement, puisqu'il varie avec $x(t)$, qui varie peu durant une période du courant.

[1] Voir Y. Rocard, *Dynamique générale des vibrations*, Masson, Paris 1943, p. 252 et suiv. ; cet ouvrage étudie en particulier plusieurs problèmes très intéressants de mécanique non linéaire. La méthode qu'emploie son auteur pour traiter le problème qui nous occupe ici, ne paraît toutefois pas correcte. Il convient de citer également les deux notes de M. Ch. Cassignol, C. R. de l'Académie des Sciences, *224* (1947), p. 717-719 et 1754-1756.

On intègre alors l'équation (12) par la méthode développée plus haut ; on a ainsi le courant en fonction du temps, de $x(t)$ et de $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ ; on introduit la valeur efficace de $u(t)$ dans le second membre de l'équation (11) ; on obtient ainsi une équation non linéaire, que l'on discute par une des méthodes propres à ce genre d'équation.

L'équation (12) peut s'écrire aussi

$$L\frac{du}{dt} + \left(\frac{dL}{dt} + R\right) u = E\sqrt{2}\sin\omega t\,;$$

pour calculer $J$, nous écrivons l'opérateur différentiel adjoint, selon (3) :

$$D^* v = -\frac{d}{dt}(Lv) + \left(\frac{dL}{dt} + R\right) v$$
$$= -L\frac{dv}{dt} + Rv,$$

donc

$$J(s, t) = \frac{1}{Ls + R}\,;$$

par quelques calculs très simples, et en tenant compte de

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} = \lambda\dot{x}(t),$$

on a alors

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(J \cdot \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{J}\right) = \frac{\lambda R\dot{x}(t)}{(Ls + R)^2}\,;$$

posons, pour simplifier l'écriture,

$$Li\omega + R = Ze^{i\varphi}$$

où $Z$ et $\varphi$ sont alors des fonctions de $x(t)$ ; on obtient par (10) l'admittance variable du circuit

$$Y(i\omega, t) = \frac{e^{-i\varphi}}{Z}\left[1 - \frac{\lambda R e^{-2i\varphi}}{Z^2} \cdot \dot{x}(t)\right];$$

si l'on use de la notation complexe, le courant est donné par

$$u(t) = E\sqrt{2} \cdot \frac{e^{-i\varphi}}{Z}\left[\frac{1 - \lambda R e^{-2i\varphi}}{Z^2} \cdot \dot{x}(t)\right] e^{i\omega t},$$

d'où la valeur efficace du carré

$$u^2_{\text{eff.}} = \frac{E^2}{Z^2}\left[1 - \frac{2\lambda R\cos 2\varphi}{Z^2}\dot{x}(t) + \frac{\lambda^2 R^2}{Z^4}\dot{x}^2(t)\right];$$

nous introduisons alors cette fonction au second membre de (11), qui devient, après groupement des termes semblables,

$$(13)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} + \left[f + \frac{E^2\lambda^2 R\cos 2\varphi}{Z^4}\right]\frac{dx}{dt} - \frac{E^2\lambda^3 R^2}{2Z^6}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + kx = \frac{\lambda E^2}{2Z^2}.$$

C'est l'équation du mouvement du pendule ; nous allons chercher les propriétés de ses intégrales.

### § 9. Conditions d'entretien

L'étude de l'équation (13) consiste principalement en la recherche des solutions périodiques, à supposer qu'elle en possède. Comme on ne peut pas écrire en termes finis l'intégrale générale par des fonctions élémentaires, on utilise des considérations d'un tout autre ordre [1]. Remarquons d'abord que l'équation (13) possède entre autres pour intégrale la constante

$$x_0 = \frac{\lambda E^2}{2kZ^2}\,;$$

le pendule possède donc une position d'équilibre ; pour étudier la stabilité de cette position, on écrit l'*équation aux variations*, c'est-à-dire la proposée où on ne retient que les termes linéaires ; cette équation aux variations est ici

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + \left[f + \frac{E^2\lambda^2 R\cos 2\varphi}{Z^4}\right]\frac{d\xi}{dt} + k\xi = 0,$$

les valeurs de $\lambda$, $Z$ et $\varphi$ étant prises pour $x = x_0$ ; la stabilité dépend du signe du coefficient de $\frac{d\xi}{dt}$, c'est-à-dire du signe de

$$A = f + \frac{E^2\lambda^2 R\cos 2\varphi}{Z^4}\,;$$

si $A < 0$, cette position est instable ; comme d'autre part de grandes oscillations du pendule sont certainement amorties, il doit exister au moins une intégrale périodique ; pour la déterminer, on procède comme nous le verrons plus loin. Remarquons que, par contre, si $A > 0$, la position d'équilibre est stable, ce qui n'exclut du reste pas *a priori* l'existence d'une intégrale périodique stable. Pour l'instant, cherchons dans quelles conditions nous aurons certainement un mouvement périodique entretenu. La condition $A < 0$ peut s'écrire aussi

$$(14)\qquad -E^2\cos 2\varphi > \frac{Z^4 f}{\lambda^2 R}\,;$$

elle exige donc :

1° que le circuit ait une impédance telle que $\cos 2\varphi$ soit négatif, donc $\varphi > 45°$ ;

2° que la tension d'alimentation soit supérieure à une certaine valeur, d'autant plus grande que $\cos 2\varphi$ est plus voisin de zéro.

Si l'on s'était borné à la première approximation $Y_1$ de $Y$, on aurait trouvé pour la valeur efficace du courant une expression ne dépendant pas de $\frac{dx}{dt}$, ce qui aurait exclu l'existence d'une intégrale périodique : cette première approximation ne rend donc pas compte de l'entretien du pendule.

Il a été possible de procéder à des vérifications expérimentales des résultats obtenus par le calcul [2] ; pour les valeurs assez grandes (en valeur absolue) de $\cos 2\varphi$, qui n'exigeaient par conséquent qu'une tension et un courant peu élevés pour assurer l'entretien, les concordances ont été très bonnes ; elles l'étaient moins dès que, $\varphi$ se rapprochant de 45°, on devait imposer une tension plus grande aux bornes du circuit : la tension nécessaire à

[1] Ces considérations ont été introduites tout d'abord par H. Poincaré dans ses études sur les courbes définies par des équations différentielles. De nombreux travaux ont été consacrés depuis lors à cette question. On trouvera tous les renseignements utiles dans l'importante monographie de M. N. Minorsky, *Introduction to non-linear Mechanics*, J. W. Edwards, Ann Arbor 1947.

[2] Je tiens à remercier ici très vivement mon collègue le professeur R. Mercier, directeur du laboratoire de mécanique et de physique technique de l'E. P. U. L. ; sans hésiter, il a accepté de nous fournir un montage permettant de faire ces essais ; je tiens à remercier également ses collaborateurs, ainsi que M. P. Banderet, chef de travaux de Mathématiques appliquées, pour l'importante contribution qu'il a apportée à ce travail.

l'entretien du mouvement apparaissait supérieure à la valeur calculée. Un examen plus approfondi du problème, au point de vue physique, montrerait qu'il s'agit là d'un effet de la distorsion du courant et que l'équation différentielle écrite ne peut plus rendre compte du phénomène. Il est probable que des mesures faites avec une tension alternative à une fréquence supérieure à celle que nous avons utilisée (50 périodes par seconde) donneraient de meilleurs résultats.

### § 10. Intégration graphique de l'équation (13)

L'équation (13) peut être intégrée graphiquement par la construction des courbes intégrales dans le plan des *phases*, c'est-à-dire le plan des variables $x$ et $\dot{x}$. Posons

$$t = \frac{m}{k}\tau, \quad \frac{dx}{d\tau} = v, \quad A_1 = \frac{A}{\sqrt{km}}, \quad B_1 = \frac{E^2\lambda^3R^2}{2mZ^6}$$

et déplaçons l'origine des $x$ au point d'équilibre $x_0$ ; nous aurons simplement l'équation

$$v\frac{dv}{dx} + x = -A_1 v + B_1 v^2, \tag{15}$$

où $A_1$ et $B_1$ sont des fonctions de la variable $x$. A chaque état du pendule correspond un point du plan $Oxv$ ; le mouvement est représenté par une courbe, qui sera fermée si le mouvement est périodique. L'origine constitue un point particulier de la figure, puisqu'elle est à elle seule une courbe intégrale dégénérée en un point. Dans son voisinage, les courbes intégrales ont la forme de spirales que l'on parcourt dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque le temps croît : en effet, la variable $x$ augmente alors nécessairement si $v$ est positif et diminue si $v$ est négatif. Pour construire ces courbes intégrales, nous utiliserons une propriété de leur normale ; soit en effet $M(x, v)$ un point d'une courbe intégrale, soit encore $N(\xi, 0)$ le point où la normale à la courbe intégrale par $M$ coupe l'axe $Ox$ (fig. 1) ; on trouve facilement que l'abscisse $\xi$ de $N$ est donnée par

$$\xi(x, v) = -A_1(x)\,v + B_1(x)\,v^2 ;$$

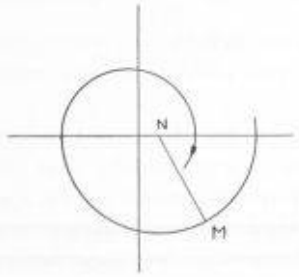

Fig. 1

cela permet de construire cette normale, d'où, par des arcs successifs, la courbe intégrale elle-même. Il sera même utile de tracer dans le plan $Oxv$ les courbes sur lesquelles la fonction $\xi(x, v)$ reste constante.

La considération de la fonction $\xi(x, v)$ permet encore de discuter la question de l'existence de courbes intégrales fermées, donc de solutions périodiques. Considérons en effet un arc $PQ$ d'une courbe intégrale et soit $r$ la distance d'un de ses points à l'origine ; on a, en tenant compte de l'équation (15),

$$r\,dr = v\,dv + x\,dx = \xi(x, v)\,dx,$$

donc, le long d'un arc quelconque de courbe intégrale,

$$\int r\,dr = \int \xi(x, v)\,dx ;$$

supposons dès lors qu'il existe une courbe intégrale fermée $C$ ; l'intégrale curviligne de $r\,dr$ le long de $C$ est nécessairement nulle, d'où

$$\oint_C \xi(x, v)\,dx = 0.$$

Or nous pouvons transformer cette intégrale curviligne par la formule de Green-Riemann, d'où

$$\iint_D \frac{\partial \xi}{\partial v}\,dx\,dv = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à l'intérieur $D$ de la courbe intégrale fermée $C$. On en conclut que la dérivée $\frac{\partial \xi}{\partial v}$ ne peut pas garder un signe constant dans $D$. Traçons alors la courbe $\Gamma$, lieu des points pour lesquels on a $\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$ ; cette courbe doit nécessairement couper la courbe intégrale fermée $C$ ; dans notre exemple, la courbe $\Gamma$ a l'équation

$$v = \frac{A_1(x)}{2B_1(x)} ;$$

comme $A_1$ et $B_1$ sont des fonctions connues de $x$, il est facile de construire la courbe $\Gamma$. Ces fonctions $A_1$ et $B_1$ tendent respectivement vers $\frac{f}{\sqrt{km}}$ et zéro lorsque $x$ augmente en valeur absolue ; la courbe $\Gamma$ aura donc en gros l'allure d'une parabole ayant son sommet tourné du côté des $v$ négatifs ; si $A_1 > 0$, le « sommet » est situé en dessus de l'origine, la position d'équilibre est stable et, si les caractéristiques du circuit varient assez régulièrement avec $x$, il n'y aura pas de courbe intégrale fermée ; par contre, si $A_1 < 0$, la courbe $\Gamma$ a son « sommet » placé en dessous de l'origine, qui correspond à une position d'équilibre instable ; il y a alors une courbe intégrale fermée entourant l'origine et dont l'intérieur est divisé en deux parties par $\Gamma$ ; ces deux parties sont du reste telles que l'intégrale double

$$\iint \frac{v\xi}{\partial v}\,dx\,dv$$

calculée pour chacune d'elles donne des valeurs absolues égales (fig. 2).

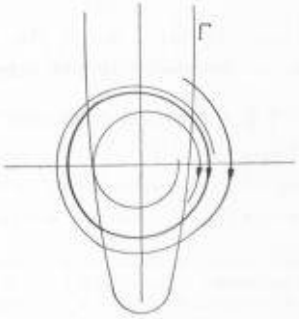

Fig. 2

Pour une valeur de la tension $E$ dépassant de peu celle qui est juste suffisante pour l'entretien du pendule, les oscillations seront d'assez faible amplitude ; on peut déterminer approximativement cette amplitude par une évaluation approchée de l'intégrale curviligne vue ci-dessus. Prenons en effet un cercle $C_r$ ayant son centre à l'origine et de rayon $r$ ; l'intégrale curviligne

$$f(r) = \oint_{C_r} \xi(x, v)\, dx$$

sera négative si l'on est à l'intérieur de la courbe intégrale fermée, et positive dans le cas contraire ; en évaluant cette intégrale et en déterminant le zéro de $f(r)$ voisin de $r = 0$, on aura une expression approchée de l'amplitude des oscillations.

Calculons cette fonction $f(r)$ pour le problème traité ici. Il faut pour cela prendre des expressions approchées des fonctions $A_1(x)$ et $B_1(x)$ ; remarquons que l'on a

$$A_1(x) = \frac{1}{\sqrt{km}}\left[f + E^2 \frac{\lambda^2 R \cos 2\varphi}{Z^4}\right] = f_1 - E^2 g_1(x) ;$$

des considérations sur lesquelles nous n'insistons pas [1] conduisent alors à poser

$$A_1(x) = f_1 - E^2(\alpha_0 - \alpha_2 x^2)$$

et

$$B_1(x) = \beta_0 E^2,$$

où $f_1$, $\alpha_0$, $\alpha_2$ et $\beta_0$ sont des constantes positives dans le cas d'un régime entretenu. On a dès lors, en posant

$$x = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi$$

pour calculer l'intégrale curviligne $f(r)$, et après quelques calculs simples,

$$f(r) = (f_1 - E^2\alpha_0)\, r^2\pi + \frac{1}{4}\alpha_2 E^2 r^4 \pi ;$$

si $E$ est assez grand pour que la parenthèse soit négative, cette fonction $f(r)$ est négative pour les petites valeurs de $r$ ; la position d'équilibre est instable, comme on l'a vu, et il existe une courbe intégrale fermée peu différente d'un cercle de rayon $r_0$, où $r_0$ est la plus petite valeur de $r$ annulant la fonction $f(r)$. On a, avec l'approximation de nos calculs,

$$r_0 = \frac{2}{E}\sqrt{\frac{E^2\alpha_0 - f_1}{\alpha_2}} ;$$

ce résultat ne peut évidemment donner une bonne approximation que si la valeur de $E$ ne dépasse pas beaucoup la valeur minimum pour laquelle il y a entretien du mouvement du pendule, donc la valeur $\sqrt{\frac{f_1}{\alpha_0}}$.

Disons encore que l'évaluation (au planimètre par exemple) de l'intégrale curviligne $\int \xi\, dx$ le long de courbes intégrales permet d'en contrôler le tracé : cette intégrale est en effet égale à la variation de $\frac{r^2}{2}$ sur ces courbes.

### § 11. Un autre exemple de couplage

On peut imaginer de nombreux exemples de couplage non linéaire du genre de celui qui a été étudié ci-dessus.

[1] Se reporter à l'ouvrage cité de N. Minorsky, chap. VI.

Considérons ainsi un couplage par *capacité* : on lie d'une façon élastique les armatures d'un condensateur, qui joue alors le rôle joué dans l'autre exemple par le pendule. Les mouvements du condensateur font varier les caractéristiques du circuit et sa charge donne naissance à une force qui modifie son mouvement. Ecrivons les équations différentielles du problème, en appelant $q(t)$ la charge du condensateur et $x(t)$ le paramètre fixant la distance des armatures ; on a ainsi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = \frac{q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right),$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \sqrt{2}\, Ei\,\omega\, e^{i\omega t} ;$$

on a donc ici

$$\frac{1}{J(s, t)} = Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} ;$$

en posant

$$Li\,\omega + R + \frac{1}{Ci\,\omega} = Ze^{i\varphi},$$

puis

$$\Upsilon(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right),$$

on a, après quelques calculs,

$$J(i\,\omega, t) = \frac{e^{-i\varphi}}{i\omega Z}\left[1 + \frac{\Upsilon(2Li\omega + R)}{i\omega Z^2} e^{-2i\varphi}\frac{dx}{dt}\right] ;$$

on introduit alors dans la première équation différentielle la valeur moyenne de $q^2$, ce qui donne, après groupement des termes semblables,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \left[f - \frac{E^2\Upsilon^2}{Z^4\omega^3}(2L\omega\cos 2\varphi + R\sin 2\varphi)\right]\frac{dx}{dt}$$
$$- \frac{E^2\Upsilon^3}{\omega^4 Z^6}(4L^2\omega^2 + R^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + kx = \frac{\Upsilon E^2}{2\omega^2 Z^2}.$$

Cette équation se discute comme l'équation (13) ; il y a une position d'équilibre

$$x_0 = \frac{\Upsilon E^2}{2k\omega^2 Z^2} ;$$

cette position est instable si le coefficient de $\frac{dx}{dt}$ est négatif, soit si

$$f < \frac{E^2\Upsilon^2}{Z^4\omega^3}(2L\omega\cos 2\varphi + R\sin 2\varphi) ;$$

pour que le couplage considéré provoque un mouvement entretenu des armatures du condensateur, donc une modulation à basse fréquence du courant, il faut tout d'abord que le second membre de cette inégalité soit positif, ce qui entraîne l'inégalité

$$2LC\omega^2 - 1 > 0 ;$$

cette inégalité étant satisfaite, il faut encore que la tension soit supérieure à une certaine valeur seuil, donnée par notre inégalité.

Nous ne poursuivrons pas plus avant l'étude de ce problème ; on peut toutefois présumer que ce couplage présente un intérêt pratique dans certaines questions de haute fréquence. En outre, il se prête peut-être mieux à des mesures de contrôle que le couplage par inductivité que nous avons étudié plus haut.