

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 74 (1948)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Une solution graphique du problème de Lagrange en balistique intérieure  
**Autor:** Haller, P. de  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56006>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

## ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 20 francs  
Etranger : 25 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 17 francs  
Etranger : 22 francs

Pour les abonnements  
s'adresser à la librairie

**F. ROUGE & Cie**  
à Lausanne

Prix du numéro :  
1 Fr. 25

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. L. HERTLING, architecte; P. JOYE, professeur; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur; E. ELSKES, ingénieur; E. D'OKOLSKI, architecte; A. PARIS, ingénieur; CH. THÉVENAZ, architecte; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur; E. MARTIN, architecte; E. ODIER, architecte; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte; G. FURTER, ingénieur; R. GUYE, ingénieur; *Valais* : MM. J. DUBUIS, ingénieur; D. BURGÈNER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

## TARIF DES ANNONCES

Le millimètre  
(larg. 47 mm.) 20 cts.  
Réclames : 60 cts. le mm.  
(largeur 95 mm.)  
Rabais pour annonces  
répétées

## ANNONCES SUISSES S.A.

5, Rue Centrale  
Tél. 2 33 26  
LAUSANNE  
et Succursales



## CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE

A. STUCKY, ingénieur, président; M. BRIDEL; G. EPITAUX, architecte; R. NEESER, ingénieur.

**SOMMAIRE :** Une solution graphique du problème de Lagrange en balistique intérieure, par M. le Dr P. DE HALLER, ingénieur en chef de la maison Sulzer Frères. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes : *Gaz et électricité, deux sources d'énergie indispensables à l'économie suisse*, conférence de M. E. CHOISY, ingénieur, président des Services industriels de Genève. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Procès-verbal de l'assemblée des délégués du samedi 30 août 1947*. — COMMUNIQUÉ. — SERVICE DE PLACEMENT.

## Une solution graphique du problème de Lagrange en balistique intérieure

par M. le Dr P. DE HALLER, ingénieur en chef de la maison Sulzer Frères.<sup>1</sup>

La balistique intérieure classique admet, dans l'étude du mouvement du projectile dans la bouche à feu, que l'écoulement des gaz est quasi permanent. Ceci permet de traiter le problème au moyen de la seule équation d'énergie, en égalant à chaque instant l'énergie dégagée par la combustion de l'explosif à l'énergie cinétique du projectile et des gaz brûlés. Cette méthode a fait ses preuves dans tous les cas où la vitesse initiale n'est pas trop élevée, ou plus exactement lorsque le poids de la charge propulsive est petit par rapport à celui du projectile. Cette condition n'est plus remplie dans les armes à feu modernes, et l'estimation de l'énergie cinétique des gaz, qui représente alors une forte fraction de l'énergie totale, devient difficile. Comme il s'agit d'un exemple typique d'écoulement non permanent, la solution analytique du problème se heurte à de grosses difficultés. La première tentative remonte à Lagrange, qui a simplifié la question en admettant que la combustion de l'explosif est terminée avant la mise en mouvement du projectile. Sous cette forme, la solution complète et exacte a été donnée par Gossot et Liouville<sup>2</sup>, et Love et Pidduck<sup>3</sup>, mais, indépendamment de l'hypothèse de Lagrange beaucoup trop éloignée de la réalité, les calculs numériques sont d'une telle complexité que l'on ne peut guère faire

usage de ces résultats. Le but de cette note est de montrer comment le calcul graphique permet non seulement de lever cette difficulté mais encore de s'affranchir de toute hypothèse particulière relative à l'allure de la combustion en fonction du temps ou de la pression.

Je rappellerai tout d'abord rapidement le principe de la méthode<sup>4</sup>.

Le mouvement varié d'un fluide élastique, contenu dans un tube cylindrique rigide et isolé thermiquement est défini par deux équations, exprimant la continuité et le théorème des quantités de mouvements :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

A cause de l'hypothèse d'un écoulement adiabatique jointe à l'équation d'état, la densité  $\rho$  est une fonction de la pression (pour un gaz parfait  $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{1/\gamma}$ ).

Introduisant un potentiel de vitesse  $\phi$  tel que  $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$

et la vitesse du son  $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$

on obtient

$$\phi_{tt} + 2\phi_x \phi_{xt} + (\phi_x^2 - a^2) \phi_{xx} = 0. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Communication présentée au 6<sup>e</sup> Congrès international de mécanique appliquée, Paris, septembre 1946.

<sup>2</sup> Balistique intérieure, Baillière, Paris, 1922.

<sup>3</sup> Phil. Trans. Roy. Soc. London A Vol. 222, 1922, p. 167-226.

<sup>4</sup> Revue Technique Sulzer, 1945, N° 1, p. 6-24.

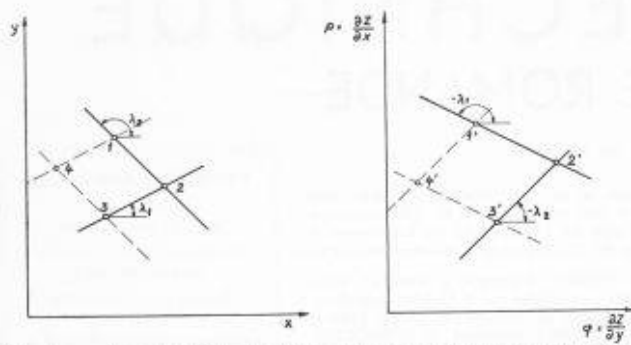


Fig. 1. — Construction graphique des caractéristiques dans les diagrammes de position et d'état.

C'est une équation aux dérivées partielles du type de Monge-Ampère<sup>1</sup>.

$$Hr + 2Ks + Lt = 0 \quad (4)$$

où  $H, K, L, M$  sont des fonctions de  $x, y, p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$  et dont les caractéristiques satisfont à l'équation

$$Hdy^2 - 2Kdx dy + Ldx^2 = 0 \quad (5)$$

qui, résolue, donne  $dy = \lambda_1 dx$  et  $dy = \lambda_2 dx$ . Ces relations correspondent chacune à l'un des deux systèmes  $\alpha$  et  $\beta$  de caractéristiques, qui en outre obéissent aux équations :

$$\alpha) dy = \lambda_1 dx; \quad dp + \lambda_2 dq = 0 \quad (6, 6a)$$

$$\beta) dy = \lambda_2 dx; \quad dp + \lambda_1 dq = 0 \quad (7, 7a)$$

dont la signification est la suivante : si l'on se déplace le long d'une caractéristique de la famille  $\alpha$  pour laquelle

$dy = \lambda_1 dx$ , les différentielles totales  $dp = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$  et  $dq = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$  sont liées entre elles par l'équation différentielle ordinaire (6a). On déduit de là un procédé d'intégration graphique dont le principe a été indiqué par Massau<sup>2</sup> et qui correspond exactement aux méthodes Prandtl-Busemann<sup>3</sup> et Schnyder-Bergeon<sup>4</sup> :

Il consiste à construire simultanément un diagramme de position  $y + x$  et un diagramme d'état  $p \div q$  (fig. 1). Si  $p$  et  $q$  sont donnés en deux points voisins 1 et 3 situés sur des caractéristiques différentes du diagramme de position, les coefficients angulaires  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont connus et on peut tracer les tronçons de caractéristiques passant par ces points. Leurs intersections définissent deux nouveaux points 2 et 4. Dans le diagramme d'état, les points donnés 1' et 3' correspondent à 1 et 3. Passant de 1 à 2, les coordonnées du point représentatif de l'état varient de  $dp$  et  $dq$ , éléments liés par l'équation (6a),

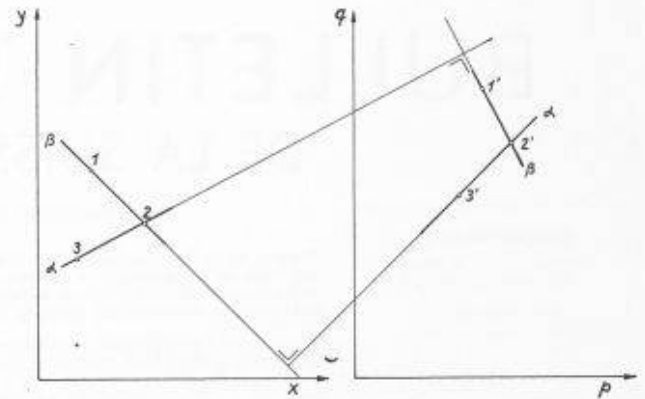


Fig. 2. — Relation d'orthogonalité entre les caractéristiques correspondantes dans les deux plans.

de même en passant de 3 à 2, les accroissements obéissent à l'équation (7a). La construction graphique du point 2', représentatif de l'état du gaz au point 2, se fait comme suit :

Du point 1' on trace un tronçon de droite de coefficient angulaire  $-\lambda_1$ . A partir de 3' on porte une droite de coefficient angulaire  $-\lambda_2$ . Ces deux droites se coupent au point cherché 2'. Les valeurs de  $x, y, p$  et  $q$  en ce point définissent de nouveau les coefficients angulaires  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on peut ainsi prolonger les caractéristiques au delà des points 2 et 2'. On procède de la même manière pour obtenir les points 4 et 4'. En partant de conditions aux limites connues, on construira ainsi de proche en proche le réseau complet des caractéristiques dans les plans  $x \div y$  et  $p \div q$  et la correspondance point par point de ces deux plans fournit la solution cherchée.

On peut aussi écrire les équations (6a) et (7a)

$$dq + \frac{1}{\lambda_2} dp = 0 \quad \text{et} \quad dq + \frac{1}{\lambda_1} dp = 0$$

et porter dans le diagramme d'état  $p$  en abscisse et  $q$  en ordonnée. On voit immédiatement que dans ce diagramme une caractéristique de la famille  $\alpha$  est perpendiculaire à celle du réseau  $\beta$  du plan  $y \div x$ , puisque  $\left(\frac{dq}{dp}\right)_\alpha = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta$  (fig. 2), et réciproquement. La construction graphique en est grandement facilitée.

Dans le problème particulier qui nous occupe, le procédé se simplifie. On a en effet

$$L = 1 \quad K = \varphi_x \quad H = (\varphi_x^2 - a^2)$$

d'où

$$\lambda_1 = \varphi_x + a \quad \lambda_2 = \varphi_x - a$$

$\varphi_x$  est par définition la vitesse  $u$  du fluide. L'équation de Bernoulli généralisée pour les gaz parfaits

$$\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 = - \int \frac{a^2}{\rho} d\rho = - \frac{a^2}{k-1}$$

permet d'éliminer la dérivée partielle  $\varphi_t$  des équations (6a) et (7a) qui deviennent

$$du = - \frac{2}{k-1} da \quad \text{et} \quad du = + \frac{2}{k-1} da. \quad (8)$$

<sup>1</sup> Goursat, Cours d'Analyse Vol. III, p. 55, Gauthiers-Villars, Paris 1927.

<sup>2</sup> Enzykl. der Math. Wissenschaften II, 3.1 p. 159.

<sup>3</sup> Stodola-Festschrift, Zürich, 1929, p. 499.

<sup>4</sup> Mém. Soc. Ing. Civ. de France, Vol. 90, p. 507, 1937.

L'état du fluide est alors défini par sa vitesse  $U$  et la vitesse du son correspondante  $a$ . Dans le plan  $u \mp a$ , les caractéristiques sont des droites de coefficient angulaire constant  $\pm \frac{2}{k-1}$ . Dans le plan  $x-t$ , ces mêmes caractéristiques ont pour expression

$$\frac{dx}{dt} = u \mp a. \tag{9}$$

Le coefficient angulaire de la tangente aux caractéristiques peut donc être directement relevé sur le diagramme d'état. Il y a pratiquement avantage à introduire des grandeurs sans dimensions, obtenues en rapportant l'abscisse, le temps et les vitesses à une longueur de référence  $L$ , et à une vitesse de référence qui sera la vitesse du son  $a_0$  du fluide au repos dans son état initial. On aura donc :

$$A = \frac{a}{a_0} \quad X = \frac{x}{L} \quad Z = \frac{a_0}{L} t \quad U = \frac{u}{a_0}$$

et les relations fondamentales s'écrivent

$$dU = \mp \frac{2}{k-1} dA \quad dX = (U \pm A) dZ. \tag{11}$$

Si on choisit pour  $A$  une échelle  $\frac{2}{k-1}$  fois plus grande

que pour  $U$ , le diagramme d'état sera constitué par des droites inclinées à  $45^\circ$ , ce qui simplifie beaucoup le dessin.

On peut retrouver de façon élémentaire les formules (8) : il suffit d'admettre comme un fait d'expérience que l'écoulement est constitué par une succession d'ondes se déplaçant dans le fluide avec une vitesse  $a$ . Pour un observateur se déplaçant avec le front d'une onde, l'équation de continuité, appliquée à deux sections de contrôle de part et d'autre du front de l'onde, s'écrit :

$$\rho a = (\rho + d\rho) (a \pm du)$$

c'est-à-dire

$$a d\rho = \pm \rho du \quad \text{et comme} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} = \frac{2}{k-1} \frac{da}{a}$$

on retrouve immédiatement  $du = \mp \frac{2}{k-1} da$ .

Pour appliquer cette méthode au problème de Lagrange, il faut préciser les conditions aux limites (fig. 3). On

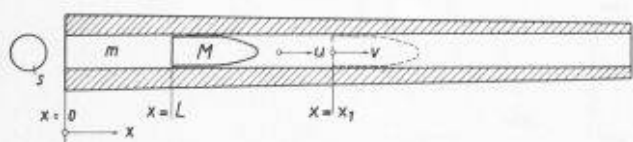


Fig. 3. — Schéma de la bouche à feu et notations.

admettra tout d'abord que la combustion de la charge est terminée au moment  $t = 0$  où le projectile se met en mouvement. Soient  $M$  la masse du projectile,  $S$  la

section du tube, et  $p$  la pression sur le culot<sup>1</sup>. Le mouvement du projectile obéit à l'équation :

$$M \frac{dv}{dt} = S \cdot p. \tag{12}$$

Si  $L$  est la longueur de la chambre de charge,  $a_0$  et  $p_0$  la vitesse du son et la pression au temps  $t = 0$ , on pourra écrire :

$$P = \frac{p}{p_0} \quad V = \frac{v}{a_0} \quad Z = \frac{a_0}{L} \cdot t$$

et

$$M \frac{dV}{dZ} = \frac{p_0}{a_0^2} L \cdot S \cdot P$$

mais

$$a_0^2 = kRT = k \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{P}{P_0} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2k}{k-1}}$$

$$\rho_0 L S = m = \text{masse des gaz}$$

donc

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{d^2 X}{dZ^2} = \frac{m}{kM} \cdot A^{\frac{2k}{k-1}}. \tag{13}$$

Cette relation est indépendante de la pression et de la température initiale ; seuls interviennent le rapport de la masse du projectile à celle de la charge et l'exposant adiabatique  $k$ .

Les conditions aux limites sont les suivantes :

pour  $T = 0$ ,  $U = 0$ ,  $A = P = 1$ ,  $V = 0$  ;

pour  $X = 0$ ,  $U$  est constamment nul,

pour  $X = X$  (au culot du projectile), la vitesse  $U$  est égale à celle  $V$  du projectile, donnée par l'équation (13) que l'on intègre au fur et à mesure par différences ou graphiquement par la méthode Meissner par exemple.

Au moment où le projectile se met en mouvement,  $V$  est encore nul et l'équation (11) donne le coefficient angulaire de la caractéristique de la famille  $\alpha$  limitant le domaine où  $U$  est nul (fig. 4). Au temps  $Z = \Delta Z$ , le projectile a acquis une vitesse  $V = \frac{m}{kM} \Delta Z$  et le point représentatif de l'état du gaz au culot du projectile se trouve sur la droite à  $45^\circ$  passant par le point initial 0.

<sup>1</sup> Ne pas confondre avec la dérivée partielle  $p$ .

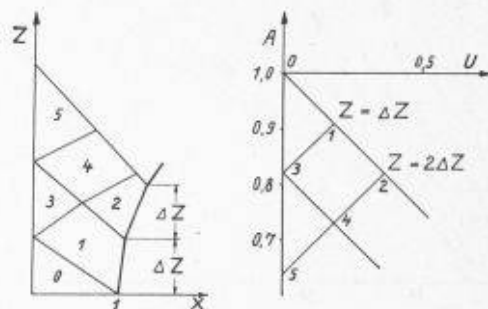


Fig. 4. — Construction graphique pour le problème de Lagrange.

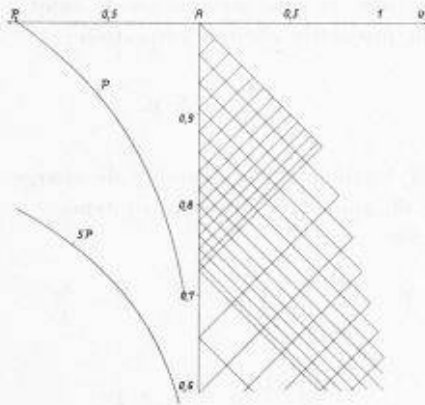


Fig. 5. — Diagramme d'état.

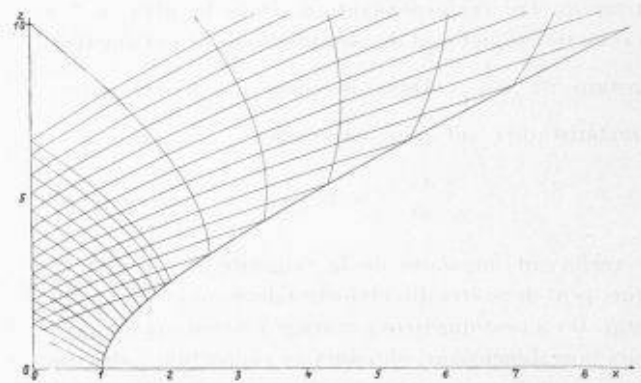


Fig. 6. — Diagramme de position.

A ce point 1 correspondent donc des valeurs de  $A$  et  $V$  qui, introduites dans (11), donnent l'inclinaison des caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$ . A la culasse,  $V = 0$ , le point représentatif de l'état se trouve sur l'axe des  $A$  à l'intersection de la droite à  $45^\circ$  passant par 1. On répète la construction pour chaque nouvel intervalle de temps et on construit ainsi la solution complète de proche en proche.

Dans l'exemple donné ici, on a choisi  $\frac{m}{M} = 0,666$  et  $k = 1,4$ . Les figures 5 et 6 reproduisent les diagrammes de position et d'état et les figures 7 et 8 les répartitions des vitesses et pressions que l'on en déduit. On remarquera la valeur considérable de la pression initiale, sans aucun rapport avec les valeurs réelles. Sur la figure 7 on reconnaît clairement le caractère oscillatoire du mouvement des gaz.

L'hypothèse fondamentale que la combustion de la charge est terminée avant le démarrage du projectile limite considérablement l'intérêt pratique de ce calcul. La méthode graphique permet de se libérer de cette restriction. En effet, les équations (10), (11) et (13) qui régissent le mouvement des gaz et du projectile sont indépendantes de la température et de la pression ini-

tiales. La construction graphique reste la même quels que soient  $a_0$  et  $p_0$ ; la seule restriction est que l'entropie doit être constante à chaque instant le long du tube. Ceci revient à assimiler la combustion de la charge (sa transformation de l'état solide à l'état gazeux) à l'introduction continue et régulièrement répartie sur la longueur du tube d'une certaine masse de gaz et d'une certaine quantité de chaleur élevant la température initiale. La vitesse du son de référence  $a_0$  sera donc une fonction du temps définie par la loi de combustion de la charge. Si  $m_1$  est la masse totale de la charge,  $m_0$  la masse d'air contenue dans la chambre de charge avant la déflagration, et  $m$  la masse brûlée à l'instant  $t$ , on pourra poser en première approximation :

$$a_0^2 = a_{00}^2 \left[ 1 + \frac{Cm}{C_e m + C_0 m_0} \right]$$

$C$  est la chaleur dégagée par la combustion de l'unité de masse,  $C_e$  la chaleur spécifique des gaz et  $C_0$  celle de l'air. Si  $m$  est une fonction connue du temps, la relation  $dZ = \frac{a_0}{L} dt$  permet de passer de l'échelle des  $Z$  au temps réel  $t$ .

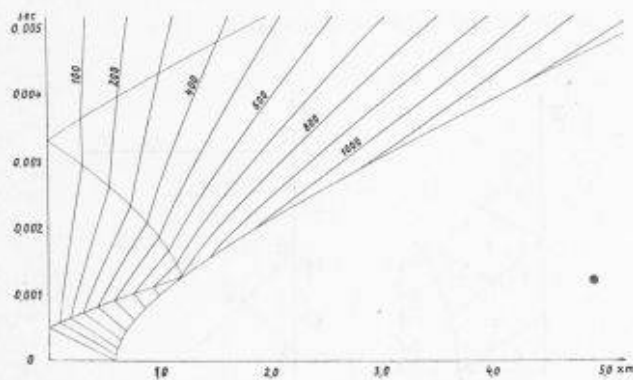


Fig. 7. — Répartition des vitesses.

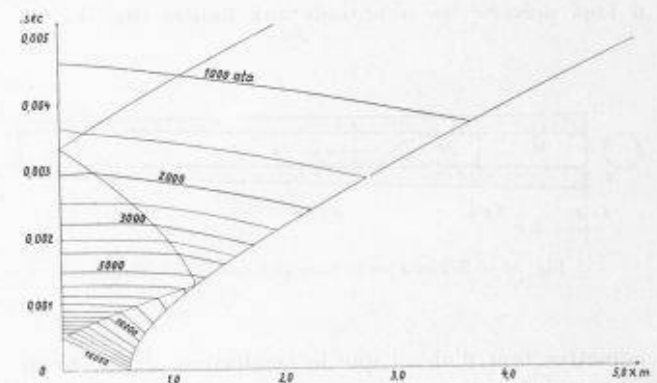


Fig. 8. — Répartition des pressions.

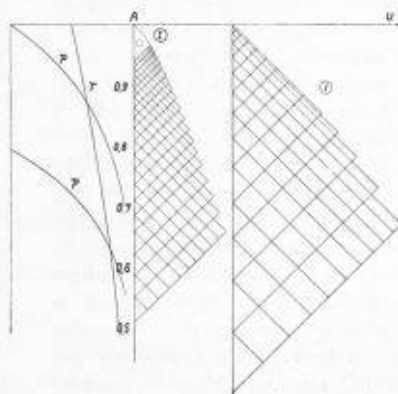


Fig. 9. — Diagramme d'état pour combustion progressive.

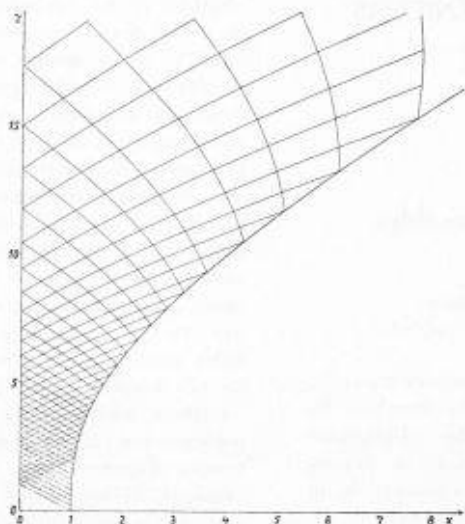


Fig. 10. — Diagramme de position pour combustion progressive.

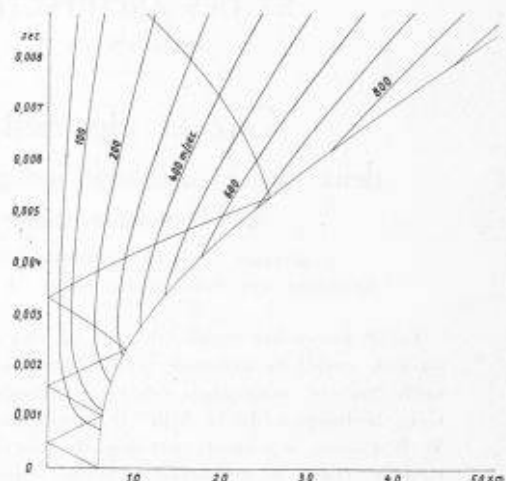


Fig. 11. — Répartition des vitesses.

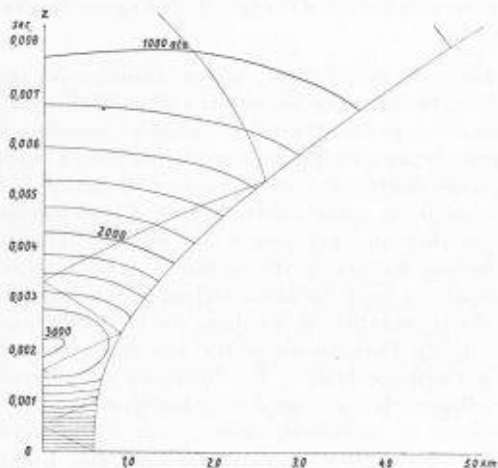


Fig. 12. — Répartition des pressions.

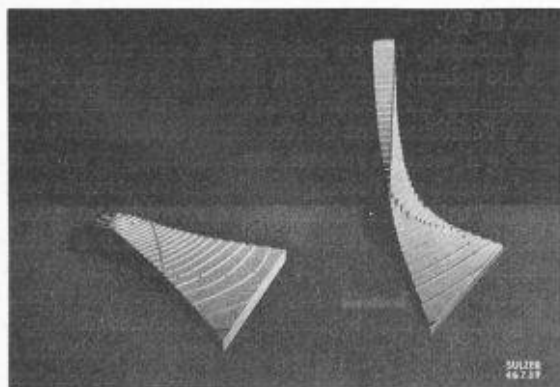


Fig. 13. — Relief des pressions ; à droite : combustion instantanée ; à gauche : combustion progressive.

L'équation du mouvement du projectile devient alors

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{m + m_0}{kM} \cdot A^{\frac{2k}{k-1}}$$

et la construction graphique est exactement la même que précédemment.

Dans l'exemple reproduit sur les figures 9 à 12 on a admis une vitesse de combustion constante, indépendante de la pression. La comparaison des répartitions de vitesse et de pression avec les figures 7 et 8 montre que le caractère oscillatoire a pratiquement disparu. La pression à la culasse augmente progressivement pour passer par un maximum, ce qui correspond bien aux relevés expérimentaux. Les reliefs de la figure 13 font ressortir la différence essentielle entre les deux cas.

Il est clair que cette façon de tenir compte de la combustion n'est pas rigoureuse. A cause de la variation de l'entropie avec le temps, la densité n'est plus une fonction de la pression seulement. Dans l'exemple traité les variations d'entropie sont toutes proportions gardées suffisamment lentes pour que l'erreur reste acceptable.

On a admis dans cet exposé que le projectile se déplace dans le vide. Il serait aisé de tenir compte de la compression de l'air devant le projectile ou du frottement dans le tube ; la détermination du recul de la bouche à feu ne présenterait pas de difficulté nouvelle. La méthode s'appliquerait également bien au problème du canon sans recul, traité analytiquement par J. Corner<sup>1</sup>.

Les valeurs numériques indiquées sur les diagrammes correspondent à un exemple choisi au hasard, le but de ce travail étant la description d'une méthode de calcul et non pas une étude de balistique.

Mon collaborateur M. Jutier a eu l'obligeance de tracer les épures de ce travail. Je tiens à l'en remercier ici.

<sup>1</sup> Proc. Roy. Soc. A Vol. 188, p. 237, 1947.